problemas 1

1. Resolver los siguientes problemas de Cauchy:

a) $\begin{array}{l}(y-2e^{x})u_y-u_x=u\\ u(0,y)=y\end{array}$ b) $\begin{array}{l}yu_y+u_x=u-ye^{-x}\\ u(x,-1)=1\end{array}$ c) $\begin{array}{l}yu_y+(2y-x)u_x=x\\ u(x,1)=0\end{array}$ d) $\begin{array}{l}3x^2u_y-u_x=4yu\\ u(1,y)=1\end{array}$

2. Resolver los siguientes problemas de Cauchy y precisar si la solución es única:

a) $\begin{array}{l}u_y+u_x=u-x-y\\ u(x,-2)=x\end{array}$ b) $\begin{array}{l}u_y-2yu_x=4xy\\ u(x,-1)=2x+1\end{array}$ c) $\begin{array}{l}3yu_y-xu_x=2xyu\\ u(-1,y)=1\end{array}$ d) $\begin{array}{l}2xy^2u_y-u_x=2xyu\\ u(0,y)=1\end{array}$

3. Resolver $\begin{cases}2yu_y+xu_x=2u-2y^2\\ u(-2,y)=4-y^2\end{cases}$. ¿Cuántas soluciones de la ecuación cumplen $u(x,x^2)=0$?

4. Sea $(3y-x^2)u_y+xu_x=3u$. Hallar la solución que cumple $u(1,y)=y$, probando su unicidad. Dar dos soluciones distintas que cumplan uno de estos dos datos: i) $u(x,x^2)=0$, ii) $u(x,x^2)=1$.

5. Resolver $u_y+2yu_x=3xu$ con $\begin{array}{l}\text{i) } u(x,1)=1\\ \text{ii) } u(0,y)=0\end{array}$, estudiando la unicidad de la solución.

6. Reducir a forma canónica y, si es posible, encontrar la solución general:

a) $u_{yy}+4u_{xy}+5u_{xx}+u_y+2u_x=x$ b) $u_{yy}+6u_{xy}+9u_{xx}+9u=9$

c) $u_{xx}+4u_{xy}-5u_{yy}+6u_x+3u_y=9u$ d) $3u_{tt}-2u_{xt}-u_{xx}+8u_t-8u_x=0$

7. Escribir (E) $u_{tt}+2u_{xt}=2$ en forma canónica y hallar su solución general. Unos de estos datos de Cauchy: i) $u(x,0)=u_t(x,0)=0$, ii) $u(0,t)=0$, $u_x(0,t)=t$, determinan una única solución de (E). Hallarla en ese caso y estudiar cuántas soluciones cumplen los otros.

8. Escribir en forma canónica, hallar la solución general y la que cumple los datos, y comprobarla:

a) $\begin{array}{l}u_{tt}+4u_{tx}+4u_{xx}+u_t+2u_x=0\\ u(x,0)=1-x,\ u_t(x,0)=1\end{array}$ b) $\begin{array}{l}u_{yy}+4u_{xy}+4u_{xx}-4u=5e^{x+y}\\ u(x,0)=0,\ u_y(x,0)=e^{x}\end{array}$ c) $\begin{array}{l}u_{yy}-2u_{xy}+u_{xx}+u=x+y\\ u(x,0)=x,\ u_y(x,0)=0\end{array}$

9. Resolver utilizando diferentes caminos (intentando encontrar atajos):

a) $\begin{cases}u_{tt}-4u_{xx}=e^{-t},\ x,t\in\mathbf{R}\\ u(x,0)=x^2,\ u_t(x,0)=-1\end{cases}$ b) $\begin{cases}u_{tt}-4u_{xx}=16,\ x,t\in\mathbf{R}\\ u(0,t)=t,\ u_x(0,t)=0\end{cases}$ c) $\begin{cases}u_{tt}-4u_{xx}=2,\ x,t\in\mathbf{R}\\ u(x,x)=x^2,\ u_t(x,x)=x\end{cases}$

10. Sea (E) $Au_{yy}+Bu_{xy}+Cu_{xx}+Du_y+Eu_x+Hu=F(x,y)$. Probar que un cambio de la forma $u=e^{py}e^{qx}w$, con p y q adecuadas, lleva (E), si no es parabólica, a una (E*) sin derivadas de primer orden. ¿Para qué relación entre las constantes $A,\dots,H$ no tiene (E*) término en w? Aplicar lo anterior para resolver $u_{xy}+2u_y+3u_x+6u=1$. Probar que toda ecuación parabólica o es resoluble o se puede poner con cambios de variable en la forma $w_\xi+Kw_{\eta\eta}=G(\xi,\eta)$.

