## problemas adicionales 1

**1.** Resolver (si es posible) los siguientes problemas de Cauchy:

a) $u_y+xu_x=-x^2e^{-y}$, $u(-1,y)=0$  
b) $2yu_y-xu_x=u-x^2y$, $u(2,y)=0$  
c) $(y+2x)u_y-xu_x=y$, $u(1,y)=1$  
d) $u_x-u_y=\frac{x-y}{xy}u$, $u(x,1)=x$  
e) $yu_y-(x+1)u_x=u+2x$, $u(1,y)=y$  
f) $2yu_y+xu_x=4yx^2u$, $u(-2,y)=1$  
g) $yu_y+e^{x^2}u_x=2x$, $u(x,0)=0$  
h) $u_y+3y^2u_x=\frac{2u}{y}+6y^4x$, $u(x,1)=x^2$  
i) $xu_y-yu_x=2xyu$, $u(x,0)=x$  
j) $u_y-u_x=2(x+y)u$, $u(x,x)=1$  
k) $(2y-x)u_y+xu_x=2y$, $u(1,y)=0$  
l) $(2x-y)u_y+xu_x=yu$, $u(-1,y)=1$  
m) $3x^2u_y-u_x=4yu$, $u(1,y)=1$  
n) $(3y+3)u_y-xu_x=2xy$, $u(x,0)=0$  
ñ) $u_y-2yu_x=4xy$, $u(x,-1)=2x+1$

**2.** Sea $yu_y+xu_x=2xyu$. Calcular su solución general y la que cumple $u(-1,y)=1$, probando su unicidad. Dar $f(x)$ para que $u(x,x)=f(x)$ lo cumplan i) infinitas soluciones, ii) ninguna solución.

**3.** Sea la ecuación $u_y-u_x=\frac{3}{y}u+2x$ y sean estos datos de Cauchy: i) $u(x,-x)=0$, ii) $u(x,x)=0$. Hallar la única solución que cumple uno de ellos y precisar cuántas soluciones cumplen el otro.

**4.** Sean $(1-y)u_y+xu_x=2x^2y$ y los datos i) $u(x,-1)=x^2$, ii) $u(x,1)=x^2$. Hallar su solución general y la que satisface el dato con solución única, probando su unicidad.

**5.** Hallar la única solución de las EDPs siguientes que satisface uno de los dos datos indicados y dar dos soluciones distintas cumpliendo el otro:

a) $u_y-2yu_x=2yu$, con: i) $u(x,1)=e^{-x}$, ii) $u(-y^2,y)=0$.  
b) $yu_y-xu_x=u+2x$, con: i) $u(x,0)=-x$, ii) $u(x,2)=7x$.  
c) $2(y+1)u_y-xu_x=xy$, con: i) $u(x,-1)=x$, ii) $u(1,y)=1$.

**6.** Sea $(3y-x^2)u_y+xu_x=3u$. Hallar la solución que cumple $u(1,y)=y$, probando su unicidad. Dar dos soluciones distintas que cumplan uno de estos dos datos: i) $u(x,x^2)=0$, ii) $u(x,x^2)=1$.

**7.** Sea $y^2u_y+u_x=2xu$. Hallar su solución general tomando $\eta=x$ y $\eta=y$. Hallar las soluciones (si las hay) que cumplen los datos: i) $u(x,1)=1$, ii) $u(0,y)=y$, iii) $u(x,-\frac{1}{x})=0$, iv) $u(x,-\frac{1}{x})=1$.

**8.** Sea (E) $y^2u_y+x^2u_x=x^2+y^2$. Resolverla con el dato $u(x,1)=x+1$. ¿Es única la solución? Imponer unos datos de Cauchy para los que (E) tenga infinitas soluciones y dar dos de ellas.

**9.** Sea $(2y+x)u_y+xu_x=2y+2x$. Hallar su solución general y la que verifica $u(1,y)=0$. Precisar en qué puntos del plano la recta $y=x-1$ es tangente a las características.

**10.** Resolver $3x^2u_y+u_x=x^5$, $u(x,0)=x^3$, estudiando la unicidad.

**11.** Sea [E] $(y+1)u_y+xu_x=2xyu$. Resolver [E] con el dato $u(1,y)=1$. ¿Es única la solución? Imponer un dato de Cauchy para el que [E] tenga infinitas soluciones y escribir 2 de ellas. ¿En qué puntos es tangente la curva $y=x^2$ a las características de [E]?

**12.** Sea [E] $y^3u_y-u_x=2y^2u-2xy^2$. a] Hallar su solución general tomando i) $\eta=y$, ii) $\eta=x$.
b] Resolver [E] con el dato inicial $u(x,1)=2x$, estudiando la unicidad de la solución.
c] Imponer un dato de Cauchy para el que (E) tenga infinitas soluciones y dar dos de ellas.
d] ¿En qué puntos del plano es tangente la curva $2x=-y^2$ a alguna característica de [E]?

**13.** Hallar la solución de (E) $u_t-2tu_x=2t(x-t^2)u$ con $u(x,1)=1$, tomando i) $\eta=t$, ii) $\eta=x$. Escribir 2 soluciones distintas de (E) válidas en un entorno de origen que cumplan $u(0,t)=0$.

**14.** Precisar para qué valores de $n$ entero positivo el dato de Cauchy $u(x,x^n)=x^n$ determina una única solución de la ecuación $u_x+yu=y^2$ cerca de $(0,0)$.

**15.** Sea (E) $A(x,y,u)u_y+B(x,y,u)u_x=C(x,y,u)$ 'ecuación cuasilineal'. Probar que si las soluciones del sistema de ecuaciones: $\frac{du}{dx}=\frac{C}{B}$, $\frac{dy}{dx}=\frac{A}{B}$ son $\begin{matrix}\eta(x,y,u)=c_1\\ \xi(x,y,u)=c_2\end{matrix}$ [curvas características de (E)], entonces la solución general de (E) es $\eta(x,y,u)=p[\xi(x,y,u)]$ $\big($o $\xi(x,y,u)=q[\eta(x,y,u)]\big)$ con $p$, $q$ arbitrarias. Resolver la cuasilineal: $u_y+uu_x=0$ con: i) $u(x,0)=x$, ii) $u(0,y)=0$.

**16.** i] Resolver $\begin{matrix}v_y+e^{x+y}v_x-v=0\\ v(x,0)=e^{-x}\end{matrix}$. ii] Hallar la solución general de $u_{yy}+e^{x+y}u_{xy}-u_y=0$.

**17.** Reducir a forma canónica, si es necesario, y, si es posible, encontrar la solución general:

a) $u_{yy}-4u_{xy}+4u_{xx}-4u=8$ b) $u_{yy}+2u_{xy}+2u_{xx}=0$ c) $u_{xx}-3yu_x+2y^2u=y$

d) $u_{yy}-2u_{xy}+u_{xx}+u_y-u_x=x+y$ e) $u_{yy}+3u_{xy}+2u_{xx}=e^{x-y}$

**18.** Hallar la solución general de $u_{tt}+2u_{xt}+u_{xx}+u=0$ y la única que cumple $u(x,-x)=0$, $u_t(x,-x)=1$. Escribir una solución, distinta de la $u\equiv 0$, que satisfaga $u(x,x)=u_t(x,x)=0$.

**19.** Resolver por diferentes caminos (encontrando atajos): $\begin{cases}u_{tt}-4u_{xx}=16,\ x,t\in\mathbf{R}\\ u(0,t)=t,\ u_x(0,t)=0\end{cases}$.

**20.** Sea (e) $u_{tt}-u_{xx}+Du_t+Eu_x=4$, con $D$ y $E$ constantes.
a] Escribir (e) en forma canónica. ¿Para qué relaciones entre $D$ y $E$ es esta forma resoluble?
b] Para $D=-2$, $E=2$, hallar la o las soluciones de (e) con los datos: $u(0,t)=e^{2t}$, $u_x(0,t)=2$.

**21.** El potencial $v$ y la intensidad $i$ en una linea telegráfica satisfacen $\begin{matrix}v_x+Li_t+Ri=0\\ i_x+Cv_t+Gv=0\end{matrix}$, $L$, $R$, $C$, $G$ constantes. Hallar la EDP de segundo orden que verifica $v$. Si $GL=RC$, comprobar que un cambio adecuado la reduce a la de ondas y hallar $v(x,t)$ si inicialmente $v(x,0)=V(x)$ e $i(x,0)=I(x)$.

**22.** Estudiar la unicidad de: $\big(D\subset\mathbf{R}^2$ acotado, $k>0\big)$ a) $\begin{cases}\Delta u-k^2u=F \text{ en } D\\ u=f \text{ en } \partial D\end{cases}$, b) $\begin{cases}u_t-k\Delta u=F(x,y,t) \text{ en } D\\ u(x,y,0)=f(x,y) \text{ en } D,\ u(x,y,t)=0 \text{ en } \partial D\end{cases}$.

