

problemas adicionales 1

1. Resolver (si es posible) los siguientes problemas de Cauchy:

- | | | |
|--|--|---|
| a) $u_y + xu_x = -x^2 e^{-y}$
$u(-1, y) = 0$ | b) $2yu_y - xu_x = u - x^2 y$
$u(2, y) = 0$ | c) $(y + 2x)u_y - xu_x = y$
$u(1, y) = 1$ |
| d) $u_x - u_y = \frac{x-y}{xy} u$
$u(x, 1) = x$ | e) $yu_y - (x+1)u_x = u + 2x$
$u(1, y) = y$ | f) $2yu_y + xu_x = 4yx^2 u$
$u(-2, y) = 1$ |
| g) $yu_y + e^{x^2} u_x = 2x$
$u(x, 0) = 0$ | h) $u_y + 3y^2 u_x = \frac{2u}{y} + 6y^4 x$
$u(x, 1) = x^2$ | i) $xu_y - yu_x = 2xyu$
$u(x, 0) = x$ |
| j) $u_y - u_x = 2(x+y)u$
$u(x, x) = 1$ | k) $(2y-x)u_y + xu_x = 2y$
$u(1, y) = 0$ | l) $(2x-y)u_y + xu_x = yu$
$u(-1, y) = 1$ |

2. Sea $yu_y + xu_x = 2xyu$. Calcular su solución general y la que cumple $u(-1, y) = 1$, probando su unicidad. Dar $f(x)$ para que $u(x, x) = f(x)$ lo cumplan i) infinitas soluciones, ii) ninguna solución.

3. Sea la ecuación $u_y - u_x = \frac{3}{y}u + 2x$ y sean estos datos de Cauchy: i) $u(x, -x) = 0$, ii) $u(x, x) = 0$. Hallar la única solución que cumple uno de ellos y precisar cuántas soluciones cumplen el otro.

4. Sean $(1-y)u_y + xu_x = 2x^2 y$ y los datos i) $u(x, -1) = x^2$, ii) $u(x, 1) = x^2$. Hallar su solución general y la que satisface el dato con solución única, probando su unicidad.

5. Resolver $(3y+3)u_y - xu_x = 2xy$ con el dato $u(x, 0) = 0$. ¿Con $u(0, y) = 0$ habría solución única?

6. Hallar la única solución de las EDPs siguientes que satisface uno de los dos datos indicados y dar dos soluciones distintas cumpliendo el otro:

- a) $u_y - 2yu_x = 2yu$, con: i) $u(x, 1) = e^{-x}$, ii) $u(-y^2, y) = 0$.
 b) $yu_y - xu_x = u + 2x$, con: i) $u(x, 0) = -x$, ii) $u(x, 2) = 7x$.
 c) $2(y+1)u_y - xu_x = xy$, con: i) $u(x, -1) = x$, ii) $u(1, y) = 1$.

7. Sea $y^2 u_y + u_x = 2xu$. Hallar su solución general tomando $\eta = x$ y $\eta = y$. Hallar las soluciones (si las hay) que cumplen los datos: i) $u(x, 1) = 1$, ii) $u(0, y) = y$, iii) $u(x, -\frac{1}{x}) = 0$, iv) $u(x, -\frac{1}{x}) = 1$.

8. Sea (E) $y^2 u_y + x^2 u_x = x^2 + y^2$. Resolverla con el dato $u(x, 1) = x + 1$. ¿Es única la solución? Imponer unos datos de Cauchy para los que (E) tenga infinitas soluciones y dar dos de ellas.

9. Sea $(2y+x)u_y + xu_x = 2y + 2x$. Hallar su solución general y la que verifica $u(1, y) = 0$. Precisar en qué puntos del plano la recta $y = x - 1$ es tangente a las características.

10. Sea [E] $(y+1)u_y + xu_x = 2xyu$. Resolver [E] con el dato $u(1, y) = 1$. ¿Es única la solución? Imponer un dato de Cauchy para el que [E] tenga infinitas soluciones y escribir 2 de ellas. ¿En qué puntos es tangente la curva $y = x^2$ a las características de [E]?

11. Sea [E] $y^3 u_y - u_x = 2y^2 u - 2xy^2$. a) Hallar su solución general tomando i) $\eta = y$, ii) $\eta = x$.
 b) Resolver [E] con el dato inicial $u(x, 1) = 2x$, estudiando la unicidad de la solución.
 c) Imponer un dato de Cauchy para el que (E) tenga infinitas soluciones y dar dos de ellas.
 d) ¿En qué puntos del plano es tangente la curva $2x = -y^2$ a alguna característica de [E]?

12. Resolver $3x^2 u_y + u_x = x^5$, $u(x, 0) = x^3$, estudiando la unicidad.

13. Hallar la solución de (E) $u_t - 2tu_x = 2t(x - t^2)u$ con $u(x, 1) = 1$, tomando i) $\eta = t$, ii) $\eta = x$. Escribir 2 soluciones distintas de (E) válidas en un entorno de origen que cumplan $u(0, t) = 0$.

14. Precisar para qué valores de n entero positivo el dato de Cauchy $u(x, x^n) = x^n$ determina una única solución de la ecuación $u_x + yu = y^2$ cerca de $(0, 0)$.

15. Sea (E) $A(x, y, u)u_y + B(x, y, u)u_x = C(x, y, u)$ 'ecuación cuasilineal'. Probar que si las soluciones del sistema de ecuaciones: $\frac{du}{dx} = \frac{C}{B}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{A}{B}$ son $\eta(x, y, u) = c_1$ [curvas características de (E)], entonces $\xi(x, y, u) = c_2$ [curvas características de (E)], entonces $\eta(x, y, u) = p[\xi(x, y, u)]$ (o bien, $\xi(x, y, u) = q[\eta(x, y, u)]$) con p, q arbitrarias es la solución general de (E). Resolver la cuasilineal: $u_y + uu_x = 0$ con: i) $u(x, 0) = x$, ii) $u(0, y) = 0$.