11. Sea $\begin{cases}u_{tt}-4u_{xx}=0,\ x\ge0,\ t\in\mathbf{R}\\ u(x,0)=\begin{cases}\cos x-1,\ x\in[2\pi,4\pi]\\ 0,\ x\in[0,2\pi]\cup[4\pi,\infty)\end{cases}\\ u_t(x,0)=u(0,t)=0\end{cases}$. Dibujar la extensión f^*. Hallar $u(3\pi,3\pi)$. Dibujar $u(x,3\pi)$. Hallar $u(2\pi,t)$ para $t\ge3\pi$.

12. Sea $\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=0,\ x\ge0,\ t\in\mathbf{R}\\ u(x,0)=u(0,t)=0,\ u_t(x,0)=\begin{cases}\cos\frac{x}{2},\ x\in[\pi,3\pi]\\ 0,\ x\in[0,\pi]\cup[3\pi,\infty)\end{cases}\end{cases}$. a] Dibujar g^* y dar su expresión. b] Calcular $u(2\pi,3\pi)$, $u(2\pi,4\pi)$ y $u(2\pi,t)$ para $t\ge5\pi$.

13. Sea $\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=0,\ x\ge0,\ t\in\mathbf{R}\\ u(x,0)=\begin{cases}(x-1)(x-4),\ x\in[1,4]\\ 0,\ x\in[0,1]\cup[4,\infty)\end{cases}\\ u_t(x,0)=u(0,t)=0\end{cases}$. a] Hallar $u(1,3)$. b] Dibujar $u(x,3)$. c] Hallar $u(x,3)$ para $x\in[0,1]$.

14. Sea $\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=0,\ x\ge0,\ t\in\mathbf{R}\\ u(x,0)=u_t(x,0)=0,\ u(0,t)=\operatorname{sen} t\end{cases}$. Calcular $u\left(\frac{\pi}{2},2\pi\right)$. Hallar la expresión de $u(x,2\pi)$ para i) $x\ge2\pi$, ii) $0\le x\le2\pi$ y dibujar la cuerda para $t=2\pi$. [Ayuda: $v=\operatorname{sen} t\cos x$ cumple el dato de contorno y la EDP].

15. Sea $\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=0,\ x\in[0,2],\ t\in\mathbf{R}\\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=(x-1)^2,\ u(0,t)=u(2,t)=t\end{cases}$. Hallar $u\left(\frac{3}{2},1\right)$.

16. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\in[0,5]\,,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=\begin{cases} 2-x\,,\ x\in[2,3]\ ,\ x-4\,,\ x\in[3,4] \\ 0\,,\ \text{resto de } [0,5] \end{cases} \\ u_t(x,0)=u(0,t)=u(5,t)=0 \end{cases}$. Hallar el valor de $u(4,3)$. Dibujar $u(x,3)$. Hallar la expresión de $u(2,t)$ para $t\in[0,3]$.

17. Sea $\begin{cases} u_{tt}-4u_{xx}=0\,,\ x\in[0,2],\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=4x-x^3,\ u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=u(2,t)=0 \end{cases}$. Hallar $u\big(\frac{3}{2},\frac{3}{4}\big)$. Dibujar $u(x,2)$. Hallar $u(x,1)$.

18. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=6x\,,\ x\geq 0,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=u_t(x,0)=u_x(0,t)=0 \end{cases}$. Calcular $u(0,t)$ para todo t.

19. Sea $\begin{cases} u_{tt}-\big(u_{rr}+\frac{2}{r}u_r\big)=0\,,\ r\geq 0,\ t\in\mathbf{R} \\ u(r,0)=r\,,\ u_t(r,0)=-2 \end{cases}$. a] Hallar $u(1,2)$. b] Hallar $u(1,t)$ para todo $t\geq 0$.

20. Resolver, a partir de las características y utilizando transformadas de Fourier, los problemas:

a] $\begin{cases} 2u_t+u_x=tu \\ u(x,0)=e^{-x^2} \end{cases}$ b] $\begin{cases} t\,u_t-u_x=u \\ u(x,1)=f(x) \end{cases}$ c] $\begin{cases} u_t+e^t u_x+2tu=0 \\ u(x,0)=f(x) \end{cases}$ d] $\begin{cases} 3u_t-u_x=g(x) \\ u(x,0)=0 \end{cases}$

21. a) Resolver $u_t+3t^2u_x=\big(3t^2+1\big)u$, $u(x,1)=f(x)$, a partir de las características y con la $\mathcal{F}$, deducir la solución para $f(x)=e^x$ y comprobarla. b) Estudiar la unicidad de a) y para el dato $u(0,t)=0$.