**23.** Sea $\begin{cases}u_{tt}-4u_{xx}=0,\ x\geq 0,\ t\in\mathbf{R}\\ u(x,0)=\begin{cases}2x-x^2,\ x\in[0,2]\\ 0,\ x\in[2,\infty)\end{cases},\ u_t(x,0)=u(0,t)=0\end{cases}$. i) Hallar $u(1,1)$. ii) Dibujar $u(x,1)$.

**24.** Sea $\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=0,\ x\geq 0,\ t\in\mathbf{R}\\ u(x,0)=\begin{cases}1-\cos x,\ x\in[0,2\pi]\\ 0,\ x\in[2\pi,\infty)\end{cases},\ u_t(x,0)=u(0,t)=0\end{cases}$. a] Dibujar $f^*$ y dar su expresión. b] Hallar $u(2\pi,3\pi)$. c] Dibujar $u(x,3\pi)$.

**25.** Sea $\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=0,\ x\geq 0,\ t\in\mathbf{R}\\ u(x,0)=\begin{cases}\cos\frac{\pi x}{2},\ x\in[1,3]\\ 0,\ x\in[0,1]\cup[3,\infty)\end{cases},\ u_t(x,0)=u(0,t)=0\end{cases}$. a] Hallar $u(1,3)$. b] Dibujar $u(x,2)$.

**26.** Sea $\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=0,\ x\geq 0,\ t\in\mathbf{R}\\ u(x,0)=u(0,t)=0,\ u_t(x,0)=\begin{cases}2x-x^2,\ x\in[0,2]\\ 0,\ x\in[2,\infty)\end{cases}\end{cases}$. a] Dibujar $g^*$ y dar su expresión. b] Hallar: i) $u(3,2)$, ii) $u(1,2)$.

**27.** Sea $\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=0,\ x\geq 0,\ t\in\mathbf{R}\\ u_t(x,0)=\begin{cases}x^3-3x^2,\ x\in[0,3]\\ 0,\ x\in[3,\infty)\end{cases}\\ u(x,0)=u(0,t)=0\end{cases}$. Calcular $u(1,2)$ y $u(1,t)$ para todo $t\geq 4$ y para $t\in[1,2]$.

**28.** Sea $\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=0,\ x\geq 0,\ t\in\mathbf{R}\\ u(x,0)=u(0,t)=0,\ u_t(x,0)=\begin{cases}\operatorname{sen}\pi x,\ 1\leq x\leq 2\\ 0 \text{ en } [0,1]\cup[2,\infty)\end{cases}\end{cases}$. Dibujar $u(x,1)$, $u(x,2)$ y $u(x,3)$.

**29.** Sea $\begin{cases}u_{tt}-4u_{xx}=0,\ x\geq 0,\ t\in\mathbf{R}\\ u(x,0)=u_t(x,0)=0,\ u(0,t)=t\end{cases}$. Hallar $u(2,4)$.

**30.** Sea $\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=0,\ x\geq 0,\ t\in\mathbf{R}\\ u_t(x,0)=\begin{cases}(x-1)^2,\ x\in[0,1]\\ 0,\ x\in[1,\infty)\end{cases}\\ u(x,0)=0,\ u(0,t)=t\end{cases}$. a] Calcular $u(2,1)$ y $u(2,3)$. [La $v$ buena para el cambio es la obvia]. b] Calcular $u(2,t)$ para todo $t\geq 3$.

**31.** Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\geq 0,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=0\,,\ u_t(x,0)=\cos^2 x\,,\ u(0,t)=t \end{cases}$. a] Hallar $u(\pi,2\pi)$. b] Hallar $u(x,2\pi)$ para $x\geq 2\pi$.

**32.** Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\geq 0\,,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=1, u_t(x,0)=0, u(0,t)=\cos t \end{cases}$. a] Hallar $u\big(\frac{\pi}{3},2\pi\big)$. b] Hallar $u(x,\pi)$ para $x\geq\pi$. [ $v=\cos t\cos x$ cumple dato de contorno y ecuación].

**33.** Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\geq 0,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=e^x,\ u_t(x,0)=-x\,,\ u(0,t)=1 \end{cases}$. a] Hallar $u(1,2)$. b] Hallar $u(1,t)$ para $t\geq 0$.

**34.** Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\geq 0\,,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=0\,,\ u_t(x,0)=\begin{cases} x^2-1\,,\ x\in[0,1] \\ 0\,,\ x\in[1,\infty) \end{cases},\ u(0,t)=-t \end{cases}$. a] Hallar $u(2\,,1)$ y $u\big(\frac{3}{2}\,,1\big)$. b] Hallar $u(x\,,1)$ para todo $x\geq 0$.

**35.** Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\geq 0,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=e^{-x},\ u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=e^{-t} \end{cases}$. a] Hallar $u(2,3)$. [Ayuda: una buena $v(x,t)$ sale de separar variables y tomar $\lambda=-1$]. b] Hallar $u(x,t)$, $x,t\geq 0$. c] Dibujar $u(x,3)$.

**36.** Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\in[0,1]\,,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=0\,,\ u(1,t)=\operatorname{sen} t \end{cases}$. Hallar $u\big(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\big)$ y $u\big(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\big)$. [Es útil encontrar una buena $v$].

**37.** Sea $\begin{cases} u_{tt}-9u_{xx}=0\,,\ x\in[0,4]\,,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=\begin{cases} (x-1)(x-2),\ x\in[1,2] \\ 0,\ x\in[0,1]\cup[2,4] \end{cases},\ u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=u(4,t)=0 \end{cases}$. a] Hallar $u\big(\frac{5}{2}\,,\frac{4}{3}\big)$. b] Dibujar $u(x\,,1)$.

**38.** Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\in[0,\pi],t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=\operatorname{sen}^2 x\,,\ u_t(x,0)=u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$. Dibujar la $f^*$, hallar el valor de $u\big(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\big)$ y hallar $u\big(x,\frac{3\pi}{4}\big)$ para $\frac{\pi}{4}\leq x\leq\frac{3\pi}{4}$.

**39.** Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\in[0,4]\,,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=\begin{cases} \operatorname{sen}\pi x,\ 2\leq x\leq 3 \\ 0 \text{ resto de } [0,4] \end{cases},\ u_t(x,0)=u(0,t)=u(4,t)=0 \end{cases}$. i) Dibujar $u(x,1)$, $u(x,2)$ y $u(x,3)$. ii) Dibujar $u(3,t)$, $t\geq 0$.

**40.** Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\in[0,2]\,,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=\begin{cases} x-x^2,\ x\in[0,1] \\ 0\,,\ x\in[1,2] \end{cases},\ u_t(x,0)=u(0,t)=u(2,t)=0 \end{cases}$. a] Hallar $u\big(1,\frac{3}{2}\big)$. b] Dibujar $u\big(x,\frac{3}{2}\big)$. c] Dar la expresión de $u\big(x,\frac{3}{2}\big)$.

**41.** Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\in[0,4\pi]\,,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=\begin{cases} \operatorname{sen}x\,,\ x\in[\pi,2\pi] \\ 0,\ x\in[0,\pi]\cup[2\pi,4\pi] \end{cases} \\ u_t(x,0)=u(0,t)=u(4\pi,t)=0 \end{cases}$. a] Hallar $u\big(\frac{\pi}{2}\,,2\pi\big)$. b] Dibujar y dar la expresión de $u(x\,,2\pi)$. c] Dibujar $u(\pi,t)$ para $t\in[0,8\pi]$.

**42.** Sea $\begin{cases} u_{tt}-\big(u_{rr}+\frac{2}{r}u_r\big)=0\,,\ r\geq 0 \\ u(r,0)=6\,,\ u_t(r,0)=5r^3 \end{cases}$. Hallar $u(2,3)$.

**43.** Sea $\begin{cases} u_{tt}-\big(u_{rr}+\frac{2}{r}u_r\big)=0\,,\ r\geq 0 \\ u(r,0)=\frac{2}{4+r^2}\,,\ u_t(r,0)=0 \end{cases}$. a] Hallar $u(1,5)$ y $u(7,5)$. Hallar $u(0,t)$. b] Dibujar aproximadamente y simplificar $u(r,5)$.

**44.** Sean $\begin{cases} v_{tt}-v_{rr}=0\,,\ r\geq 0,\ t\in\mathbf{R} \\ v(r,0)=\begin{cases} 2r-r^2,\ r\in[0,2] \\ 0 \text{ en el resto} \end{cases}\equiv F(r) \\ v_t(r,0)=v(0,t)=0 \end{cases}$ y $\begin{cases} u_{tt}-u_{rr}-\frac{2}{r}u_r=0\,,\ r\geq 0,\ t\in\mathbf{R} \\ u(r,0)=\begin{cases} 2-r\,,\ r\in[0,2] \\ 0 \text{ en el resto} \end{cases}\equiv f(r) \\ u_t(r,0)=0 \end{cases}$.

a] Hallar $v(6,3)$, $v(2,3)$ y $u(4,3)$. b] Dibujar y hallar la expresión de $v(r,3)$.
c] Hallar el valor máximo de $u(r,3)$ $\big[\sqrt{15}\approx 3.873\big]$.