16. i) Resolver $v_y + e^{x+y}v_x - v = 0$, $v(x, 0) = e^{-x}$. ii) Hallar la solución general de $u_{yy} + e^{x+y}u_{xy} - u_y = 0$.
17. Reducir a forma canónica, si es necesario, y, si es posible, encontrar la solución general:
 a) $u_{yy} - 4u_{xy} + 4u_{xx} - 4u = 8$ b) $u_{yy} + 2u_{xy} + 2u_{xx} = 0$ c) $u_{xx} - 3yu_x + 2y^2u = y$
 d) $u_{yy} - 2u_{xy} + u_{xx} + u_y - u_x = x + y$ e) $u_{yy} + 3u_{xy} + 2u_{xx} = e^{x-y}$
18. Sea [E] $u_{tt} + 2u_{xt} + u_{xx} + u = 0$. Hallar su solución general y la única que satisface $u(x, -x) = 0$, $u_t(x, -x) = 1$. Escribir una solución, distinta de la $u \equiv 0$, que cumpla $u(x, x) = u_t(x, x) = 0$.
19. Sea (e) $u_{tt} - u_{xx} + Du_t + Eu_x = 4$, con D y E constantes.
 a) Escribir (e) en forma canónica. ¿Para qué relaciones entre D y E es esta forma resoluble?
 b) Para $D = -2$, $E = 2$, hallar la o las soluciones de (e) con los datos: $u(0, t) = e^{2t}$, $u_x(0, t) = 2$.
20. El potencial v y la intensidad i en una línea telegráfica satisfacen $v_x + Li_t + Ri = 0$, $i_x + Cv_t + Gv = 0$, L, R, C, G constantes. Hallar la EDP de segundo orden que verifica v . Si $GL = RC$, comprobar que un cambio adecuado la reduce a la de ondas y hallar $v(x, t)$ si inicialmente $v(x, 0) = V(x)$ e $i(x, 0) = I(x)$.
21. Estudiar la unicidad de: a) $\begin{cases} \Delta u - k^2 u = F \text{ en } D \\ u = f \text{ en } \partial D \end{cases}$, b) $\begin{cases} u_t - k\Delta u = F(x, y, t) \text{ en } D \\ u(x, y, 0) = f(x, y) \text{ en } D, u(x, y, t) = 0 \text{ en } \partial D \end{cases}$.
 ($D \subset \mathbf{R}^2$ acotado, $k > 0$)
22. Sea $\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = \begin{cases} 2x - x^2, x \in [0, 2] \\ 0, x \in [2, \infty) \end{cases}, u_t(x, 0) = u(0, t) = 0 \end{cases}$. i) Hallar $u(1, 1)$. ii) Dibujar $u(x, 1)$.
23. Sea $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = \begin{cases} 1 - \cos x, x \in [0, 2\pi] \\ 0, x \in [2\pi, \infty) \end{cases}, u_t(x, 0) = u(0, t) = 0 \end{cases}$. a) Dibujar f^* y dar su expresión.
 b) Hallar $u(2\pi, 3\pi)$. c) Dibujar $u(x, 3\pi)$.
24. Sea $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2}, x \in [1, 3] \\ 0, x \in [0, 1] \cup [3, \infty) \end{cases}, u_t(x, 0) = u(0, t) = 0 \end{cases}$. a) Hallar $u(1, 3)$. b) Dibujar $u(x, 2)$.
25. Sea $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = u(0, t) = 0, u_t(x, 0) = \begin{cases} 2x - x^2, x \in [0, 2] \\ 0, x \in [2, \infty) \end{cases} \end{cases}$. a) Dibujar g^* y dar su expresión.
 b) Hallar: i) $u(3, 2)$, ii) $u(1, 2)$.
26. Sea $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = u(0, t) = 0, u_t(x, 0) = \begin{cases} \sin \pi x, 1 \leq x \leq 2 \\ 0 \text{ en } [0, 1] \cup [2, \infty) \end{cases} \end{cases}$. Dibujar $u(x, 1)$, $u(x, 2)$ y $u(x, 3)$.
27. Sea $\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, u(0, t) = t \end{cases}$. Hallar $u(2, 4)$.
28. Sea $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u_t(x, 0) = \begin{cases} (x-1)^2, x \in [0, 1] \\ 0, x \in [1, \infty) \end{cases} \\ u(x, 0) = 0, u(0, t) = t \end{cases}$. a) Calcular $u(2, 1)$ y $u(2, 3)$. [La v buena para el cambio es la obvia].
 b) Calcular $u(2, t)$ para todo $t \geq 3$.
29. Sea $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = \cos^2 x, u(0, t) = t \end{cases}$. a) Hallar $u(\pi, 2\pi)$.
 b) Hallar $u(x, 2\pi)$ para $x \geq 2\pi$.
30. Sea $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = 1, u_t(x, 0) = 0, u(0, t) = \cos t \end{cases}$. a) Hallar $u(\frac{\pi}{3}, 2\pi)$. b) Hallar $u(x, \pi)$ para $x \geq \pi$.
 [$v = \cos t \cos x$ cumple dato de contorno y ecuación].
31. Sea $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = e^x, u_t(x, 0) = -x, u(0, t) = 1 \end{cases}$. a) Hallar $u(1, 2)$.
 b) Hallar $u(1, t)$ para $t \geq 0$.
32. Sea $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = \begin{cases} x^2 - 1, x \in [0, 1] \\ 0, x \in [1, \infty) \end{cases}, u(0, t) = -t \end{cases}$. a) Hallar $u(2, 1)$ y $u(\frac{3}{2}, 1)$.
 b) Hallar $u(x, 1)$ para todo $x \geq 0$.
33. Sea $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = e^{-x}, u_t(x, 0) = 0, u(0, t) = e^{-t} \end{cases}$. a) Hallar $u(2, 3)$. [Ayuda: una buena $v(x, t)$ sale de separar variables y tomar $\lambda = -1$].
 b) Hallar $u(x, t)$, $x, t \geq 0$. c) Dibujar $u(x, 3)$.

34. Sea $\begin{cases} u_{tt}-9u_{xx}=0, x \in [0,4], t \in \mathbf{R} \\ u(x,0)=\begin{cases} (x-1)(x-2), x \in [1,2] \\ 0, x \in [0,1] \cup [2,4] \end{cases}, u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=u(4,t)=0 \end{cases}$. a) Hallar $u(\frac{5}{2}, \frac{4}{3})$. b) Dibujar $u(x,1)$.
35. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, x \in [0,\pi], t \in \mathbf{R} \\ u(x,0)=\text{sen}^2 x, u_t(x,0)=u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$. Dibujar la f^* , hallar el valor de $u(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$ y hallar $u(x, \frac{3\pi}{4})$ para $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$.
36. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, x \in [0,4], t \in \mathbf{R} \\ u(x,0)=\begin{cases} \text{sen} \pi x, 2 \leq x \leq 3 \\ 0 \text{ resto de } [0,4] \end{cases}, u_t(x,0)=u(0,t)=u(4,t)=0 \end{cases}$. i) Dibujar $u(x,1), u(x,2)$ y $u(x,3)$. ii) Dibujar $u(3,t), t \geq 0$.
37. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, x \in [0,2], t \in \mathbf{R} \\ u(x,0)=\begin{cases} x-x^2, x \in [0,1] \\ 0, x \in [1,2] \end{cases}, u_t(x,0)=u(0,t)=u(2,t)=0 \end{cases}$. a) Hallar $u(1, \frac{3}{2})$. b) Dibujar $u(x, \frac{3}{2})$. c) Dar la expresión de $u(x, \frac{3}{2})$.
38. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, x \in [0,4\pi], t \in \mathbf{R} \\ u(x,0)=\begin{cases} \text{sen} x, x \in [\pi, 2\pi] \\ 0, x \in [0,\pi] \cup [2\pi, 4\pi] \end{cases} \\ u_t(x,0)=u(0,t)=u(4\pi,t)=0 \end{cases}$. a) Hallar $u(\frac{\pi}{2}, 2\pi)$. b) Dibujar y dar la expresión de $u(x, 2\pi)$. c) Dibujar $u(\pi, t)$ para $t \in [0, 8\pi]$.
39. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, x \in [0,1], t \in \mathbf{R} \\ u(x,0)=u_t(x,0)=u(0,t)=0, u(1,t)=\text{sen} t \end{cases}$. Hallar $u(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y $u(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.
40. Sea $\begin{cases} u_{tt}-(u_{rr}+\frac{2}{r}u_r)=0, r \geq 0 \\ u(r,0)=6, u_t(r,0)=5r^3 \end{cases}$. Hallar $u(2,3)$.
41. Sea $\begin{cases} u_{tt}-(u_{rr}+\frac{2}{r}u_r)=0, r \geq 0 \\ u(r,0)=\frac{2}{4+r^2}, u_t(r,0)=0 \end{cases}$. a) Hallar $u(1,5)$ y $u(7,5)$. Hallar $u(0,t)$. b) Dibujar aproximadamente y simplificar $u(r,5)$.
42. Sean $\begin{cases} v_{tt}-v_{rr}=0, r \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ v(r,0)=\begin{cases} 2r-r^2, r \in [0,2] \\ 0 \text{ en el resto} \end{cases} \equiv F(r) \\ v_t(r,0)=v(0,t)=0 \end{cases}$ y $\begin{cases} u_{tt}-u_{rr}-\frac{2}{r}u_r=0, r \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(r,0)=\begin{cases} 2-r, r \in [0,2] \\ 0 \text{ en el resto} \end{cases} \equiv f(r) \\ u_t(r,0)=0 \end{cases}$.
a) Hallar $v(6,3), v(2,3)$ y $u(4,3)$. b) Dibujar y hallar la expresión de $v(r,3)$.
c) Hallar el valor máximo de $u(r,3)$ [$\sqrt{15} \approx 3.873$].
43. Hallar $I(a,x)=\int_0^\infty e^{-ak^2} \cos kx dk$ probando que $\frac{dI}{dx}=-\frac{x}{2a}I$ e $I(a,0)=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}$.
Usar lo anterior para calcular $\mathcal{F}^{-1}(e^{-ak^2})$ y $\mathcal{F}(e^{-ax^2})$.
44. Resolver: a) $\begin{cases} u_t+2tu_x=4tu \\ u(x,1)=f(x) \end{cases}$, b) $\begin{cases} t^2u_t-u_x=g(x) \\ u(x,1)=0 \end{cases}$ por las características y mediante la \mathcal{F} .
45. Sea $t^3u_t+2u_x=2t^2u$. a) Dibujar sus características y hallar la solución que satisface $u(x,1)=x$.
b) Calcular sólo con la \mathcal{F} la que cumple $u(x,1)=f(x)$ y comprobar que devuelve la solución de a).
c) Precisar en qué puntos plantea problemas de unicidad el dato $u(t^2, t)=0$ y dibujar esta curva.
46. Sea $t^2u_t-u_x=tu$. a) Hallar la solución con $u(x,1)=x$ a partir de las características.
b) Resolver con $u(x,1)=f(x)$ utilizando la transformada de Fourier.
47. Sea $u_t+2u_x=-\frac{1}{t}u$. a) Calcular su solución general y la que satisface $u(x,1)=x$.
b) Utilizando la \mathcal{F} , hallar la solución con $u(x,1)=f(x)$ y además: i) Si $f(x)=x$, comprobar que se recupera el resultado de a). ii) Si $f(x)=\begin{cases} \text{sen}^2 \pi x, x \in [0,1] \\ 0, \text{ resto de } \mathbf{R} \end{cases}$, dibujar y dar la expresión de $u(x,2)$.
48. Resolver utilizando exclusivamente la \mathcal{F} y comprobar el resultado a partir de D'Alembert:
a) $\begin{cases} u_{tt}-4u_{xx}=0 \\ u(x,0)=f(x), u_t(x,0)=2f'(x) \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_{tt}-9u_{xx}=0, x, t \in \mathbf{R} \\ u(x,1)=f(x), u_t(x,1)=0 \end{cases}$