22. a] Resolver por Fourier y por las características: $\begin{cases} u_t+(\cos t)u_x=u,\ x\in\mathbf{R},\ t\geq 0 \\ u(x,0)=f(x) \end{cases}$.

b] Si $f(x)=\begin{cases} \cos^2 x,\ x\in[-\pi/2,\pi/2] \\ 0 \text{ en el resto} \end{cases}$ describir $u(x,t)$ para $t\geq 0$.

23. Resolver $\begin{cases} u_t-u_x=2xe^{-x^2} \\ u(x,2)=0 \end{cases}$ i) con las caracteristicas, ii) utilizando la $\mathcal{F}$. [El término no homogéneo es derivada de función de transformada conocida].

24. Resolver i] con caracteristicas y ii] utilizando la $\mathcal{F}$ los problemas.:

a) $\begin{cases} 21u_{tt}+2u_{tx}-3u_{xx}=0 \\ u(x,0)=f(x),\ u_t(x,0)=3f'(x) \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_{tt}-6u_{tx}+9u_{xx}=0 \\ u(x,0)=f(x),\ u_t(x,0)=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} u_{tt}+2u_{xt}+u_{xx}-u_t-u_x=0 \\ u(x,0)=f(x),\ u_t(x,0)=0 \end{cases}$

25. Sea $\begin{cases} u_{tt}-2u_{tx}-3u_{xx}=0 \\ u(x,0)=f(x),\ u_t(x,0)=0 \end{cases}$. a) Resolverlo con la $\mathcal{F}$ y a partir de su forma canónica. b) Si $f(x)=4-x^2$ si $-2\leq x\leq 2$ y 0 en el resto, dibujar $u(x,1)$.

26. Obtener la fórmula de D'Alembert utilizando transformadas de Fourier.

27. Resolver $\begin{cases} u_{tt}-4u_{xx}-2u_t+4u_x=0\,,\ x,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=f(x),\ u_t(x,0)=f(x) \end{cases}$ con la $\mathcal{F}$ [observar cuadrado perfecto]. Deducir la solución para $f(x)\equiv 1$. Escribir en forma canónica la ecuación y hallar a partir de ella su solución general.

28. Hallar la solución de $\begin{cases} u_t-u_{xx}=(x^2-1)\,e^{-x^2/2}\,,\ x\in\mathbf{R},\ t>0 \\ u(x,0)=0\,,\ u \text{ acotada} \end{cases}$ [el término no homogéneo es la derivada segunda de $e^{-x^2/2}$]:

a] Aplicando $\mathcal{F}$ directamente. b] Con un cambio que haga la ecuación homogénea y evaluando la integral de los apuntes mediante un cambio de variable. Hallar el $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$.

29. Resolver $\begin{cases} u_t-u_{xx}=e^{-x^2/4},\ x\in\mathbf{R},\ t>0 \\ u(x,0)=0\,,\ u \text{ acotada} \end{cases}$ y obtener la solución $u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-k^2}-e^{-k^2(t+1)}}{k^2}e^{-ikx}dk$.

Deducir el valor de $u(0,t)$ integrando por partes y utilizando que $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-as^2}ds=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}$.

30. Hallar, utilizando la $\mathcal{F}$, su solución sin que aparezcan integrales:

a) $\begin{cases} u_t-\frac{1}{4}u_{xx}+u_x=0\,,\ x\in\mathbf{R},\ t>0 \\ u(x,0)=e^{-x^2}\,,\ u \text{ acotada} \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_t-2tu_{xx}-u_x=0\,,\ x\in\mathbf{R},\ t>1 \\ u(x,1)=e^{-x^2/4} \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_{tt}-4u_{xx}=0\,,\ x\in\mathbf{R},\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=2e^{-x^2/2},\ u_t(x,0)=0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} u_t-2tu_{xx}=0\,,\ x\in\mathbf{R},\ t>0 \\ u(x,0)=\delta(x),\ u \text{ acotada} \end{cases}$

problemas 2

1. Resolver por series en torno al punto $x=0$, dar la solución en términos de funciones elementales y estudiar donde convergen las series solución:

a) $(1+x^2)y''-2y=0$ b) $(1-x)(1-2x)y''+2xy'-2y=0$ c) $\cos x\, y''+(2-\operatorname{sen} x)\, y'=0$

2. Sea $y''+2xy'+2y=0$. Calcular 3 términos no nulos del desarrollo en serie de la solución con $y(0)=1, y'(0)=0$. Hallar su término general e identificarla con una función elemental.

3. Sea $y''+(2-2x)y'+(1-2x)y=0$. Hallar el desarrollo hasta x^4 de la solución que cumple $y(0)=0$, $y'(0)=1$. Comprobarlo sabiendo que $y=e^{-x}$ es otra solución.