**45.** Hallar $I(a,x)=\int_0^\infty e^{-ak^2}\cos kx\,dk$ probando que $\frac{dI}{dx}=-\frac{x}{2a}I$ e $I(a,0)=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}$.
Usar lo anterior para calcular $\mathcal{F}^{-1}\big(e^{-ak^2}\big)$ y $\mathcal{F}\big(e^{-ax^2}\big)$.

**46.** Sea $t^2u_t - u_x = tu$. a] Hallar la solución con $u(x,1)=x$ a partir de las características.
b] Resolver con $u(x,1)=f(x)$ utilizando la transformada de Fourier.

**47.** Resolver: a] $\begin{cases} u_t+2tu_x=4tu \\ u(x,1)=f(x) \end{cases}$, b] $\begin{cases} t^2u_t-u_x=g(x) \\ u(x,1)=0 \end{cases}$ por las características y mediante la $\mathcal{F}$.

**48.** Sea $u_t+2u_x=-\frac{1}{t}u$. a] Calcular su solución general y la que satisface $u(x,1)=x$.
b] Hallar con la $\mathcal{F}$ la solución con $u(x,1)=f(x)$ y además: i) Si $f(x)=x$, comprobar que se tiene el resultado de a]. ii) Si $f(x)=\begin{cases} \operatorname{sen}^2\pi x, \ x\in[0,1] \\ 0, \text{ resto de } \mathbf{R} \end{cases}$, dibujar y dar la expresión de $u(x,2)$.

**49.** Sea $t^3u_t+2u_x=2t^2u$. a) Dibujar sus características y hallar la solución que satisface $u(x,1)=x$.
b) Calcular sólo con la $\mathcal{F}$ la que cumple $u(x,1)=f(x)$ y comprobar que devuelve la solución de a).
c) Precisar en qué puntos plantea problemas de unicidad el dato $u(t^2,t)=0$ y dibujar esta curva.

**50.** Resolver utilizando exclusivamente la $\mathcal{F}$ y comprobar el resultado a partir de D'Alembert:

a) $\begin{cases} u_{tt}-4u_{xx}=0, \ x,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=f(x), u_t(x,0)=2f'(x) \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_{tt}-9u_{xx}=0, \ x,t\in\mathbf{R} \\ u(x,1)=f(x), u_t(x,1)=0 \end{cases}$.

**51.** a] Utilizando la $\mathcal{F}$ resolver $\begin{cases} 2u_{tt}+5u_{tx}+2u_{xx}=0 \\ u(x,0)=f(x), u_t(x,0)=0 \end{cases}$. b] Escribir la solución para $f(x)=x^2$.

**52.** Sea $\begin{cases} 9u_{tt}+12u_{tx}+4u_{xx}=0 \\ u(x,0)=0, u_t(x,0)=g(x) \end{cases}$. Resolverlo (mediante la $\mathcal{F}$ o a partir de la forma canónica), deducir la solución si $g(x)=3x$ y comprobar esta solución.

**53.** Resolver, utilizando exclusivamente la transformada de Fourier, los dos problemas:

a) $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, \ x,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=2e^{-x^2}, \ u_t(x,0)=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_t-u_{xx}=0, \ x\in\mathbf{R}, \ t>0 \\ u(x,0)=2e^{-x^2}, \ u \text{ acotada} \end{cases}$

**54.** Resolver utilizando la transformada de Fourier:

a) $\begin{cases} u_t-2u_{xx}+tu=0, x\in\mathbf{R}, t>0 \\ u(x,0)=e^{-x^2/8}, \ u \text{ acotada} \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_t-u_{xx}-2u_x=0, x\in\mathbf{R}, t>0 \\ u(x,0)=e^{-x^2/4}, \ u \text{ acotada} \end{cases}$ c) $\begin{cases} u_t-\frac{1}{t^2}u_{xx}=0, x\in\mathbf{R}, t>1 \\ u(x,1)=e^{-x^2}, \ u \text{ acotada} \end{cases}$

**55.** Resolver i) a partir de su forma canónica, ii) con transformadas de Fourier:

a) $\begin{cases} 4u_{tt}-12u_{tx}+9u_{xx}=0 \\ u(x,0)=0, u_t(x,0)=g(x) \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_{tt}+2u_{tx}+u_{xx}=u \\ u(x,0)=0, u_t(x,0)=g(x) \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_{tt}-u_{xt}+\frac{1}{4}u_{xx}+u_t-\frac{1}{2}u_x=0 \\ u(x,0)=0, \ u_t(x,0)=g(x) \end{cases}$ d) $\begin{cases} u_{tt}+2u_{xt}+u_{xx}-u_t-u_x=0 \\ u(x,0)=f(x), \ u_t(x,0)=0 \end{cases}$

**56.** Resolver (en términos de funciones elementales) $\begin{cases} u_t-u_{xx}-2u_x=0, \ x\in\mathbf{R}, \ t>0 \\ u(x,0)=e^{-x^2/2}, \ u \text{ acotada} \end{cases}$:
a] con la $\mathcal{F}$ directamente, b] con un cambio $u=e^{pt}e^{qx}w$ que lleve a la ecuación del calor.

**57.** Sea (E) $u_t-u_{xx}-2u_x+au=0$. Simplificarla con un cambio de variable adecuado. Hallar la solución de (E) que cumple $u(x,0)=e^{-x^2}$ y analizar su comportamiento cuando $t\to\infty$.

**58.** Resolver extendiendo $f$ de forma adecuada: $\begin{cases} u_t-u_{xx}=0, \ x,t>0 \\ u(x,0)=f(x), \ u_x(0,t)=0, \ u \text{ acotada} \end{cases}$

## problemas adicionales 2

**1.** Estudiar si las siguientes ecuaciones tienen puntos singulares o no y clasificarlos:

$$(2x-x^2)y''+y'-y=0 \qquad x^2y''+2y'+4y=0 \qquad xy''+e^x y'+\cos x\, y=0 \qquad x\operatorname{sen}x\, y''+3y'+xy=0$$

**2.** Resolver $y''+xy=0$ por series en torno a $x=0$.

**3.** Sea $y''+2xy'+2y=0$. Calcular 3 términos no nulos del desarrollo en serie de la solución con $y(0)=1, y'(0)=0$. Hallar su término general e identificarla con una función elemental.

**4.** Sea $(x-1)y''+2xy'+(x+1)y=0$. Comprobar que tiene solución de la forma $e^{ax}$ y hallar la solución con $y(0)=1$, $y'(0)=0$ en términos de funciones elementales. Calcular los 3 primeros términos no nulos del desarrollo en torno a 0 de esta solución directamente por series.

**5.** Sea $(a+4x^2)\,y''+y=0$. a] Si $a=0$ hallar su solución general. b] Si $a=1$ hallar el desarrollo hasta $x^4$ de la solución con $y(0)=2$, $y'(0)=0$. ¿Dónde converge, al menos, la serie solución anterior?

**6.** Sea $3(1+x^2)y''+2xy'=0$. Hallar 3 términos no nulos del desarrollo de una solución no trivial que se anule en $x=0$. Estudiar si todas las soluciones están acotadas cuando $x\to\infty$.

**7.** Hallar una solución no trivial de $2x^2y''-x(3-4x)y'+2(1-3x)y=0$ no analítica en $x=0$, dando la regla de recurrencia. Hallar el desarrollo hasta $\left(x-\frac{1}{4}\right)^2$ de la que cumple $y\left(\frac{1}{4}\right)=0$, $y'\left(\frac{1}{4}\right)=2$.

**8.** Sea $4x^2y''-3y=x^2$. a) Hallar la solución general de la no homogénea. b) Hallar el desarrollo hasta orden 4 en $x=1$ de la solución de la homogénea con $y(1)=0$, $y'(1)=1$.

**9.** Sea $xy''-xy'-y=0$. Hallar una serie solución (no nula) que se anule en $x=0$ e identificarla con una función elemental. En $x=0$: ¿están acotadas todas las soluciones? ¿hay soluciones no analíticas? Hallar el desarrollo hasta $(x+1)^3$ de la solución con $y(-1)=1$, $y'(-1)=0$.

**10.** Sea $x\,y''-(2+x)\,y'=0$. a) Hallar los 4 primeros términos no nulos del desarrollo de una solución que se anule en $x=0$, dando la regla de recurrencia. ¿Están todas las soluciones acotadas en ese punto? b) Hallar los cuatro primeros términos no nulos del desarrollo en torno a $x=1$ de la solución que satisface $y(1)=y'(1)=1$. c) ¿Es su punto del infinito singular regular?

**11.** Sea $3xy''+2y'+4y=0$. Hallar los 4 primeros términos no nulos del desarrollo de una solución que se anule en $x=0$ dando la regla de recurrencia. ¿Para qué $x$ converge la serie?

**12.** Hallar una solución no analítica de $2xy''-(1-2x)y'-5y=0$, $x\geq 0$, dando la regla de recurrencia.

**13.** Sea $2x^2y''+x(3-x)y'-y=0$. Estudiar si la ecuación posee soluciones no triviales analíticas en $x=0$. Calcular una solución no acotada en $x=0$, escribiendo la regla de recurrencia.