49. Resolver i) a partir de su forma canónica, ii) con transformadas de Fourier:

$$\text{a) } \begin{cases} 4u_{tt} - 12u_{tx} + 9u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = g(x) \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} u_{tt} + 2u_{tx} + u_{xx} = u \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = g(x) \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} u_{tt} - u_{xt} + \frac{1}{4}u_{xx} + u_t - \frac{1}{2}u_x = 0 \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

50. a) Utilizando la \mathcal{F} resolver $\begin{cases} 2u_{tt} + 5u_{tx} + 2u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$. b) Escribir la solución para $f(x) = x^2$.

51. Sea $\begin{cases} 9u_{tt} + 12u_{tx} + 4u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$. Resolverlo (mediante la \mathcal{F} o a partir de la forma canónica), deducir la solución si $g(x) = 3x$ y comprobar esta solución.

52. Resolver utilizando la transformada de Fourier:

$$\text{a) } \begin{cases} u_t - 2u_{xx} + tu = 0, x \in \mathbf{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = e^{-x^2/8}, u \text{ acotada} \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} u_t - u_{xx} - 2u_x = 0, x \in \mathbf{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = e^{-x^2/4}, u \text{ acotada} \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} u_t - \frac{1}{t^2}u_{xx} = 0, x \in \mathbf{R}, t > 1 \\ u(x, 1) = e^{-x^2}, u \text{ acotada} \end{cases}$$

53. Resolver extendiendo f de forma adecuada: $\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, x, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), u_x(0, t) = 0, u \text{ acotada} \end{cases}$

54. Resolver (en términos de funciones elementales) $\begin{cases} u_t - u_{xx} - 2u_x = 0, x \in \mathbf{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = e^{-x^2/2}, u \text{ acotada} \end{cases}$:

a) con la \mathcal{F} directamente, b) con un cambio $u = e^{pt} e^{qx} w$ que lleve a la ecuación del calor.

55. Sea (E) $u_t - u_{xx} - 2u_x + au = 0$. Simplificarla con un cambio de variable adecuado. Hallar la solución de (E) que cumple $u(x, 0) = e^{-x^2}$ y analizar su comportamiento cuando $t \rightarrow \infty$.

problemas adicionales 2

1. Estudiar si las siguientes ecuaciones tienen puntos singulares o no y clasificarlos:

$$(2x-x^2)y''+y'-y=0 \quad x^2y''+2y'+4y=0 \quad xy''+e^xy'+\cos xy=0 \quad x \operatorname{sen} xy''+3y'+xy=0$$

2. Resolver $y'' + xy = 0$ por series en torno a $x=0$.
3. Sea $(x-1)y''+2xy'+(x+1)y=0$. Comprobar que tiene solución de la forma e^{ax} y hallar la solución con $y(0)=1$, $y'(0)=0$ en términos de funciones elementales. Calcular los 3 primeros términos no nulos del desarrollo en torno a 0 de esta solución directamente por series.
4. Sea $(a+4x^2)y''+y=0$. a) Si $a=0$ hallar su solución general. b) Si $a=1$ hallar el desarrollo hasta x^4 de la solución con $y(0)=2$, $y'(0)=0$. ¿Dónde converge, al menos, la serie solución anterior?
5. Sea $3(1+x^2)y''+2xy'=0$. Hallar 3 términos no nulos del desarrollo de una solución no trivial que se anule en $x=0$. Estudiar si todas las soluciones están acotadas cuando $x \rightarrow \infty$.
6. Sea $4x^2y''-3y=x^2$. a) Hallar la solución general de la no homogénea. b) Hallar el desarrollo hasta orden 4 en $x=1$ de la solución de la homogénea con $y(1)=0$, $y'(1)=1$.
7. Hallar una solución no trivial de $2x^2y''-x(3-4x)y'+2(1-3x)y=0$ no analítica en $x=0$, dando la regla de recurrencia. Hallar el desarrollo hasta $(x-\frac{1}{4})^2$ de la que cumple $y(\frac{1}{4})=0$, $y'(\frac{1}{4})=2$.
8. Sea $xy''-xy'-y=0$. Hallar una serie solución (no nula) que se anule en $x=0$ e identificarla con una función elemental. En $x=0$: ¿están acotadas todas las soluciones? ¿hay soluciones no analíticas? Hallar el desarrollo hasta $(x+1)^3$ de la solución con $y(-1)=1$, $y'(-1)=0$.
9. Sea $xy''-(2+x)y'=0$. a) Hallar los 4 primeros términos no nulos del desarrollo de una solución que se anule en $x=0$, dando la regla de recurrencia. ¿Están todas las soluciones acotadas en ese punto? b) Hallar los cuatro primeros términos no nulos del desarrollo en torno a $x=1$ de la solución que satisface $y(1)=y'(1)=1$. c) ¿Es su punto del infinito singular regular?
10. Sea $3xy''+2y'+4y=0$. Hallar los 4 primeros términos no nulos del desarrollo de una solución que se anule en $x=0$ dando la regla de recurrencia. ¿Para qué x converge la serie?
11. Hallar una solución no analítica de $2xy''-(1-2x)y'-5y=0$, $x \geq 0$, dando la regla de recurrencia.
12. Sea $2x^2y''+x(3-x)y'-y=0$. Estudiar si la ecuación posee soluciones no triviales analíticas en $x=0$. Calcular una solución no acotada en $x=0$, escribiendo la regla de recurrencia.
13. Sea $x^2y''+x(x-3)y'+4y=0$. En $x=0$, escribir 4 términos no nulos del desarrollo de una solución dando la regla de recurrencia, ¿son todas las soluciones analíticas?, ¿están todas acotadas?
14. Sea $x^2y''-x(x+5)y'+9y=0$. Dar 3 términos no nulos del desarrollo de una solución analítica en $x=0$. Hallar la regla de recurrencia. ¿Tienden a 0 todas las soluciones cuando $x \rightarrow 0$?
15. Sea $xy''-2y'+y=0$. Hallar una solución no trivial que se anule en $x=0$, escribiendo la regla de recurrencia, sus 4 primeros términos y la expresión de su término general.
16. Dar un valor de b para el que la solución general por series de $xy''+be^{\operatorname{sen}x}y'=0$ en torno a $x=0$ no contenga logaritmos y otro valor para el que sí.
17. Hallar el término general del desarrollo de una solución de $xy''+y=0$ que se anule en $x=0$. Calcular el valor de la constante del término que contiene el $\ln x$ en la segunda solución.
18. Hallar una solución no trivial acotada en $x=0$ en términos de funciones elementales. Determinar si todas sus soluciones están o no acotadas en el punto y son o no analíticas:

a) $2x^2y''+x(x+1)y'-(2x+1)y=0$

b) $x^2y''+x^3y'-2(1+x^2)y=0$

c) $x^2y''+x(1-x^2)y'+(3x^2-1)y=0$

d) $x^2y''-4xy'+(6-x^2)y=0$

e) $2x^2y''+x(3-2x)y'-(1+4x)y=0$

f) $xy''-(2+x)y=0$

19. Hallar la solución general de $x^2y'' + x(4-x)y' + 2(1-x)y = 0$, desarrollando en torno a $x=0$ e identificar las series solución con funciones elementales.
20. Sea $xy'' + (2x^2-1)y' - 4\alpha xy = 0$. a) Precisar los α para los que hay polinomios solución que se anulan en $x=0$. b) Para $\alpha=1$, hallar una solución analítica en $x=0$ y determinar si todas las soluciones lo son. c) Para $\alpha=0$, hallar la solución general sin utilizar series.
21. Sea $xy'' + (1-x^2)y' + pxy = 0$. Precisar, resolviendo por series en torno a $x=0$, los valores de p para los que hay soluciones polinómicas y escribir uno de estos polinomios para $p=4$.
22. Estudiar trabajando en $x=0$ la existencia de soluciones que sean polinomios de las ecuaciones:
 $xy'' + (1-x)y' + py = 0$ (Laguerre) $(1-x^2)y'' - xy' + p^2y = 0$ (Chebyshev)
23. Hallar, sin series, una solución linealmente independiente de P_1 de la ecuación de Legendre con $p=2$. Comparar su desarrollo con el de la teoría. Hacer $x=1/s$, resolver y comparar.
24. Hallar las funciones de Bessel $J_{3/2}$ y $J_{5/2}$.
25. Sea $x(x-1)y'' + (4x-2)y' + 2y = 0$. a) Probar que hay una solución analítica en $x=0$ y calcularla. b) Identificar esta solución entre las dos que se obtendrían resolviendo por series en torno a $x=1$. c) Estudiar si todas las soluciones de la ecuación tienden a 0 cuando $x \rightarrow \infty$.
26. Sea $x^2(1+x)y'' + x(3+2x)y' + y = 0$. Hallar, trabajando en $x=0$, una solución no trivial que no contenga el $\ln x$. Probar que todas sus soluciones están acotadas cuando $x \rightarrow \infty$.
27. Sea $(x^2-1)y'' - 4xy' + 6y = 0$. Hallar la solución con $y(0)=-1$, $y'(0)=3$. Utilizando Frobenius, hallar una solución que se anule en $x=1$. ¿Hay soluciones no triviales acotadas para $x \rightarrow \infty$?
28. Sea $x(1+x)y'' - y' = 0$. Hallar, con Frobenius, una solución que se anule en $x=0$. Hacer $x=\frac{1}{s}$ y deducir si hay soluciones no acotadas cuando $x \rightarrow \infty$. Resolver sin series y comprobar.
29. Sea $[x^4+x^2]y'' + [5x^3+x]y' + [3x^2-1]y = 0$. Escribir la ecuación para su punto del infinito. Probar que posee soluciones no triviales que tienden a 0 cuando i) $x \rightarrow 0$, ii) $x \rightarrow \infty$. ¿Existen soluciones que tiendan a 0 tanto cuando $x \rightarrow 0$ como cuando $x \rightarrow \infty$?
30. Sea $x^4y'' + 2x^3y' - y = 1$. Determinar si $x=0$ y $x=\infty$ son puntos regulares o singulares regulares de la homogénea. Hallar la solución que satisface $y(1)=0$, $y'(1)=1$.