4. Sea $2\sqrt{x}\,y''-y'=0$. Precisar si $x=0$ es o no punto singular regular. Hallar el desarrollo en serie de tercer orden en torno a $x=1$ de la solución que cumple $y(1)=y'(1)=1$.

5. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones de Euler:

a) $xy''+2y'=x$ b) $x^2y''-3xy'+3y=9\ln x$ c) $x^2y''+4xy'+2y=e^x$

6. Sean a) $y''+xy'+y=0$, b) $3xy''+y'+xy=0$, c) $xy''-2y'+4e^xy=0$. Hallar los 3 primeros términos no nulos del desarrollo en serie de una solución que se anule en $x=0$, encontrando la regla de recurrencia cuando se pueda. ¿Están acotadas en $x=0$ todas las soluciones?

7. Estudiar si $2x^2y''+x(3-2x)y'-(1+2x)y=0$ tiene soluciones no triviales analíticas en $x=0$. Hallar 4 términos del desarrollo de una acotada en $x=0$. Comprobarlos usando que $y_2=\frac{1}{x}$ es solución.

8. Sea $3xy''+(2-6x)y'+2y=0$. Hallar una solución que no sea analítica en $x=0$. Hallar 4 términos del desarrollo de una solución no trivial que sea analítica en $x=0$.

9. Dar 2 términos no nulos del desarrollo de una solución de $3xy''-y'-3x^2y=0$ que se anule en $x=0$ y la regla de recurrencia. ¿En $x=0$ son todas las soluciones analíticas? ¿Son derivables?

10. Hallar el desarrollo de una solución no trivial analítica en $x=0$ de $4xy''+2y'+y=0$, $x>0$, y la solución general en términos de funciones elementales. Comprobarla haciendo $s=x^{1/2}$.

11. Hallar una corta solución no trivial de $x(2+x^2)y''+2y'-2xy=0$ analítica en $x=0$, escribiendo la regla de recurrencia.

12. Sea $x^2y''+x(7+2x)y'+9y=0$. ¿Existen soluciones analíticas no triviales en $x=0$? Calcular una solución no trivial cuyo desarrollo en torno a $x=0$ tiene un número finito de términos.

13. Sea $x^2(1+x^2)\,y''-6y=0$. Hallar 3 términos no nulos del desarrollo de una solución acotada en $x=0$, dando la regla de recurrencia. ¿Cuál es el coeficiente de x^{2012} en ese desarrollo?

14. Hallar el desarrollo de una solución acotada en $x=0$ de $x(1+x)y''+(2+3x)y'+y=0$ y probar que hay soluciones no analíticas en $x=-1$. Comprobarlo utilizando que $y=\frac{1}{x}$ es solución.

15. Sea $xy''-(1+x)\,y'+y=0$. Hallar 4 términos no nulos del desarrollo de una solución que se anule en $x=0$. ¿Están acotadas todas las soluciones en $x=0$? ¿Son analíticas todas en $x=0$?

16. Sea $(1-x^2)y''-2xy'+y=0$ (Legendre con $p=1$). Hallar 3 términos no nulos del desarrollo de la solución con $y(0)=0$, $y'(0)=1$. Estudiar si hay soluciones que tienden a 0 cuando $x\to-1$.

17. Resolver $xy''+2y'-xy=0$ probando directamente en la ecuación la y_2 de Frobenius con $d=0$. Comprobar el resultado haciendo $v=xy$.

18. Sea $x(x+1)y''+(x-1)y'=0$. Hallar 3 términos no nulos del desarrollo de una solución que se anule en $x=0$, usando de la regla de recurrencia. Precisar si hay soluciones no acotadas para $x\to\infty$.

19. Sea $x(1-x)y''-(1+x)y'+y=0$. Hallar el desarrollo de una solución no trivial de que se anule en $x=0$, dando la regla de recurrencia, e identificarla con una función elemental. Probar que hay soluciones no triviales de la ecuación que tienden a 0 cuando $x\to\infty$.

20. Sea $x(x-1)y''+y'-py=0$. Estudiar para qué valores de p posee solución polinómica. Probar que cuando $p=2$ existen soluciones que tienden a 0 cuando $x\to\infty$.

problemas 3

1. Sea $\begin{array}{l} y''+\lambda y=0 \\ y'(0)-\alpha y(0)=y(1)=0 \end{array}$. Probar que hay infinitos $\lambda_n>0\ \forall\alpha$. Discutir cuando hay $\lambda_n\leq 0$. Estudiar cómo varía con α el menor autovalor.