**14.** Sea $x^2y''+x(x-3)y'+4y=0$. En $x=0$, escribir 4 términos no nulos del desarrollo de una solución dando la regla de recurrencia, ¿son todas las soluciones analíticas?, ¿están todas acotadas?

**15.** Sea $x^2y''-x(x+5)y'+9y=0$. Dar 3 términos no nulos del desarrollo de una solución analítica en $x=0$. Hallar la regla de recurrencia. ¿Tienden a 0 todas las soluciones cuando $x\to 0$?

**16.** Sea $xy''-2y'+y=0$. Hallar una solución no trivial que se anule en $x=0$, escribiendo la regla de recurrencia, sus 4 primeros términos y la expresión de su término general.

**17.** Dar un valor de $b$ para el que la solución general por series de $xy''+be^{\operatorname{sen}x}y'=0$ en torno a $x=0$ no contenga logaritmos y otro valor para el que sí.

**18.** Hallar una solución no trivial acotada en $x=0$ en términos de funciones elementales. Determinar si todas sus soluciones están o no acotadas en el punto y son o no analíticas:

a) $2x^2y''+x(x+1)y'-(2x+1)y=0$ b) $x^2y''+x^3y'-2\left(1+x^2\right)y=0$

c) $x^2y''+x\left(1-x^2\right)y'+\left(3x^2-1\right)y=0$ d) $x^2y''-4xy'+\left(6-x^2\right)y=0$

e) $2x^2y''+x(3-2x)y'-(1+4x)y=0$ f) $xy''-(1+x)\,y'+y=0$

**19.** Sea $x^2y''+x(1-4x^2)y'+(12x^2-1)y=0$. Hallar una solución no trivial cuyo desarrollo en torno a $x=0$ es un polinomio, dando la regla de recurrencia. ¿Posee soluciones no acotadas en $x=0$?

**20.** Hallar el término general del desarrollo de una solución de $xy''+y=0$ que se anule en $x=0$. Calcular el valor de la constante del término que contiene el $\ln x$ en la segunda solución.

**21.** Hallar la solución general de $x^2y''+x(4-x)y'+2(1-x)y=0$, desarrollando en torno a $x=0$ e identificar las series solución con funciones elementales.

**22.** Sea $xy''+(2x^2-1)y'-4\alpha xy=0$. a] Precisar los $\alpha$ para los que hay polinomios solución que se anulan en $x=0$. b] Para $\alpha=1$, hallar una solución analítica en $x=0$ y determinar si todas las soluciones lo son. c] Para $\alpha=0$, hallar la solución general sin utilizar series.

**23.** Sea $xy''+(1-x^2)y'+pxy=0$. Precisar, resolviendo por series en torno a $x=0$, los valores de $p$ para los que hay soluciones polinómicas y escribir uno de estos polinomios para $p=4$.

**24.** Estudiar trabajando en $x=0$ la existencia de soluciones que sean polinomios de las ecuaciones:

$xy''+(1-x)y'+py=0$ (Laguerre) $\qquad$ $(1-x^2)y''-xy'+p^2y=0$ (Chebyshev)

**25.** Hallar, sin series, una solución linealmente independiente de $P_1$ de la ecuación de Legendre con $p=2$. Comparar su desarrollo con el de la teoría. Hacer $x=1/s$, resolver y comparar.

**26.** Hallar las funciones de Bessel $J_{3/2}$ y $J_{5/2}$.

**27.** Sea $x(x-1)y''+(4x-2)y'+2y=0$. a] Probar que hay una solución analítica en $x=0$ y calcularla. b] Identificar esta solución entre las dos que se obtendrían resolviendo por series en torno a $x=1$. c] Estudiar si todas las soluciones de la ecuación tienden a $0$ cuando $x\to\infty$.

**28.** Sea $x^2(1+x)y''+x(3+2x)y'+y=0$. Hallar, trabajando en $x=0$, una solución no trivial que no contenga el $\ln x$. Probar que todas sus soluciones están acotadas cuando $x\to\infty$.

**29.** Sea $(x^2-1)y''-4xy'+6y=0$. Hallar la solución con $y(0)=-1$, $y'(0)=3$. Utilizando Frobenius, hallar una solución que se anule en $x=1$. ¿Hay soluciones no triviales acotadas para $x\to\infty$?

**30.** Sea $x(1+x)y''-y'=0$. Hallar, con Frobenius, una solución que se anule en $x=0$. Hacer $x=\frac{1}{s}$ y deducir si hay soluciones no acotadas cuando $x\to\infty$. Resolver sin series y comprobar.

**31.** Sea $[x^4+x^2]y''+[5x^3+x]y'+[3x^2-1]y=0$. Escribir la ecuación para su punto del infinito. Probar que posee soluciones no triviales que tienden a $0$ cuando i) $x\to 0$, ii) $x\to\infty$. ¿Existen soluciones que tiendan a $0$ tanto cuando $x\to 0$ como cuando $x\to\infty$?

**32.** Sea $x^4y''+2x^3y'-y=1$. Determinar si $x=0$ y $x=\infty$ son puntos regulares o singulares regulares de la homogénea. Hallar la solución que satisface $y(1)=0, y'(1)=1$.

## problemas adicionales 3

**1.** Sea $\begin{cases} x^2y''-xy'+\lambda y=0 \\ y'(1)=y(3)=0 \end{cases}$. Escribir en forma autoadjunta. Estudiar si i) $\lambda=-3$ y ii) $\lambda=\frac{3}{4}$ son o no autovalores, dando la autofunción en caso afirmativo.

**2.** Sea $\begin{cases} y''-6y'+\lambda y=0 \\ y(0)=y(1)=0 \end{cases}$. Hallar sus autovalores $\lambda_n$ y autofunciones $\{y_n\}$, escribir la ecuación en forma autoadjunta y calcular $\langle y_n, y_n\rangle$.

**3.** Desarrollar $f(x)=|\operatorname{sen}x|$ en serie de senos y cosenos en $[-\pi,\pi]$, dibujando la función a la que tiende la serie y precisando la convergencia puntual y uniforme.

**4.** Sea $f(x)=\begin{cases} \operatorname{sen}x,\ |x|\le\pi/2 \\ 0,\ \pi/2<|x|\le\pi \end{cases}$. Hallar su serie de Fourier en senos y cosenos en $[-\pi,\pi]$. Dibujar la función hacia la que converge y la cuarta suma parcial.
¿Cuál debe ser la suma de la serie si i) $x=\frac{\pi}{4}$, ii) $x=\frac{\pi}{2}$? Comprobarlo para ii).

**5.** Sea (P) $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y'(-\pi)=y'(\pi)=0 \end{cases}$. a] Haciendo $x+\pi=s$, deducir todas sus autofunciones $\{y_n\}$. Calcular directamente las 2 primeras $y_0$ e $y_1$ y comprobar.
b] Hallar el primer término no nulo del desarrollo de $f(x)=x$ en autofunciones de (P).

**6.** Sea $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y'(0)=y(\pi)+4y'(\pi)=0 \end{cases}$. Hallar sus autovalores y autofunciones [$\lambda_1$ e $y_1$ son calculables exactamente].
Calcular el primer término del desarrollo en serie de $f(x)=1$ en las autofunciones anteriores.

**7.** Desarrollar $f(x)=x$ en las autofunciones de los problemas:

a) $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y(0)=y(1)+y'(1)=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y''-2y'+y+\lambda y=0 \\ y(0)=y(1)=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} xy''+2y'+\lambda xy=0 \\ y \text{ acotada en } 0,\, y'(1)=0 \end{cases}$

**8.** Sea $\begin{cases} x^2y''+3xy'+y+\lambda y=0 \\ y(1)=y(e)=0 \end{cases}$.
a] Escribir la ecuación en forma autoadjunta y hallar el peso $r$.
b] Precisar si $\lambda=0$ es autovalor dando la autofunción si lo es.
c] Para $\lambda=\pi^2$, hallar la autofunción $\{y_1\}$ y calcular $\langle y_1, y_1\rangle$.

**9.** Sea $\begin{cases} y''+\lambda y=\cos 3x \\ y'(0)=y'(\frac{\pi}{4})+y(\frac{\pi}{4})=0 \end{cases}$. Hallar el primer término del desarrollo de $f(x)=\cos 3x$ en serie de autofunciones del problema homogéneo.
Precisar para i) $\lambda=0$, ii) $\lambda=1$ cuántas soluciones tiene el problema no homogéneo.

**10.** Sea $(\mathrm{P_f})$ $\begin{cases} x^2y''+\lambda y=x^3-ax^2 \\ y(1)+3y'(1)=y(4)=0 \end{cases}$.
a] Precisar si $\lambda=-2$ es o no autovalor del homogéneo $(\mathrm{P_h})$.
b] Probar que $\lambda=0$ lo es y dar su autofunción $\{y_0\}$.
c] Encontrar, en términos de una tangente, la ecuación que debería resolverse numéricamente para hallar los infinitos $\lambda>1/4$ del $(\mathrm{P_h})$, y escribir las autofunciones.
d] Para $\lambda=0$, calcular el $a$ para el que el no homogéneo $(\mathrm{P_f})$ tiene infinitas soluciones.