problemas adicionales 3

- Sea $\begin{cases} x^2 y'' - xy' + \lambda y = 0 \\ y'(1) = y(3) = 0 \end{cases}$. Escribir en forma autoadjunta. Estudiar si i) $\lambda = -3$ y ii) $\lambda = \frac{3}{4}$ son o no autovalores, dando la autofunción en caso afirmativo.
- Sea $\begin{cases} y'' - 6y' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$. Hallar sus autovalores λ_n y autofunciones $\{y_n\}$, escribir la ecuación en forma autoadjunta y calcular $\langle y_n, y_n \rangle$.
- Sea $f(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| \leq \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < |x| \leq \pi \end{cases}$. Hallar su serie de Fourier en senos y cosenos en $[-\pi, \pi]$. Dibujar la función hacia la que converge y la cuarta suma parcial. ¿Cuál debe ser la suma de la serie si i) $x = \frac{\pi}{4}$, ii) $x = \frac{\pi}{2}$? Comprobarlo para ii).
- Sea $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = y(\pi) + 4y'(\pi) = 0 \end{cases}$. Hallar sus autovalores y autofunciones [λ_1 e y_1 son calculables exactamente]. Calcular el primer término del desarrollo en serie de $f(x) = 1$ en las autofunciones anteriores.
- Sea (P) $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(-\pi) = y'(\pi) = 0 \end{cases}$. a) Haciendo $x + \pi = s$, deducir todas sus autofunciones $\{y_n\}$. Calcular directamente las 2 primeras y_0 e y_1 y comprobar. b) Hallar el primer término no nulo del desarrollo de $f(x) = x$ en autofunciones de (P).
- Desarrollar $f(x) = x$ en las autofunciones de los problemas:
 - $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(1) + y'(1) = 0 \end{cases}$
 - $\begin{cases} y'' - 2y' + y + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$
 - $\begin{cases} xy'' + 2y' + \lambda xy = 0 \\ y \text{ acotada en } 0, y'(1) = 0 \end{cases}$
- Sea $\begin{cases} x^2 y'' + 3xy' + y + \lambda y = 0 \\ y(1) = y(e) = 0 \end{cases}$. a) Escribir la ecuación en forma autoadjunta y hallar el peso r . b) Precisar si $\lambda = 0$ es autovalor dando la autofunción si lo es. c) Para $\lambda = \pi^2$, hallar la autofunción $\{y_1\}$ y calcular $\langle y_1, y_1 \rangle$.
- Sea $\begin{cases} y'' + \lambda y = \cos 3x \\ y'(0) = y'(\frac{\pi}{4}) + y(\frac{\pi}{4}) = 0 \end{cases}$. Hallar el primer término del desarrollo de $f(x) = \cos 3x$ en serie de autofunciones del problema homogéneo. Precisar para i) $\lambda = 0$, ii) $\lambda = 1$ cuántas soluciones tiene el problema no homogéneo.
- Sea $\begin{cases} y'' - 4y' + 4y + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$. Desarrollar $f(x) = e^{2x}$ en sus autofunciones $\{y_n\}$. Precisar cuántas soluciones tiene $y'' - 4y' + ay = \pi$ con esos datos si $a = 4$ y $a = 5$.
- Sea $\begin{cases} xy'' - 2y' = 2 \\ y(1) + y'(1) = y(2) = 0 \end{cases}$. Escribir la ecuación en forma autoadjunta. Precisar cuántas soluciones tiene el problema.
- Sea $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) + y'(0) = y(\pi) + y'(\pi) = 0 \end{cases}$. Probar que $\lambda = -1$ es autovalor y dar su autofunción $\{y_{-1}\}$. Calcular sus $\lambda_n > 0$, escribiendo sus autofunciones $\{y_n\}$. Ver cuántas soluciones de $y'' - y = e^{2x}$ cumplen los datos.
- Sea $\begin{cases} y'' + 4y' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y'(b) = 0, b > 0 \end{cases}$. Ver si $\lambda = -5$ es o no autovalor y precisar cuántas soluciones de $y'' + 4y' - 5y = 5x - 4$ cumplen los datos. Hallar b de modo que $\lambda = 4$ sea autovalor y escribir la autofunción correspondiente.
- Sea (P) $\begin{cases} y'' - y' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$. a) Escribir la ecuación en forma autoadjunta y hallar el peso. b) Determinar si $\lambda = -2$ y $\lambda = \frac{5}{4}$, son o no autovalores de (P). c) Precisar cuántas soluciones tiene $y'' - y' + \lambda y = e^{x/2}$, $y(0) = y(\pi) = 0$ para $\lambda = -2$ y $\lambda = \frac{5}{4}$.
- Sea $\begin{cases} x^2 y'' - 4xy' + \lambda y = 0 \\ y'(2) = y(3) = 0 \end{cases}$. a) Determinar si $\lambda = 0$ y $\lambda = 6$ son o no autovalores del problema y en caso afirmativo dar su autofunción $\{y_n\}$ y calcular $\langle y_n, y_n \rangle$. b) Precisar para ambos λ cuántas soluciones tiene $x^2 y'' - 4xy' + \lambda y = 4x - 9$ con esos mismos datos.
- Sea $\begin{cases} x^2 y'' + \lambda y = 5x^2 - 3x^3 \\ y(1) = y(2) - y'(2) = 0 \end{cases}$. a) Estudiar si $\lambda = 0$ y $\lambda = \frac{1}{2}$ son autovalores del homogéneo, escribiendo la autofunción cuando lo sea. [$\tan \frac{\ln 2}{2} \approx 0.36$]. b) Precisar ambos casos cuántas soluciones tiene el problema no homogéneo.

16. Estudiar cuántas soluciones tienen estos problemas (analizando antes los homogéneos):

$$\text{a) } \begin{cases} y'' = e^{x^2} \\ y(0) = y(1) - y'(1) = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} y'' + y' = 2x - 1 \\ y'(0) = y'(1) = 0 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} y'' - y' + \frac{1}{4}y = e^x - 1 \\ y'(-2) = y(0) = 0 \end{cases}$$

17. Precisar para los valores de λ indicados cuántas soluciones tienen estos problemas:

$$\text{a) } \begin{cases} y'' + y' + \lambda y = 1 - x \\ y'(0) = y'(2) = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x^2 y'' + \lambda y = 3x - 4 \\ y(1) + y'(1) = y(2) = 0 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x^2 y'' + xy' + \lambda y = x^2 \\ y(1) = 5y(2) - 6y'(2) = 0 \end{cases}$$

i] $\lambda = -2$ y ii] $\lambda = 0$ i] $\lambda = -2$ y ii] $\lambda = 0$ i] $\lambda = -1$ y ii] $\lambda = 0$

18. Discutir cuántas soluciones tiene el problema: $\begin{cases} xy'' + 2y' = x + c \\ y'(1) = y'(2) = 0 \end{cases}$.

19. Sea $\begin{cases} y'' + 2y' + \lambda y = 0 \\ y(0) + y'(0) = y(1) + y'(1) = 0 \end{cases}$. Estudiar si $\lambda = -3$ y $\lambda = 1$ son o no autovalores, dando la autofunción en caso afirmativo. Hallar, si existe, un a para el que $y'' + 2y' + y = ae^{-2x} - 1$ tenga infinitas soluciones con esos datos.

20. Sea $\begin{cases} x^2 y'' + \lambda y = 0 \\ y(1) + 2y'(1) = y(3) = 0 \end{cases}$. Determinar si $\lambda = 0$ y $\lambda = \frac{1}{4}$ son o no autovalores, escribiendo la autofunción en caso afirmativo. Precisar en ambos casos cuántas soluciones tiene $x^2 y'' + \lambda y = x^2 - 3$ con esos datos. [$\ln 3 \approx 1.1$].

21. Sea $\begin{cases} \cos x y'' - 2 \sin x y' = f(x) \\ y'(-\frac{\pi}{4}) = y'(\frac{\pi}{4}) - ay(\frac{\pi}{4}) = 0 \end{cases}$. Encontrar una constante a y una $f(x)$ para las que existan infinitas soluciones.

22. Para a) $\begin{cases} y'' + \lambda y = 1 \\ y'(-1) = y(1) = 0 \end{cases}$, b) $\begin{cases} y'' + \lambda y = x \\ y(0) = y'(1) - y(1) = 0 \end{cases}$. Hallar los autovalores y las autofunciones del problema homogéneo. ¿Existen para algún λ infinitas soluciones del no homogéneo?

23. Precisar cuándo tiene solución o soluciones $\begin{cases} u'' + r^{-1}u' = F(r) \\ u'(1) - au(1) = A, u'(2) + bu(2) = B \end{cases}$, $a, b \geq 0$. (Se puede interpretar como un problema para Laplace en el plano con simetría radial).

24. Estudiar la unicidad de $y'' = f(x)$, $x \in (0, 1)$ [ecuación de Poisson en una dimensión] con diferentes condiciones separadas, utilizando técnicas similares a las de las EDPs.