2. Hallar los autovalores y autofunciones de los siguientes problemas de contorno y calcular $\langle y_n,y_n\rangle\ \forall n$.

a) $\begin{array}{l} y''+\lambda y=0 \\ y(0)-2y'(0)=y(1)-2y'(1)=0 \end{array}$ [son calculables y hay uno negativo]

b) $\begin{array}{l} y''+2y'+\lambda y=0 \\ y(0)=y(\pi)=0 \end{array}$ $\left[\text{todos los } \lambda_n>1\right]$

c) $\begin{array}{l} x^2y''+xy'+\left[\lambda x^2-\frac{1}{4}\right]y=0 \\ y(1)=y(4)=0 \end{array}$ $\left[\text{hacer } u=\sqrt{x}\,y \text{ o } s=\sqrt{\lambda}\,x\right]$

3. Hallar el desarrollo en $[0,1]$ de a) $f(x)=1$, b) $f(x)=x^2$, en serie de i) $\{\operatorname{sen} n\pi x\}$, ii) $\{\cos n\pi x\}$. Dibujar con algún programa de ordenador algunas sumas parciales de las series obtenidas.

4. Desarrollar $f(x)=\cos^3 x$, $x\in[0,\pi]$, en serie de i) $\{\cos nx\}$, ii) $\{\operatorname{sen} nx\}$, dibujando las funciones hacia las que tienden las series y estudiando la convergencia uniforme.

5. Sea $f(x)=\begin{cases} 1, & 0\leq x\leq 1 \\ 0, & 1<x\leq 2 \end{cases}$. Hallar su desarrollo en serie de Fourier $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{2}$. ¿Cuánto debe sumar la serie para i) $x=1$, ii) $x=2$? Comprobarlo sustituyendo en la serie.

6. Desarrollar en serie de senos y cosenos en $[-\pi,\pi]$, mirando la convergencia puntual y uniforme:

a) $f(x)=\operatorname{sen}^2 x$ b) $f(x)=|\operatorname{sen} x|$ c) $f(x)=\operatorname{sen}\frac{x}{2}$ d) $f(x)=\begin{cases} -\pi, & \text{si } -\pi\leq x<0 \\ \operatorname{sen} x, & \text{si } 0\leq x<\pi \end{cases}$

7. Hallar los λ_n e $\{y_n\}$ y desarrollar $f(x)=x$ en las autofunciones de cada uno de estos problemas:

a) $\begin{array}{l} y''+\lambda y=0 \\ y(0)=y'(1)=0 \end{array}$ b) $\begin{array}{l} y''+\lambda y=0 \\ y(-1)=y(1)=0 \end{array}$ c) $\begin{array}{l} x^2y''+xy'+\lambda y=0 \\ y'(1)=y'(\mathrm{e})=0 \end{array}$

8. Hallar el desarrollo de $f(x)=1$ en serie de autofunciones de los siguientes problemas:

a) $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y(0)=y(1)-y'(1)=0 \end{cases}$ [Probar que no hay $\lambda_n<0$, que $\lambda_0=0$ es autovalor y que hay infinitos $\lambda_n>0$ gráficamente].

b) $\begin{cases} y''+2y'+\lambda y=0 \\ y(0)+y'(0)=y\left(\frac{1}{2}\right)=0 \end{cases}$

9. Sea $\begin{cases} \left([1-x^2]y'\right)'+\lambda y=0 \\ y(0)=0,\ y \text{ acotada en } 1 \end{cases}$. Hallar los 3 primeros términos del desarrollo de $f(x)=1$ en serie de sus autofunciones [los P_{2n-1} de Legendre].

10. Sea $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=y(\pi)=0 \end{cases}$. Determinar si $\lambda=-1$ es o no es autovalor. Probar que $\lambda=1$ lo es y dar su autofunción. Precisar para qué a tiene infinitas soluciones $y''+y=x-a$ con esos datos de contorno.

11. Sea $\begin{cases} x^2y''-2xy'+\lambda y=0 \\ y'(1)=y(2)=0 \end{cases}$. Determinar si $\lambda=-4$ y $\lambda=2$ son o no autovalores del problema. En caso afirmativo dar su autofunción $\{y_n\}$ y calcular $\langle y_n,y_n\rangle$. Precisar para ambos valores de λ cuántas soluciones tiene $x^2y''-2xy'+\lambda y=4$ con esos datos.

12. Sea $\begin{cases} xy''+2y'+\lambda xy=0 \\ y(\pi)+\pi y'(\pi)=y(2\pi)+2\pi y'(2\pi)=0 \end{cases}$. Precisar si $\lambda=0$ es o no autovalor del problema, dando la autofunción en caso afirmativo. Calcular la autofunción para $\lambda=4$ $\left[\text{la solución general } y=c_1\frac{\cos 2x}{x}+c_2\frac{\operatorname{sen} 2x}{x} \text{ se obtiene haciendo } u=xy\right]$. Determinar si existen o no soluciones de $xy''+2y'+4xy=2$ con esos mismos datos de contorno.