**11.** Sea $\begin{cases} y''-4y'+4y+\lambda y=0 \\ y(0)=y(\pi)=0 \end{cases}$. Desarrollar $f(x)=e^{2x}$ en sus autofunciones $\{y_n\}$. Precisar cuántas soluciones tiene $y''-4y'+ay=\pi$ con esos datos si $a=4$ y $a=5$.

**12.** Sea $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y(0)+y'(0)=y(\pi)+y'(\pi)=0 \end{cases}$.
Probar que $\lambda=-1$ es autovalor y dar su autofunción $\{y_{-1}\}$.
Calcular sus $\lambda_n>0$, escribiendo sus autofunciones $\{y_n\}$.
Ver cuántas soluciones de $y''-y=e^{2x}$ cumplen los datos.

**13.** Sea $\begin{cases} y''+4y'+\lambda y=0 \\ y(0)=y'(b)=0,\ b>0 \end{cases}$. Ver si $\lambda=-5$ es o no autovalor y precisar cuántas soluciones de $y''+4y'-5y=5x-4$ cumplen los datos.
Hallar $b$ de modo que $\lambda=4$ sea autovalor y escribir la autofunción correspondiente

**14.** Sea (P) $\begin{cases} y''-y'+\lambda y=0 \\ y(0)=y(\pi)=0 \end{cases}$.
a] Escribir la ecuación en forma autoadjunta y hallar el peso.
b] Determinar si $\lambda=-2$ y $\lambda=\frac{5}{4}$, son o no autovalores de (P).
c] Precisar cuántas soluciones tiene $y''-y'+\lambda y=e^{x/2},\ y(0)=y(\pi)=0$ para $\lambda=-2$ y $\lambda=\frac{5}{4}$.

**15.** Sea $\begin{cases} y''-2y'+\lambda y=0 \\ y'(0)=y'(1)=0 \end{cases}$. Probar que $\lambda=0$ es autovalor y escribir la autofunción $\{y_0\}$ asociada. Estudiar si $\lambda=-3$ y $\lambda=2$ son o no autovalores del problema.
Calcular el coeficiente de $\{y_0\}$ en el desarrollo de $f(x)=e^x$ en serie de autofunciones.
Precisar cuántas soluciones tiene $y''-2y'-3y=3$ con esos mismos datos de contorno.

**16.** Sea $\begin{cases} y''+2y'+\lambda y=0 \\ y(0)+y'(0)=y(1)+y'(1)=0 \end{cases}$. Estudiar si $\lambda=-3$ y $\lambda=1$ son o no autovalores, dando la autofunción en caso afirmativo.
Hallar, si existe, un $a$ para el que $y''+2y'+y=ae^{-2x}-1$ tenga infinitas soluciones con esos datos.

**17**. Sea $\begin{cases} xy''-2y'=2 \\ y(1)+y'(1)=y(2)=0 \end{cases}$. Escribir la ecuación en forma autoadjunta. Precisar cuántas soluciones tiene el problema.

**18.** Sea $\begin{cases} x^2y''-2xy'+\lambda y=0 \\ y'(1)=y(2)=0 \end{cases}$. Determinar si $\lambda=-4$ y $\lambda=2$ son o no autovalores del problema. En caso afirmativo dar su autofunción $\{y_n\}$ y calcular $\langle y_n, y_n\rangle$.
Precisar para ambos valores de $\lambda$ cuántas soluciones tiene $x^2y''-2xy'+\lambda y=4$ con esos datos.

**19.** Sea $\begin{cases} x^2y''-4xy'+\lambda y=0 \\ y'(2)=y(3)=0 \end{cases}$. a] Determinar si $\lambda=0$ y $\lambda=6$ son o no autovalores del problema y en caso afirmativo dar su autofunción $\{y_n\}$ y calcular $\langle y_n, y_n\rangle$.
b] Precisar para ambos $\lambda$ cuántas soluciones tiene $x^2y''-4xy'+\lambda y=4x-9$ con esos mismos datos.

**20.** Sea $\begin{cases} x^2y''+\lambda y=5x^2-3x^3 \\ y(1)=y(2)-y'(2)=0 \end{cases}$. a] Estudiar si $\lambda=0$ y $\lambda=\frac{1}{2}$ son autovalores del homogéneo, escribiendo la autofunción cuando lo sea. $\left[\tan\frac{\ln 2}{2}\approx 0.36\right]$.
b] Precisar ambos casos cuántas soluciones tiene el problema no homogéneo.

**21.** Sea $\begin{cases} x^2y''+\lambda y=0 \\ y(1)+2y'(1)=y(3)=0 \end{cases}$. Determinar si $\lambda=0$ y $\lambda=\frac{1}{4}$ son o no autovalores, escribiendo la autofunción en caso afirmativo.
Precisar en ambos casos cuántas soluciones tiene $x^2y''+\lambda y=x^2-3$ con esos datos. $[\ln 3\approx 1.1]$.

**22.** Discutir cuántas soluciones tiene el problema: $\begin{cases} xy''+2y'=x+c \\ y'(1)=y'(2)=0 \end{cases}$.

**23.** Sea $\begin{cases} \cos x\, y''-2\,\mathrm{sen}\, x\, y'=f(x) \\ y'(-\frac{\pi}{4})=y'(\frac{\pi}{4})-ay(\frac{\pi}{4})=0 \end{cases}$. Encontrar una constante $a$ y una $f(x)$ para las que existan infinitas soluciones.

**24.** Estudiar cuántas soluciones tienen estos problemas (analizando antes los homogéneos):

a) $\begin{cases} y''=e^{x^2} \\ y(0)=y(1)-y'(1)=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y''+y'=2x-1 \\ y'(0)=y'(1)=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y''-y'+\frac{1}{4}y=e^x-1 \\ y'(-2)=y(0)=0 \end{cases}$

**25.** Precisar para los valores de $\lambda$ indicados cuántas soluciones tienen estos problemas:

a) $\begin{cases} y''+y'+\lambda y=1-x \\ y'(0)=y'(2)=0 \end{cases}$ i] $\lambda=-2$ y ii] $\lambda=0$

b) $\begin{cases} x^2y''+\lambda y=3x-4 \\ y(1)+y'(1)=y(2)=0 \end{cases}$ i] $\lambda=-2$ y ii] $\lambda=0$

c) $\begin{cases} x^2y''+xy'+\lambda y=x^2 \\ y(1)=5y(2)-6y'(2)=0 \end{cases}$ i] $\lambda=-1$ y ii] $\lambda=0$

**26.** Para a) $\begin{cases} y''+\lambda y=1 \\ y'(-1)=y(1)=0 \end{cases}$, b) $\begin{cases} y''+\lambda y=x \\ y(0)=y'(1)-y(1)=0 \end{cases}$. Hallar los autovalores y las autofunciones del problema homogéneo. ¿Existen para algún $\lambda$ infinitas soluciones del no homogéneo?

**27.** Precisar cuándo tiene solución o soluciones $\begin{matrix} u''+r^{-1}u'=F(r) \\ u'(1)-au(1)=A,\ u'(2)+bu(2)=B \end{matrix}$, $a,b\geq 0$.
(Se puede interpretar como un problema para Laplace en el plano con simetría radial).

**28.** Estudiar la unicidad de $y''=f(x)$, $x\in(0,1)$ [ecuación de Poisson en una dimensión] con diferentes condiciones separadas, utilizando técnicas similares a las de las EDPs.

**29.** Hallar una fórmula para la solución de un problema de Sturm-Liouville no homogéneo como serie de autofunciones del homogéneo. Escribir, si $\lambda\neq n^2\pi^2$, el desarrollo en autofunciones de la solución de $y''+\lambda y=1$, $y(0)=y(1)=0$. Hallar la solución exacta para $\lambda=0$, desarrollarla y comprobar.

## problemas adicionales 4

**1.** Resolver por separación de variables, estudiando el comportamiento cuando $t\to\infty$ y dando una interpretación física cuando se pueda:

a) $\begin{cases} u_t-u_{xx}=0\,,\ x\in(0,\pi), t>0 \\ u(x,0)=1\,,\ u(0,t)=0, u(\pi,t)=\cos t \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_t-u_{xx}=0\,,\ x\in(0,\pi), t>0 \\ u(x,0)=0\,,\ u(0,t)=1,\ u_x(\pi,t)=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_t-u_{xx}=0\,,\ x\in(0,1)\,,\ t>0 \\ u(x,0)=0\,,\ u_x(0,t)=u_x(1,t)=1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} u_t-u_{xx}+2u=0\,,\ x\in\big(0,\frac{\pi}{2}\big), t>0 \\ u(x,0)=\cos 5x,\ u_x(0,t)=u\big(\frac{\pi}{2},t\big)=0 \end{cases}$

**2.** a] Sea $\begin{cases} y''+\lambda y=x \\ y'(-1)=y'(1)=0 \end{cases}$. Hallar autovalores y autofunciones del homogéneo y precisar si hay para algún $\lambda$ infinitas soluciones del no homogéneo.

b] Resolver: $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\in[-1,1],\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=\cos 2\pi x\,, u_t(x,0)=1\ ;\ u_x(-1,t)=u_x(1,t)=0 \end{cases}$.