25. Hallar una fórmula para la solución de un problema de Sturm-Liouville no homogéneo como serie de autofunciones del homogéneo. Escribir, si $\lambda \neq n^2 \pi^2$, el desarrollo en autofunciones de la solución de $y'' + \lambda y = 1$, $y(0) = y(1) = 0$. Hallar la solución exacta para $\lambda = 0$, desarrollarla y comprobar.

problemas adicionales 4

1. Resolver por separación de variables, estudiando el comportamiento cuando $t \rightarrow \infty$ y dando una interpretación física cuando se pueda:

$$\begin{aligned} \text{a)} & \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = 1, & u(0, t) = 0, u(\pi, t) = \cos t \end{cases} & \text{b)} & \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & u(0, t) = 1, u_x(\pi, t) = 0 \end{cases} \\ \text{c)} & \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & u_x(0, t) = u_x(1, t) = 1 \end{cases} & \text{d)} & \begin{cases} u_t - u_{xx} + 2u = 0, & x \in (0, \frac{\pi}{2}), t > 0 \\ u(x, 0) = \cos 5x, & u_x(0, t) = u(\frac{\pi}{2}, t) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

2. a) Sea $\begin{cases} y'' + \lambda y = x \\ y'(-1) = y'(1) = 0 \end{cases}$ Hallar autovalores y autofunciones del homogéneo y precisar si hay para algún λ infinitas soluciones del no homogéneo.

b) Resolver: $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in [-1, 1], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = \cos 2\pi x, & u_t(x, 0) = 1; u_x(-1, t) = u_x(1, t) = 0 \end{cases}$

3. Resolver por separación de variables estos problemas homogéneos:

$$\begin{aligned} \text{a)} & \begin{cases} u_t - (2 + \cos t)u_{xx} = 0, & x \in (0, \frac{\pi}{2}), t > 0 \\ u(x, 0) = 1, & u_x(0, t) = u(\frac{\pi}{2}, t) = 0 \end{cases} & \text{b)} & \begin{cases} u_t - u_{xx} + \frac{u}{t+1} = 0, & x \in (0, 2), t > 0 \\ u(x, 0) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & 1 < x \leq 2 \end{cases}, & u_x(0, t) = u_x(2, t) = 0 \end{cases} \\ \text{c)} & \begin{cases} u_t - u_{xx} + 2tu = 0, & x \in (0, \frac{1}{2}), t > 0 \\ u(x, 0) = 1 - 2x, & u_x(0, t) = u(\frac{1}{2}, t) = 0 \end{cases} & \text{d)} & \begin{cases} u_t - u_{xx} + 2u = 0, & x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) = 2 \cos^2 \frac{\pi x}{4}, & u_x(0, t) = 0, u(1, t) = e^{-2t} \end{cases} \\ \text{e)} & \begin{cases} u_t - (1 + 2t)u_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & u(0, t) = 0, u_x(\pi, t) = 1 \end{cases} & \text{f)} & \begin{cases} u_t - u_{xx} + 2u = 0, & x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) = x, & u(0, t) = u(1, t) - u_x(1, t) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

4. Resolver por separación de variables:

$$\begin{aligned} \text{a)} & \begin{cases} u_t - u_{xx} + u = 4t \cos x, & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = 1, & u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 \end{cases} & \text{b)} & \begin{cases} u_t - u_{xx} = 6 \sin 6x \cos 3x, & x \in (0, \frac{\pi}{2}), t > 0 \\ u(x, 0) = u(0, t) = u_x(\frac{\pi}{2}, t) = 0 \end{cases} \\ \text{c)} & \begin{cases} u_t - u_{xx} = e^{-2t} \cos x, & x \in (0, \frac{\pi}{2}), t > 0 \\ u(x, 0) = 1, & u_x(0, t) = 0, u(\frac{\pi}{2}, t) = 1 \end{cases} & \text{d)} & \begin{cases} u_t - u_{xx} = \sin t, & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = \sin^2 x, & u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 \end{cases} \\ \text{e)} & \begin{cases} u_t - 4u_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & u_x(0, t) = 0, u(\pi, t) = 8t \end{cases} & \text{f)} & \begin{cases} u_t - 2tu_{xx} = \cos t, & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = \cos 2x, & u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

5. Sea $\begin{cases} u_t - u_{xx} + 3u = 0, & x \in (0, \frac{\pi}{2}), t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & u_x(0, t) = 0, u(\frac{\pi}{2}, t) = e^{-3t} \end{cases}$ Resolverlo para: i) $f(x) = 0$, ii) $f(x) = 1 - \cos x$. [Una v que no estropea la EDP es la clara $v = e^{-3t}$].

6. Sea $\begin{cases} u_t - u_{xx} = A, & x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) = B, & u_x(0, t) = C, u_x(1, t) = D \end{cases}$ Resolverlo y determinar para qué relación entre A, B, C, D constantes hay solución estacionaria.

7. Hallar la solución de los siguientes problemas y su límite cuando $t \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} \text{a)} & \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & u_x(0, t) = 0, u(1, t) = 1 \end{cases} & \text{b)} & \begin{cases} u_t - u_{xx} = \sin^2 x, & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 \end{cases} \\ \text{c)} & \begin{cases} u_t - 4u_{xx} = \cos \frac{\pi x}{2}, & x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) = 1, & u_x(0, t) = u(1, t) = 1 \end{cases} & \text{d)} & \begin{cases} u_t - u_{xx} = e^{-t}, & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = 1 - \cos x, & u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

8. Resolver $\begin{cases} u_t - \frac{1}{4}u_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = 1, & u(0, t) = u(\pi, t) = e^{-t} \end{cases}$ a) utilizando la $v = e^{-t}$ de los apuntes. b) utilizando $v = e^{-t} \cos 2x$.

9. Resolver $\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & u_x(0, t) = 0, u_x(1, t) = 2e^{-t} \end{cases}$ y hallar el $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$.

[Simplifica los cálculos hallar una $v(x, t) = X(x)T(t)$ cumpliendo ecuación y condiciones de contorno].

10. a) Escribir $f(x) = \cos \frac{x}{2}$ en serie de $\{\sin nx\}$, dibujando la función hacia la que tiende la serie.

b) Resolver $\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & u(0, t) = e^{-t/4}, u(\pi, t) = 0 \end{cases}$. [Encontrar una v que cumpla también la EDP].

11. Sea $\begin{cases} u_t - 8tu_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & u_x(0, t) = u(\pi, t) + 4u_x(\pi, t) = 0 \end{cases}$ Resolver si: i) $f(x) = \cos \frac{x}{4}$, ii) $f(x) = 1$. [La X_1 es calculable exactamente].

12. Sea $\begin{cases} u_t - u_{xx} = F(x), & x \in (-1, 1), t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & u_x(-1, t) = u_x(1, t) = 0 \end{cases}$. Ver que $Q(t) = \int_{-1}^1 u(x, t) dx$ es constante si $\int_{-1}^1 F = 0$.

Resolver si: i) $F(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$, ii) $F(x) = \sin^2 \frac{\pi x}{2}$. ¿Tiene límite u en cada caso cuando $t \rightarrow \infty$?