13. Sea $\begin{cases} y''-2y'+\lambda y=0 \\ y'(0)=y'(1)=0 \end{cases}$. Probar que $\lambda=0$ es autovalor y escribir la autofunción $\{y_0\}$ asociada. Estudiar si $\lambda=-3$ y $\lambda=2$ son o no autovalores del problema. Calcular el coeficiente de $\{y_0\}$ en el desarrollo de $f(x)=\mathrm{e}^x$ en serie de autofunciones. Precisar cuántas soluciones tiene $y''-2y'-3y=3$ con esos mismos datos de contorno.

14. Sea $\begin{cases} y''+\lambda y=\operatorname{sen} x \\ y(0)=y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \end{cases}$. Precisar, si lo hay, un λ para el que: i) tenga solución única, ii) tenga infinitas soluciones, iii) no tenga solución.

15. Sea $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y(0)=y\left(\frac{3\pi}{4}\right)+y'\left(\frac{3\pi}{4}\right)=0 \end{cases}$. Probar que $\lambda_1=1$ es autovalor, dar su autofunción $\{y_1\}$ y escribir el término con y_1 del desarrollo de $f(x)=1$ en autofunciones. Hallar la constante a para la que $y''+y=3\operatorname{sen}2x-a$ tiene infinitas soluciones con esos mismos datos. Comprobar a partir de una gráfica que el segundo autovalor $\lambda_2>4$.

problemas 4

1. Desarrollar $f(x)=\frac{\pi}{4}$ en autofunciones de $\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X'(0)=X(\pi)=0 \end{cases}$ y precisar la suma de la serie si: i) $x=\frac{\pi}{2}$. ii) $x=0$

Resolver $\begin{cases} u_t-4u_{xx}=0\,,\ x\in(0,\pi)\,,\ t>0 \\ u(x,0)=f(x)\,,\ u_x(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$ para: i) $f(x)=\frac{\pi}{4}$, ii) $f(x)=\cos\frac{x}{2}$.

2. Sea $\begin{cases} u_t-u_{xx}=0\,,\ x\in(0,\pi),\ t>0 \\ u(x,0)=0\,,\ u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=t \end{cases}$. Resolverlo y hallar para cada $x\in(0,\pi)$ el límite de la solución $u(x,t)$ cuando $t\to\infty$.

3. Resolver $\begin{cases} u_t-4u_{xx}=0\,,\ x\in(0,\pi),\ t>0 \\ u(x,0)=0\,,\ u(0,t)=t\,,\ u_x(\pi,t)=0 \end{cases}$. [Hay una v muy sencilla, pero se puede hallar otra que no estropea la ecuación].

4. Resolver por separación de variables:

a) $\begin{cases} u_t-u_{xx}=e^{-2t}\,,\ x\in(0,\pi)\,,\ t>0 \\ u(x,0)=u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_t-2tu_{xx}=e^{-t^2}\cos x\,,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\ t>0 \\ u(x,0)=\cos 3x\,,\ u_x(0,t)=u\left(\frac{\pi}{2},t\right)=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_t-u_{xx}+u=0\,,\ x\in(0,\pi)\,,\ t>0 \\ u(x,0)=0,\ u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=e^{-t} \end{cases}$ d) $\begin{cases} u_t-\frac{1}{t}u_{xx}=2\cos x\,,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\ t>1 \\ u(x,1)=\cos 3x\,,\ u_x(0,t)=u\left(\frac{\pi}{2},t\right)=0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} u_t-u_{xx}+3u=\pi\,,\ x\in(0,\pi)\,,\ t>0 \\ u(x,0)=u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} u_t-u_{xx}=0\,,\ x\in[0,1]\,,\ t>0 \\ u(x,0)=2-x^2,\ u_x(0,t)=u_x(1,t)+2u(1,t)=0 \end{cases}$

5. Sea $\begin{cases} u_t-u_{xx}-au=0\,,\ x\in(0,3\pi),\ t>0 \\ u(x,0)=1\,,\ u(0,t)-4u_x(0,t)=u(3\pi,t)=0 \end{cases}$. Determinar, según la constante a, el límite de la solución cuando $t\to\infty$.

6. a] Hallar los autovalores y autofunciones del problema $\begin{cases} X''+2X'+\lambda X=0 \\ X(0)=X(1)+X'(1)=0 \end{cases}$.

b] Resolver $\begin{cases} u_t-u_{xx}-2u_x=0\,,\ x\in(0,1)\,,\ t>0 \\ u(x,0)=e^{-x}\,,\ u(0,t)=u(1,t)+u_x(1,t)=0 \end{cases}$ [directamente o tras un cambio $u=e^{pt+qx}w$].