**3.** Resolver por separación de variables estos problemas homogéneos:

a) $\begin{cases} u_t-(2+\cos t)\,u_{xx}=0\,,\ x\in\big(0,\frac{\pi}{2}\big), t>0 \\ u(x,0)=1\,,\ u_x(0,t)=u\big(\frac{\pi}{2},t\big)=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_t-u_{xx}+\frac{u}{t+1}=0\,,\ x\in(0,2),\ t>0 \\ u(x,0)=\begin{cases}1,\ 0\le x\le 1\\ 0,\ 1<x\le 2\end{cases}, u_x(0,t)=u_x(2,t)=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_t-u_{xx}+2tu=0\,,\ x\in\big(0,\frac{1}{2}\big),\ t>0 \\ u(x,0)=1-2x, u_x(0,t)=u\big(\frac{1}{2},t\big)=0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} u_t-u_{xx}+2u=0\,,\ x\in(0,1)\,,\ t>0 \\ u(x,0)=2\cos^2\frac{\pi x}{4}, u_x(0,t)=0\,, u(1,t)=e^{-2t} \end{cases}$

e) $\begin{cases} u_t-(1+2t)u_{xx}=0\,,\ x\in(0,\pi), t>0 \\ u(x,0)=0\,,\ u(0,t)=0,\ u_x(\pi,t)=1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} u_t-u_{xx}+2u=0\,,\ x\in(0,1)\,,\ t>0 \\ u(x,0)=x\,, u(0,t)=u(1,t)-u_x(1,t)=0 \end{cases}$

**4.** Resolver por separación de variables:

a) $\begin{cases} u_t-u_{xx}+u=4t\cos x\,,\ x\in(0,\pi), t>0 \\ u(x,0)=1\,, u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_t-u_{xx}=6\,\mathrm{sen}\,6x\cos 3x\,,\ x\in\big(0,\frac{\pi}{2}\big), t>0 \\ u(x,0)=u(0,t)=u_x\big(\frac{\pi}{2},t\big)=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_t-\frac{1}{t}u_{xx}=2\cos x\,,\ x\in\big(0,\frac{\pi}{2}\big),\ t>1 \\ u(x,1)=\cos 3x\,,\ u_x(0,t)=u\big(\frac{\pi}{2},t\big)=0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} u_t-u_{xx}=\mathrm{sen}\,t\,,\ x\in(0,\pi)\,,\ t>0 \\ u(x,0)=\mathrm{sen}^2 x\,,\ u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} u_t-4u_{xx}=0\,,\ x\in(0,\pi)\,,\ t>0 \\ u(x,0)=0\,,\ u_x(0,t)=0\,, u(\pi,t)=8t \end{cases}$ f) $\begin{cases} u_t-2tu_{xx}=\cos t\,,\ x\in(0,\pi)\,, t>0 \\ u(x,0)=\cos 2x,\ u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=0 \end{cases}$

**5.** Sea $\begin{cases} u_t-u_{xx}+3u=0\,,\ x\in\big(0,\frac{\pi}{2}\big),\ t>0 \\ u(x,0)=f(x),\ u_x(0,t)=0, u\big(\frac{\pi}{2},t\big)=e^{-3t} \end{cases}$. Resolverlo para: i) $f(x)=0$, ii) $f(x)=1-\cos x$. [Una $v$ que no estropea la EDP es la clara $v=e^{-3t}$].

**6.** Sea $\begin{cases} u_t-u_{xx}=A\,,\ x\in(0,1)\,,\ t>0 \\ u(x,0)=B\,,\ u_x(0,t)=C,\ u_x(1,t)=D \end{cases}$. Resolverlo y determinar para qué relación entre $A,B,C,D$ constantes hay solución estacionaria.

**7.** Hallar la solución de los siguientes problemas y su límite cuando $t\to\infty$.

a) $\begin{cases} u_t-u_{xx}=0\,,\ x\in(0,1)\,,\ t>0 \\ u(x,0)=0\,, u_x(0,t)=0,\ u(1,t)=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_t-u_{xx}=2\,\mathrm{sen}^2 x\,,\ x\in(0,\pi)\,, t>0 \\ u(x,0)=0,\ u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_t-4u_{xx}=\cos\frac{\pi x}{2},\ x\in(0,1)\,, t>0 \\ u(x,0)=1\,,\ u_x(0,t)=u(1,t)=1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} u_t-u_{xx}=e^{-t}\,,\ x\in(0,\pi),\ t>0 \\ u(x,0)=1-\cos x\,, u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} u_t-u_{xx}=e^{-2t}\cos x\,,\ x\in\big(0,\frac{\pi}{2}\big), t>0 \\ u(x,0)=1\,,\ u_x(0,t)=0, u\big(\frac{\pi}{2},t\big)=1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} u_t-u_{xx}=0\,,\ x\in(0,1),\ t>0 \\ u(x,0)=0\,, u(0,t)+u_x(0,t)=1, u_x(1,t)=0 \end{cases}$

**8.** Resolver $\begin{cases} u_t-\frac{1}{4}u_{xx}=0\,,\ x\in(0,\pi)\,,\ t>0 \\ u(x,0)=1\,, u(0,t)=u(\pi,t)=e^{-t} \end{cases}$, a] ulilizando la $v=e^{-t}$ de los apuntes. b] ulilizando $v=e^{-t}\cos 2x$.

**9.** Resolver y hallar el $\lim\limits_{t\to\infty}u(x,t)$: $\begin{cases} u_t-u_{xx}=0\,,\ x\in(0,1)\,,\ t>0 \\ u(x,0)=0\,,\ u_x(0,t)=0, u_x(1,t)=2e^{-t} \end{cases}$. [Mejor buscar $v=X(x)T(t)$ cumpliendo también la EDP].

**10.** a] Escribir $f(x)=\cos\frac{x}{2}$ en serie de $\{\mathrm{sen}\,nx\}$, dibujando la función hacia la que tiende la serie.

b] Resolver $\begin{cases} u_t-u_{xx}=0\,,\ x\in(0,\pi),\ t>0 \\ u(x,0)=0\,,\ u(0,t)=e^{-t/4}, u(\pi,t)=0 \end{cases}$. [Encontrar una $v$ que cumpla también la EDP].

**11.** Sea $\begin{cases} u_t-8u_{xx}+au=0\,,\ x\in(0,3\pi)\,, t>0 \\ u(x,0)=1\,,\ u(0,t)-4u_x(0,t)=u(3\pi,t)=0 \end{cases}$. Determinar, según la constante $a$, el límite de la solución cuando $t\to\infty$.

**12.** Sea $\begin{cases} u_t-8tu_{xx}=0\,,\ x\in(0,\pi)\,,\ t>0 \\ u(x,0)=f(x)\,,\, u_x(0,t)=u(\pi,t)+4u_x(\pi,t)=0 \end{cases}$. Resolver si i) $f(x)=\cos\frac{x}{4}$ y dar un término si ii) $f(x)=1$. [$X_1$ es calculable exactamente].

**13.** Sea $\begin{cases} u_t-u_{xx}=F(x)\,,\ x\in(-1,1)\,,\ t>0 \\ u(x,0)=0\,,\, u_x(-1,t)=u_x(1,t)=0 \end{cases}$. Probar que $Q(t)=\int_{-1}^{1}u(x,t)\,dx$ es constante si $\int_{-1}^{1}F=0$.
Resolver para: i) $F(x)=\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}$, ii) $F(x)=\operatorname{sen}^2\frac{\pi x}{2}$. ¿Tiene límite $u$ en cada caso cuando $t\to\infty$?

**14.** Resolver $\begin{cases} u_t-2tu_{xx}=0\,,\ x\in(0,3),\ t>0 \\ u(x,0)=0\,,\ u(0,t)=0,\ u_x(3,t)=t^2 \end{cases}$ y demostrar que tiene solución única.

**15.** Sea $\begin{cases} u_t-u_{xx}-2u_x=f(x)\,, x\in(0,\pi), t>0 \\ u(x,0)=f(x)\,, u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$. Resolverlo en general, y si $f(x)=e^{-x}\operatorname{sen}2x$. Probar que tiene solución única

**16.** Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\in[0,1]\,, t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=x(1-x) \\ u_t(x,0)=u(0,t)=u(1,t)=0 \end{cases}$. Hallar con D'Alembert $u\big(\frac{3}{4},\frac{9}{4}\big)$ y $u\big(x,\frac{1}{4}\big)$ $\forall x\in\big[\frac{3}{4},1\big]$. Resolverlo separando variables y ver que el primer término de la serie da $u\big(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\big)\approx\frac{4}{\pi^3}\approx 0.13$.

**17.** Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\in[0,2]\,, t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=u(2,t)=t^2 \end{cases}$. Hallar $u(1,3)$ con D'Alembert y separando variables.
[Ayuda: $v=t^2+x^2-2x$ cumple también la EDP].