13. Resolver $\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & u(0, t) + u_x(0, t) = 1, u_x(1, t) = 0 \end{cases}$ y comprobar que $u \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} -\infty$.
14. Resolver $\begin{cases} u_t - 2tu_{xx} = 0, & x \in (0, 3), t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & u(0, t) = 0, u_x(3, t) = t^2 \end{cases}$ y demostrar que tiene solución única.
15. Sea $\begin{cases} u_t - u_{xx} - 2u_x = F(x), & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$ Resolverlo en general, y si $F(x) = f(x) = e^{-x} \sin 2x$. Probar que tiene solución única.
16. Sea $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in [0, 3], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = 0, & u_t(x, 0) = 3x - x^2 \\ u(0, t) = u(3, t) = 0 \end{cases}$. Hallar $u(1, 2)$ utilizando la fórmula de D'Alembert. Resolver por separación de variables y aproximar $u(1, 2)$ con el primer término de la serie solución.
17. Sea $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in [0, 4\pi], t \in \mathbf{R} \\ u_t(x, 0) = \begin{cases} \pi, & x \in [\pi, 3\pi] \\ 0, & \text{resto de } [0, 4\pi] \end{cases} \\ u(x, 0) = u(0, t) = u(4\pi, t) = 0 \end{cases}$ Hallar con D'Alembert el valor de i) $u(\pi, 4\pi)$, ii) $u(3\pi, 3\pi)$. Resolverlo por separación de variables y hallar $u(\pi, 4\pi)$ con la serie solución. Aproximar $u(3\pi, 3\pi)$ con los dos primeros términos no nulos de la serie $[32\sqrt{2}/9 \approx 5.03]$.
18. Sean $g(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 0, & 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$ y (P) $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in [0, 1], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = 0, & u_t(x, 0) = g(x), u(0, t) = u(1, t) = 0 \end{cases}$.
- a) Desarrollar g en serie de $\{\sin n\pi x\}$ y precisar el valor de la suma para: i) $x = \frac{1}{4}$, ii) $x = \frac{1}{2}$.
- b) Resolver (P) mediante separación de variables y hallar el valor de $u(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ con D'Alembert.
19. Desarrollar $g(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < x \leq \pi \end{cases}$ en serie de $\{\sin nx\}$. ¿Cuánto suma la serie para $x = \frac{\pi}{2}$?
- Sea $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in [0, \pi], t \in \mathbf{R} \\ u_t(x, 0) = g(x), & u(x, 0) = u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$. Hallar $u(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$ exactamente con D'Alembert. Separar variables y aproximar el valor con 2 términos de la serie solución $[24\sqrt{3}/25\pi \approx 0.53]$.
20. Sea $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = F(x), & x \in [0, \pi], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$. Hallar por separación de variables:
- i) La solución para $F(x) = \sin x$.
- ii) Dos términos no nulos de la serie si $F(x) = \frac{\pi}{4}$.
21. Hallar valores de w para los que la solución de $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in [0, \pi], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = \sin wt, u(\pi, t) = 0 \end{cases}$ no esté acotada.
22. Sea $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in [0, 2], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = u(2, t) = t^2 \end{cases}$. Hallar $u(1, 3)$ con D'Alembert y separando variables. [Ayuda: $v = t^2 + x^2 - 2x$ cumple también la ecuación].
23. Sea $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = x, & x \in [0, \pi], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = x, & u_t(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = 0, & u(\pi, t) = \pi \end{cases}$ Hallar $u(\frac{\pi}{2}, \pi)$ con D'Alembert y por separación de variables:
- a) con la v de los apuntes, b) con una v que cumpla la EDP.
24. Resolver estos problemas por separación de variables y comprobar con D'Alembert:
- a) $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 2 \sin x, & x \in [0, \pi], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = \sin 3x, & u_t(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$
- b) $\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, & x \in [0, 1], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = 1, & u_t(x, 0) = \sin^2 \pi x \\ u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0 \end{cases}$
25. Resolver por separación de variables los problemas:
- a) $\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, & x \in [0, \frac{1}{2}], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = t, & u_x(\frac{1}{2}, t) = 0 \end{cases}$
- b) $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = t^2 \sin x, & x \in [0, \frac{\pi}{2}], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = \sin x, & u_t(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = u_x(\frac{\pi}{2}, t) = 0 \end{cases}$
26. Sea $tu_{tt} - 4t^3u_{xx} - u_t = 0$. a) Escribirla en forma canónica haciendo el cambio $\begin{cases} \xi = x + t^2 \\ \eta = x - t^2 \end{cases}$.
- b) Hallar la solución que satisface: $u(x, 1) = x, u_t(x, 1) = 2x$.
- c) Separar variables $u = XT$ en la ecuación y comprobar que la solución particular de a) aparece como producto de soluciones asociadas a $\lambda = 0$.
27. a) Sea $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + 2u_t + u = 0, & x, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), & u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$ Resolverlo con la \mathcal{F} y haciendo $u = we^{-t}$. Si $f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & x \in [0, 1] \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$ dibujar $u(x, 3)$.
- b) Resolver $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + 2u_t + u = 0, & 0 < x < 1, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = \sin \pi x, & u_t(x, 0) = u(0, t) = u(1, t) = 0 \end{cases}$.

28. Resolver $\begin{cases} \Delta u = -1, (x, y) \in (0, \pi) \times (0, \pi) \\ u = 0 \text{ en } x=0, x=\pi, y=0, y=\pi \end{cases}$ a) usando $v(x)$ solución que se anule en 0 y π .
b) directamente por separación de variables.

29. Sea $\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} - 5u = 0 \text{ en } (0, \pi) \times (0, 1) \\ u(0, y) = u(\pi, y) = u_y(x, 0) = 0, u_y(x, 1) = f(x) \end{cases}$ Resolverlo si i) $f(x) = \sin 2x$, ii) $f(x) = 1$.
¿Es única la solución?

30. Resolver estos problemas planos homogéneos

a) $\begin{cases} \Delta u = 0, 1 < r < 2 \\ u(1, \theta) = 2 \sin^2 \theta, u_r(2, \theta) = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \Delta u = 0, r < 4, 0 < \theta < \pi \\ u(4, \theta) = \cos \frac{5\theta}{2}, u_\theta(r, 0) = u(r, \pi) = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \Delta u = 0, r < 1, 0 < \theta < \pi \\ u_r(1, \theta) = \theta, u(r, 0) = u_\theta(r, \pi) = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \Delta u = 0, r < 1, 0 < \theta < \pi \\ u_r(1, \theta) = \cos \theta, u(r, 0) = u(r, \pi) = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \Delta u = 0, r < 2 \\ u(2, \theta) = \begin{cases} 3, \theta \in (-\pi/2, \pi/2) \\ 1, \theta \in (\pi/2, 3\pi/2) \end{cases} \end{cases}$

f) $\begin{cases} \Delta u = 0, 1 < r < 2, 0 < \theta < \pi/4 \\ u(1, \theta) = 0, u_r(2, \theta) = \sin \theta \\ u(r, 0) = u(r, \frac{\pi}{4}) - u_\theta(r, \frac{\pi}{4}) = 0 \end{cases}$ (la solución es exacta)

31. Resolver por separación de variables estos problemas no homogéneos:

a) $\begin{cases} \Delta u = r^4 \cos 2\theta, r < 1, 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ u(1, \theta) = 3, u_\theta(r, 0) = u_\theta(r, \frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \Delta u = r^2 \cos 2\theta, 1 < r < 2 \\ u(1, \theta) = u(2, \theta) = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \Delta u = r, r < 2, 0 < \theta < \pi \\ u_\theta(r, 0) = u_\theta(r, \pi) = 0, u(2, \theta) = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \Delta u = \cos \theta, 1 < r < 2 \\ u_r(1, \theta) = 0, u_r(2, \theta) = \cos 2\theta \end{cases}$

e) $\begin{cases} \Delta u = \frac{5}{r^2} \cos \theta, 1 < r < 2, 0 < \theta < \pi \\ u_r(1, \theta) = 1, u(2, \theta) = u_\theta(r, 0) = u_\theta(r, \pi) = 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \Delta u = r \sin \frac{5\theta}{2}, r < 4, \theta \in (0, \pi) \\ u(4, \theta) = u(r, 0) = u_\theta(r, \pi) = 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} \Delta u = r^2 \cos 3\theta, r < 2, 0 < \theta < \frac{\pi}{6} \\ u(2, \theta) = u_\theta(r, 0) = u(r, \frac{\pi}{6}) = 0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} \Delta u = 1, 1 < r < 2 \\ u(1, \theta) = 0, u_r(2, \theta) = \sin 2\theta \end{cases}$

32. a) Sea $\begin{cases} \Theta'' + \lambda \Theta = 0 \\ \Theta(-\frac{\pi}{4}) = \Theta(\frac{\pi}{4}) = 0 \end{cases}$ i) Probar directamente que $\lambda = 4$ es autovalor y dar su autofunción.
ii) Haciendo $s = \theta + \frac{\pi}{4}$, hallar todos los λ_n y $\{\Theta_n\}$.

b) Sea $\begin{cases} \Delta u = 0, r < 1, -\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4} \\ u_r(1, \theta) = f(\theta), u(r, -\frac{\pi}{4}) = u(r, \frac{\pi}{4}) = 0 \end{cases}$ Hallar, separando variables, la solución con:
i) $f(\theta) = 2 \cos 2\theta$, ii) $f(\theta) = 1$.