7. Sea $\begin{cases} u_t-\left(u_{rr}+\frac{2}{r}u_r\right)=0\,,\ r\in(\pi,2\pi)\,,\ t>0 \\ u(r,0)=\frac{\operatorname{sen} r}{r},\ u(\pi,t)=u(2\pi,t)=0 \end{cases}$. Resolverlo por separación de variables. [El problema para R es resoluble haciendo $v=rR$].

8. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\in[0,2\pi]\,,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=\begin{cases} 2\operatorname{sen}x\,,\ x\in[0,\pi] \\ 0\ ,\ x\in[\pi,2\pi] \end{cases} \\ u_t(x,0)=u(0,t)=u(2\pi,t)=0 \end{cases}$. Dibujar $u(x,\pi)$ y hallar su expresión con D'Alembert. Resolver por separación de variables y comprobar.

9. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0,\ x\in[0,\pi]\,,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=1 \\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$. a] Hallar el valor exacto de $u\left(\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$ utilizando D'Alembert. b] Separar variables y comprobar que con los 2 términos no nulos de la serie solución se obtiene $u\left(\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)\approx\frac{14}{9\pi}$ [≈ 0.495].

10. Resolver $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=t\operatorname{sen}x\,,\ x\in[0,\pi],\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$ a) Por separación de variables. b) Mediante extensiones y D'Alembert: i) directamente, ii) haciendo $w=u-t\operatorname{sen}x$.

11. Resolver por separación de variables $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=u_t(x,0)=u_x(0,t)=0\,,\ u\left(\frac{\pi}{2},t\right)=t \end{cases}$ [$v=t$ es buena para el cambio].

12. Resolver $\begin{cases} u_{tt}+2u_t-5u_{xx}=0\,,\ x\in[0,\pi]\,,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=g(x)\,,\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$ i) para cualquier $g(x)$ ii) para $g(x)=2\operatorname{sen}x$.

13. Resolver $\begin{cases} u_{tt}-u_{rr}-\frac{2}{r}u_r=0\,,\ r\leq 1\,,\ t\geq 0 \\ u(r,0)=0,\ u_t(r,0)=\frac{1}{r}\operatorname{sen}\pi r\,,\ u(1,t)=0 \end{cases}$ i) por separación de variables, ii) con las técnicas del capítulo 1.

14. Resolver por separación de variables estos problemas planos en cartesianas:

a) $\begin{cases} \Delta u=0\,,\ (0,\pi)\times(0,\pi) \\ u(0,y)=0,\, u(\pi,y)=5+\cos y \\ u_y(x,0)=u_y(x,\pi)=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \Delta u=y\cos x\,,\ (0,\pi)\times(0,1) \\ u_x(0,y)=u_x(\pi,y)=0 \\ u_y(x,0)=u_y(x,1)=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \Delta u+6u_x=0\,,\ (0,\pi)\times(0,\pi) \\ u_x(0,y)=0,\, u(\pi,y)=\cos 4y \\ u_y(x,0)=u_y(x,\pi)=0 \end{cases}$

15. Sea $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0\,,\ r<1\,,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2} \\ u(1,\theta)=f(\theta)\,,\ u(r,0)=u\big(r,\frac{\pi}{2}\big)=0 \end{cases}$. Hallar su solución si $f(\theta)=\operatorname{sen}2\theta$ y el primer término de la serie solución para $f(\theta)=\cos\theta$.

16. Resolver el problema $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0\,,\ r<2\,,\ 0<\theta<\frac{\pi}{4} \\ u(2,\theta)=f(\theta)\,,\ u(r,0)=u_\theta\big(r,\frac{\pi}{4}\big)=0 \end{cases}$ para i) $f(\theta)=8\operatorname{sen}6\theta$, ii) $f(\theta)=\pi$.

17. Sea $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0\,,\ r<1 \\ u(1,\theta)=\begin{cases} 1, & 0\le\theta\le\pi \\ 0, & \pi<\theta<2\pi \end{cases} \end{cases}$. Probar que $\frac{2}{3}\le u\big(\frac{1}{2},\frac{\pi}{2}\big)\le 1$.
[Utilizando la fórmula de Poisson o la serie solución].