**18.** Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\in[0,3]\,, t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=3x-x^2 \\ u(0,t)=u(3,t)=0 \end{cases}$. Hallar $u(1,2)$ utilizando la fórmula de D'Alembert. Resolver por separación de variables y aproximar $u(1,2)$ con el primer término de la serie solución.

**19.** Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\in[0,4\pi]\,, t\in\mathbf{R} \\ u_t(x,0)=\begin{cases}\pi\,, x\in[\pi,3\pi] \\ 0\,, \text{resto de } [0,4\pi]\end{cases} \\ u(x,0)=u(0,t)=u(4\pi,t)=0 \end{cases}$ Hallar con D'Alembert el valor de: i) $u(\pi,4\pi)$, ii) $u(3\pi,3\pi)$. Resolver separando variables y hallar $u(\pi,4\pi)$ con la serie. Aproximar $u(3\pi,3\pi)$ con dos términos $\big[32\sqrt{2}/9\approx 5.03\big]$.

**20.** Sean $g(x)=\begin{cases} x\,,\ 0\le x\le 1/2 \\ 0\,,\ 1/2<x\le 1 \end{cases}$ y (P) $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\in[0,1]\,,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=0, u_t(x,0)=g(x)\,,\ u(0,t)=u(1,t)=0 \end{cases}$.
a] Desarrollar $g$ en serie de $\{\operatorname{sen}n\pi x\}$ y precisar el valor de la suma para: i) $x=\frac{1}{4}$, ii) $x=\frac{1}{2}$.
b] Resolver (P) mediante separación de variables y hallar el valor de $u\big(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\big)$ con D'Alembert.

**21.** Desarrollar $g(x)=\begin{cases} 1\,,\ 0\le x\le\pi/2 \\ 0\,,\ \pi/2<x\le\pi \end{cases}$ en serie de $\{\operatorname{sen}nx\}$. ¿Cuánto suma la serie para $x=\frac{\pi}{2}$?
Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\in[0,\pi]\,, t\in\mathbf{R} \\ u_t(x,0)=g(x)\,,\ u(x,0)=u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$. Hallar $u\big(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\big)$ exactamente con D'Alembert. Separar variables y aproximar el valor con 2 términos de la serie solución $[\,24\sqrt{3}/25\pi\approx 0{,}53\,]$.

**22**. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=F(x)\,,\ x\in[0,\pi]\,,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=u_t(x,0)=u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$. Separando variables calcular la solución cuando $F(x)=\operatorname{sen}x$ y dos términos de la serie si $F(x)=\frac{\pi}{4}$.

**23.** Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=x\,,\ x\in[0,\pi],\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=x\,,\ u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=0\,,\ u(\pi,t)=\pi \end{cases}$ Hallar $u\big(\frac{\pi}{2},\pi\big)$ con D'Alembert y por separación de variables: a) con la $v$ de los apuntes, b) con una $v$ que cumpla la EDP.

**24.** Resolver a) $\begin{cases} u_{tt}-4u_{xx}=0\,, x\in[0,1]\,, t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=1, u_t(x,0)=\operatorname{sen}^2\pi x \\ u_x(0,t)=u_x(1,t)=0 \end{cases}$, b) $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=2\operatorname{sen}x\,, x\in[0,\pi], t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=\operatorname{sen}3x\,,\ u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$ [separar variables y comprobar con D'Alembert].

**25**. Hallar valores de $b$ para los que la solución de $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,, x\in[0,\pi], t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=\operatorname{sen}bt,\ u(\pi,t)=0 \end{cases}$ no esté acotada.

**26.** Resolver a) $\begin{cases} u_{tt}-4u_{xx}=0\,,\ x\in\big[0,\frac{1}{2}\big], t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=t\,, u_x\big(\frac{1}{2},t\big)=0 \end{cases}$, b) $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=t^2\operatorname{sen}x\,,\ x\in\big[0,\frac{\pi}{2}\big], t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=\operatorname{sen}x\,,\ u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=u_x\big(\frac{\pi}{2},t\big)=0 \end{cases}$ (separar variables).

**27**. Sea $tu_{tt}-4t^3u_{xx}-u_t=0$. a] Hacer $\begin{cases} \xi=x+t^2 \\ \eta=x-t^2 \end{cases}$ y deducir la solución con $u(x,1)=x$, $u_t(x,1)=2x$.
b] Separar variables $u=XT$ y ver que esta solución es producto de soluciones asociadas a $\lambda=0$.

**28.** a] Resolver con la $\mathcal{F}$ y haciendo $u=w\,e^{-t}$ el problema $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}+2u_t+u=0\,,\ x,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=f(x),\ u_t(x,0)=0 \end{cases}$.
b] Resolver $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}+2u_t+u=0\,,\ 0<x<1,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=\operatorname{sen}\pi x,\ u_t(x,0)=u(0,t)=u(1,t)=0 \end{cases}$.

**29.** Resolver $\begin{cases}\Delta u=-1\,,\ (x,y)\in(0,\pi)\times(0,\pi)\\ u=0\ \text{ en } x=0, x=\pi, y=0, y=\pi\end{cases}$ a) usando $v(x)$ solución que se anule en 0 y $\pi$. b) directamente por separación de variables.

**30.** Sea $\begin{cases}u_{xx}+u_{yy}-5u=0\ \text{ en } (0,\pi)\times(0,1)\\ u(0,y)=u(\pi,y)=u_y(x,0)=0\,,\ u_y(x,1)=f(x)\end{cases}$. Resolverlo si i) $f(x)=\operatorname{sen}2x$, ii) $f(x)=1$. ¿Es única la solución?

**31.** Resolver el problema $\begin{cases}u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0\,,\ r<2\,,\ 0<\theta<\frac{\pi}{4}\\ u(2,\theta)=f(\theta)\,,\ u(r,0)=u_\theta\big(r,\frac{\pi}{4}\big)=0\end{cases}$ para i) $f(\theta)=8\operatorname{sen}6\theta$, ii) $f(\theta)=\pi$.

**32.** a] Sea $\begin{cases}\Theta''+\lambda\Theta=0\\ \Theta\big(-\frac{\pi}{4}\big)=\Theta\big(\frac{\pi}{4}\big)=0\end{cases}$. i) Probar directamente que $\lambda=4$ es autovalor y dar su autofunción. ii) Haciendo $s=\theta+\frac{\pi}{4}$, hallar todos los $\lambda_n$ y $\{\Theta_n\}$.

b] Sea $\begin{cases}\Delta u=0\,,\ r<1\,,-\pi/4<\theta<\pi/4\\ u_r(1,\theta)=f(\theta)\,,\ u\big(r,-\frac{\pi}{4}\big)=u\big(r,\frac{\pi}{4}\big)=0\end{cases}$. Hallar, separando variables, la solución con: i) $f(\theta)=2\cos2\theta$, ii) $f(\theta)=1$.

**33.** a] Discutir según los valores de $a$ cuántas soluciones $y(r)$ tiene $\begin{cases}r^2y''+ry'-y=r^2\\ y'(1)+ay(1)=y(2)=0\end{cases}$.

b] Resolver este problema plano: $\begin{cases}\Delta u=\operatorname{sen}\theta\,,\ 1<r<2\\ u_r(1,\theta)=u(2,\theta)=0\end{cases}$.

**34.** Resolver estos problemas planos homogéneos

a) $\begin{cases}\Delta u=0\,,\ 1<r<2\\ u(1,\theta)=2\operatorname{sen}^2\theta\,,\ u_r(2,\theta)=0\end{cases}$ b) $\begin{cases}\Delta u=0\,,\ r<4\,,\ 0<\theta<\pi\\ u(4,\theta)=\cos\frac{5\theta}{2}\,,\ u_\theta(r,0)=u(r,\pi)=0\end{cases}$

c) $\begin{cases}\Delta u=0\,,\ r<1\,,\ 0<\theta<\pi\\ u_r(1,\theta)=\theta\,,\ u(r,0)=u_\theta(r,\pi)=0\end{cases}$ d) $\begin{cases}\Delta u=0\,,\ r<1\,,\ 0<\theta<\pi\\ u_r(1,\theta)=\cos\theta\,,\ u(r,0)=u(r,\pi)=0\end{cases}$

e) $\begin{cases}\Delta u=0\,,\ r<1\\ u(1,\theta)=\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\,,\ \theta\in[0,2\pi]\end{cases}$ f) $\begin{cases}\Delta u=0\,,\ r<2\,,\ 0<\theta<\pi/3\\ u_r(2,\theta)=\cos3\theta\,,\ u_\theta(r,0)=u_\theta\big(r,\frac{\pi}{3}\big)=0\end{cases}$

h) $\begin{cases}\Delta u=0\,,\ r<2\\ u(2,\theta)=\begin{cases}3,\ \theta\in(-\pi/2,\pi/2)\\ 1,\ \theta\in(\pi/2,3\pi/2)\end{cases}\end{cases}$ g) $\begin{cases}\Delta u=0\,,\ 1<r<2,\ 0<\theta<\pi/4\\ u(1,\theta)=0,\ u_r(2,\theta)=\operatorname{sen}\theta\\ u(r,0)=u\big(r,\frac{\pi}{4}\big)-u_\theta\big(r,\frac{\pi}{4}\big)=0\end{cases}$ (la solución es exacta)

**35.** Resolver por separación de variables estos problemas planos no homogéneos:

a) $\begin{cases}\Delta u=r\,,\ r<2,\ 0<\theta<\pi\\ u(2,\theta)=3,\ u_\theta(r,0)=u_\theta(r,\pi)=0\end{cases}$ b) $\begin{cases}\Delta u=r^2\cos2\theta,\ 1<r<2\\ u(1,\theta)=u(2,\theta)=0\end{cases}$ c) $\begin{cases}\Delta u=\cos\theta,\ 1<r<2\\ u_r(1,\theta)=0,\ u_r(2,\theta)=\cos2\theta\end{cases}$

d) $\begin{cases}\Delta u=r^4\cos2\theta,\ r<1\,,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\\ u(1,\theta)=3,\ u_\theta(r,0)=u_\theta\big(r,\frac{\pi}{2}\big)=0\end{cases}$ e) $\begin{cases}\Delta u=1\,,\ 1<r<2\\ u(1,\theta)=0,\ u_r(2,\theta)=\operatorname{sen}2\theta\end{cases}$ f) $\begin{cases}\Delta u=r^2\cos3\theta,\ r<2,\ 0<\theta<\frac{\pi}{6}\\ u(2,\theta)=u_\theta(r,0)=u\big(r,\frac{\pi}{6}\big)=0\end{cases}$

g) $\begin{cases}\Delta u=\frac{5}{r^2}\cos\theta,\ 1<r<2\,,\ 0<\theta<\pi\\ u_r(1,\theta)=1\\ u(2,\theta)=u_\theta(r,0)=u_\theta(r,\pi)=0\end{cases}$ h) $\begin{cases}\Delta u=4\,,\ r<1\,,\ 0<\theta<\pi\\ u(1,\theta)=\cos2\theta\\ u_\theta(r,0)=u_\theta(r,\pi)=0\end{cases}$ i) $\begin{cases}\Delta u=r\operatorname{sen}\frac{5\theta}{2}\,,\ r<4\,,\ 0<\theta<\pi\\ u(4,\theta)=u(r,0)=u_\theta(r,\pi)=0\end{cases}$

**36.** Resolver este problema plano para el $a$ que tiene solución: $\begin{cases}\Delta u=\cos^2\theta,\ r<1,\ 0<\theta<\pi\\ u_r(1,\theta)=a\,,\ u_\theta(r,0)=u_\theta(r,\pi)=0\end{cases}$.

**37.** Resolver el problema plano $\begin{cases}\Delta u=\pi\,,\ r<1,\ \theta\in(0,\pi)\\ u(1,\theta)=u(r,0)=u(r,\pi)=0\end{cases}$ y probar que $u\big(\frac{1}{2},\frac{\pi}{2}\big)\le0$.

**38.** Sea $\begin{cases}\Delta u=r\cos^2\theta,\ r<1\\ u(1,\theta)=0\,,\ 0\le\theta<2\pi\end{cases}$. Hallar el valor en el origen de la solución de este problema plano: i) a partir de la serie que se obtiene por separación de variables, ii) con la función de Green de la última página de los apuntes.

**39.** Escribir en cartesianas los armónicos esféricos: $Y_0^0$, $rY_1^0$, $rY_1^1$, $r^2Y_2^0$, $r^2Y_2^1$, $r^2Y_2^2$.

**40.** Resolver los problemas para la ecuación de Laplace en el espacio:

a) $\begin{cases}\Delta u=0\,,\ r<2\\ u(2,\theta)=6\cos2\theta\end{cases}$ b) $\begin{cases}\Delta u=z\,,\ x^2+y^2+z^2<1\\ u=z^3\ \text{ si } x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$ c) $\begin{cases}\Delta u=0\,,\ x^2+y^2+z^2<1\\ u=x^3\ \text{ si } x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$

**41.** Resolver el problema en la semiesfera: $\begin{cases} u_{rr}+\frac{2}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}+\frac{\cos\theta}{r^2\operatorname{sen}\theta}u_\theta=0\,,\ r<1,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2} \\ u_r(1,\theta)=f(\theta)\,,\ u_\theta(r,\pi/2)=0 \end{cases}$

¿Qué debe cumplir $f(\theta)$ para que haya solución? Hallarla si $f(\theta)=\cos^2\theta-a$ para el $a$ que existe.

**42.** Hallar la solución de $\begin{cases} \Delta u+u=0\,,\ r<1,\ \pi/2<\theta<3\pi/2 \\ u(1,\theta)=\operatorname{sen}2\theta\,,\ u\big(r,\frac{\pi}{2}\big)=u\big(r,\frac{3\pi}{2}\big)=0 \end{cases}$ en términos de una $J$ de Bessel.

**43.** Resolver por separación de variables estos problemas en 3 variables:

a) $\begin{cases} u_t-\Delta u=0,\ (x,y)\in(0,\pi)\times(0,\pi),\ t>0 \\ u(x,y,0)=1+\cos x\cos 2y \\ u_x(0,y,t)=u_x(\pi,y,t)=0 \\ u_y(x,0,t)=u_y(x,\pi,t)=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_{tt}-\Delta u=0,\ (x,y)\in(0,\pi)\times(0,\pi),\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,y,0)=\operatorname{sen}^3x\operatorname{sen}y\,,\ u_t(x,y,0)=0 \\ u(0,y,t)=u(\pi,y,t)=0 \\ u(x,0,t)=u(x,\pi,t)=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_t-\Delta u=0,\ 1<r<2,\ 0<z<1,\ t>0 \\ u(r,z,0)=\operatorname{sen}\pi z \\ u(1,z,t)=u(2,z,t)=u(r,0,t)=u(r,1,t)=0 \end{cases}$

**44.** Un cubo homogéneo de lado $\pi$, inicialmente a temperatura constante $T_1$, se sumerge en el instante $t=0$ en un baño que se mantiene a temperatura $T_2$. Hallar la distribución de temperaturas en cualquier tiempo $t>0$.

**45.** Hallar la función de Green y la solución para $f(x)=x$:

a) $\begin{array}{l} y''=f(x) \\ y(0)=y'(1)=0 \end{array}$ b) $\begin{array}{l} x^2y''+xy'-y=f(x) \\ y(1)+y'(1)=y(2)=0 \end{array}$ c) $\begin{array}{l} y''+y'-2y=f(x) \\ y(0)-y'(0)=y(1)=0 \end{array}$

**46.** Calcular para $\lambda=0$ y $\lambda=1$ la solución (si la hay) de $\begin{array}{l} x^2y''-xy'+\lambda y=x^3 \\ y(1)-y'(1)=y(2)-2y'(2)=0 \end{array}$, haciendo uso de la función de Green en el caso de que exista.

**47.** Sea $\begin{array}{l} xy''+2y'+\lambda xy=f(x) \\ y(1)=y(2)=0 \end{array}$. Determinar autovalores y autofunciones del homogéneo. Precisar para qué $n\in\mathbf{N}$ el problema con $\lambda=\pi^2$, $f(x)=\operatorname{sen}n\pi x$ tiene soluciones, hallándolas en ese caso. Si $\lambda=0$, $f(x)=1$, hallar la solución con la función de Green.

**48.** Sea $\begin{array}{l} y''=f(x) \\ y(1)=a, y(2)=b \end{array}$. a) Hallar su solución en términos de la función de Green, la función $f$ y las constantes $a$ y $b$, por el camino utilizado con la $G$ para Laplace $\big[\, v(s)=\frac{1}{2}|s-x|$ satisface $v''=\delta(s-x)$ para $x$ fijo$\big]$.

b) Llegar al resultado con técnicas del capítulo 3. c) Hallar la solución para $f(x)=1$, $a=0$, $b=1$.

**49.** Hallar la función de Green para Laplace en el semiplano $\{(x,y): x\in\mathbf{R}, y>0\}$ y deducir la solución de $\begin{cases} \Delta u=F(x,y),\ x\in\mathbf{R},\ y>0 \\ u(x,0)=f(x),\ u \text{ acotada} \end{cases}$. Resolver este problema para $F\equiv0$ con transformadas de Fourier.

**50.** Sabiendo que $u(1,\theta)=\begin{cases} \operatorname{sen}\theta,\ \theta\in[0,\pi] \\ 0,\ \ \theta\in[\pi,2\pi] \end{cases}$, hallar el potencial $u$ en el punto del plano de coordenadas $r=2$, $\theta=0$, i) con la función de Green adecuada, ii) en función de una serie.

**51.** Escribir, en coordenadas esféricas, la función de Green $G$ para la ecuación de Laplace en la esfera unidad y deducir la expresión, en términos de $G$, $F$ y $f$, de la solución de:

$$\text{(P)}\ \begin{cases} \Delta u=F,\ r<1 \\ u=f \text{ si } r=1 \end{cases}$$

Hallar el valor de la solución de (P) en el origen en caso de que: i) $F=f=1$, ii) $F=z$, $f=z^3$.