18. Resolver por separación de variables estos problemas planos:

a) $\begin{cases} \Delta u=0\,,\ 1<r<2 \\ u(1,\theta)=1+\operatorname{sen}2\theta\,,\ u_r(2,\theta)=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \Delta u=0\,,\ r<1\,,\ 0<\theta<\pi \\ u_r(1,\theta)=4\cos^3\theta\,,\ u_\theta(r,0)=u_\theta(r,\pi)=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \Delta u=0\,,\ r<1\,,\ 0<\theta<\pi \\ u(1,\theta)=\theta^2,\ u_\theta(r,0)=u_\theta(r,\pi)=0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \Delta u=4\operatorname{sen}2\theta\,,\ \theta\in\big(0,\frac{\pi}{2}\big)\,,\ r<1 \\ u(1,\theta)=\operatorname{sen}4\theta\,,\ u(r,0)=u\big(r,\frac{\pi}{2}\big)=0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \Delta u=3\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\,,\ r<1\,,\ \theta\in(0,\pi) \\ u(1,\theta)=u(r,0)=u_\theta(r,\pi)=0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} \Delta u=-1/r\,,\ 1<r<3\,,\ 0<\theta<\pi \\ u(1,\theta)=2+\cos\theta,\, u(3,\theta)=u_\theta(r,0)=u_\theta(r,\pi)=0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} \Delta u=\cos\theta\,,\ r<2 \\ u(2,\theta)=\operatorname{sen}2\theta \end{cases}$ h) $\begin{cases} \Delta u=8r\cos\theta\,,\ r<1\,,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2} \\ u(1,\theta)=u_\theta(r,0)=u\big(r,\frac{\pi}{2}\big)=0 \end{cases}$

19. Resolver estos problemas planos para las constantes k indicadas, estudiando su unicidad:

a) $\begin{cases} \Delta u=0\,,\ r<2\,,\ \theta\in\big(0,\frac{\pi}{2}\big) \\ u_r(2,\theta)+ku(2,\theta)=8\cos2\theta \\ u_\theta(r,0)=u_\theta\big(r,\frac{\pi}{2}\big)=0 \end{cases}$, si i) $k=1$, ii) $k=0$. b) $\begin{cases} \Delta u=0\,,\ r<1,\ \theta\in(0,\pi) \\ u(1,\theta)+ku_r(1,\theta)=4\operatorname{sen}\frac{3\theta}{2} \\ u(r,0)=u_\theta(r,\pi)=0 \end{cases}$, si i) $k=2$, ii) $k=-2$.

20. Hallar (en términos de funciones elementales) una solución acotada de:

$\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}+4u=0\,,\ r<1\,,\ 0<\theta<\pi \\ u(1,\theta)=\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\,,\ u(r,0)=u_\theta(r,\pi)=0 \end{cases}$ [Separando variables y haciendo $s=2r$ aparece una ecuación conocida].

21. Hallar la solución de $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=\frac{2\operatorname{sen}\theta}{1+r^2} \\ u(1,\theta)=1\,,\ u \text{ acotada} \end{cases}$, a] en el círculo $r<1$, b] en la región $r>1$ [¡ojo!, $r\arctan r \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \infty$].

22. Hallar la solución de: $\begin{cases} \Delta u=0\,,\ \text{si } r>R \text{ (en el plano)} \\ u(R,\theta)=\cos^3\theta\,,\ 0\le\theta<2\pi \\ u \text{ acotada cuando } r\to\infty \end{cases}$ y $\begin{cases} \Delta u=0\,,\ \text{si } r>R \text{ (en el espacio)} \\ u(R,\theta)=\cos^3\theta\,,\ 0<\theta<\pi \\ u\to 0 \text{ cuando } r\to\infty \end{cases}$.

23. Resolver los problemas para la ecuación de Laplace en el espacio:

a) $\begin{cases} \Delta u=0\,,\ 1<r<2 \\ u(1,\theta)=\cos\theta\,,\ u(2,\theta)=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \Delta u=0\,,\ r<1 \\ u_r(1,\theta)=\cos^3\theta \end{cases}$ c) $\begin{cases} \Delta u=0\,,\ r<3 \\ u_r(3,\theta)+u(3,\theta)=\operatorname{sen}^2\theta \end{cases}$

24. Resolver: a) $\begin{cases} u_t-\Delta u=0,\ (x,y)\in(0,\pi)\times(0,\pi),\ t>0 \\ u(x,y,0)=1+\cos x\cos 2y \\ u_x(0,y,t)=u_x(\pi,y,t)=0 \\ u_y(x,0,t)=u_y(x,\pi,t)=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_{tt}-\Delta u=0\,,\ (x,y)\in(0,\pi)\times(0,\pi),\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,y,0)=0\,,\ u_t(x,y,0)=\operatorname{sen}3x\operatorname{sen}^2 2y \\ u(0,y,t)=u(\pi,y,t)=0 \\ u_y(x,0,t)=u_y(x,\pi,t)=0 \end{cases}$

25. Sea una placa circular homogénea de 1 cm de de radio, inicialmente a 0º. Supongamos que en el instante $t=0$ todo su borde se calienta hasta 1º y luego se mantiene a esa temperatura. Hallar las temperaturas en la placa para $t>0$ y la distribución estacionaria hacia la que tienden.