33. a) Discutir cuántas soluciones $y(r)$ tiene $\begin{cases} r^2 y'' + r y' - y = r^2 \\ y'(1) + a y(1) = y(2) = 0 \end{cases}$.

b) Resolver el problema plano: $\begin{cases} \Delta u = \sin \theta, 1 < r < 2 \\ u_r(1, \theta) = u(2, \theta) = 0 \end{cases}$.

34. Resolver estos problemas planos para los α para los que existan soluciones:

a) $\begin{cases} \Delta u = 0, r < 2, 0 < \theta < \frac{\pi}{3} \\ u_r(2, \theta) = \alpha + \cos 3\theta, u_\theta(r, 0) = u_\theta(r, \frac{\pi}{3}) = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \Delta u = \cos^2 \theta, r < 1, 0 < \theta < \pi \\ u_r(1, \theta) = \alpha, u_\theta(r, 0) = u_\theta(r, \pi) = 0 \end{cases}$

35. Sean $(P_\alpha) \begin{cases} \Delta u = 0, r < 1, 0 < \theta < \alpha \\ u(1, \theta) = \sin \frac{\pi \theta}{\alpha}, u(r, 0) = u(r, \alpha) = 0 \end{cases}$ y $(P) \begin{cases} \Delta u = 0, r < 1 \\ u(1, \theta) = \sin \frac{\theta}{2}, \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$.

Comparar la solución de (P) con las de (P_α) si $\alpha \rightarrow 2\pi$.

Hallar cotas superiores e inferiores para todas las soluciones.

36. Resolver el problema plano $\begin{cases} \Delta u = \pi, r < 1, \theta \in (0, \pi) \\ u(r, 0) = u(r, \pi) = u(1, \theta) = 0 \end{cases}$ y probar que $u(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}) \leq 0$.

37. Hallar la solución de $\begin{cases} \Delta u + u = 0, r < 1, \pi/2 < \theta < 3\pi/2 \\ u(1, \theta) = \sin 2\theta, u(r, \frac{\pi}{2}) = u(r, \frac{3\pi}{2}) = 0 \end{cases}$ en términos de una J de Bessel.

38. Sea $\begin{cases} \Delta u = r \cos^2 \theta, r < 1 \\ u(1, \theta) = 0, 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases}$ Hallar el valor en el origen de la solución de este problema plano:
i) a partir de la serie que se obtiene por separación de variables,
ii) con la función de Green de la última página de los apuntes.

39. Resolver los problemas para la ecuación de Laplace en el espacio:

a) $\begin{cases} \Delta u = 0, r < 2 \\ u(2, \theta) = 6 \cos 2\theta \end{cases}$

b) $\begin{cases} \Delta u = 0, x^2 + y^2 + z^2 < 1 \\ u = x^3 \text{ si } x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \Delta u = z, x^2 + y^2 + z^2 < 1 \\ u = z^3 \text{ si } x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$

40. Resolver el problema en la semiesfera:
$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}u_\theta = 0, & r < 1, 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ u_r(1, \theta) = f(\theta), & u_\theta(r, \pi/2) = 0 \end{cases}$$

¿Qué condición debe cumplir $f(\theta)$ para que exista solución?

Hallar la solución si $f(\theta) = \cos^2\theta - \alpha$ para el único α para el que existe.

41. Escribir en cartesianas los armónicos esféricos: $Y_0^0, rY_1^0, rY_1^1, r^2Y_2^0, r^2Y_2^1, r^2Y_2^2$.

42. Resolver por separación de variables estos problemas en 3 variables:

a)
$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & (x, y) \in (0, \pi) \times (0, \pi), t \in \mathbf{R} \\ u(x, y, 0) = \sin^3 x \sin y, & u_t(x, y, 0) = 0 \\ u(0, y, t) = u(\pi, y, t) = 0 \\ u(x, 0, t) = u(x, \pi, t) = 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & 1 < r < 2, 0 < z < 1, t > 0 \\ u(r, z, 0) = \sin \pi z \\ u(1, z, t) = u(2, z, t) = 0 \\ u(r, 0, t) = u(r, 1, t) = 0 \end{cases}$$

43. Un cubo homogéneo de lado π , inicialmente a temperatura constante T_1 , se sumerge en el instante $t=0$ en un baño que se mantiene a temperatura T_2 . Hallar la distribución de temperaturas en cualquier tiempo $t > 0$.

44. Hallar la función de Green y la solución para $f(x)=x$:

a)
$$\begin{cases} y'' = f(x) \\ y(0) = y'(1) = 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x^2 y'' + xy' - y = f(x) \\ y(1) + y'(1) = y(2) = 0 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = f(x) \\ y(0) - y'(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

45. Calcular para $\lambda=0$ y $\lambda=1$ la solución (si la hay) de $x^2 y'' - xy' + \lambda y = x^3$, $y(1) - y'(1) = y(2) - 2y'(2) = 0$, haciendo uso de la función de Green en el caso de que exista.

46. Sea $xy'' + 2y' + \lambda xy = f(x)$, $y(1) = y(2) = 0$. Determinar autovalores y autofunciones del homogéneo.

Precisar para qué $n \in \mathbf{N}$ el problema con $\lambda = \pi^2$, $f(x) = \sin n\pi x$ tiene soluciones, hallándolas en ese caso. Si $\lambda=0$, $f(x)=1$, hallar la solución con la función de Green.

47. Sea $y'' = f(x)$, $y(1)=a, y(2)=b$.

a) Hallar su solución en términos de la función de Green, la función f y las constantes a y b , por el camino utilizado en el cálculo de la G para Laplace [$v(s) = \frac{1}{2}|s-x|$ satisface $v'' = \delta(s-x)$ para x fijo].

b) Llegar al resultado con técnicas del capítulo 3. c) Hallar la solución si $f(x)=1, a=0, b=1$.

48. Hallar la función de Green para Laplace en el semiplano $\{(x, y): x \in \mathbf{R}, y > 0\}$ y deducir la solución de $\begin{cases} \Delta u = F(x, y), & x \in \mathbf{R}, y > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & u \text{ acotada} \end{cases}$. Resolver este problema para $F \equiv 0$ con transformadas de Fourier.

49. Sabiendo que $u(1, \theta) = \begin{cases} \sin \theta, & \theta \in [0, \pi] \\ 0, & \theta \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$, hallar el potencial u en el punto del plano de coordenadas $r=2, \theta=0$, i) con la función de Green adecuada, ii) en función de una serie.

50. Escribir, en coordenadas esféricas, la función de Green G para la ecuación de Laplace en la esfera unidad y deducir la expresión, en términos de G, F y f , de la solución de:

(P)
$$\begin{cases} \Delta u = F, & r < 1 \\ u = f & \text{si } r = 1 \end{cases}$$

Hallar el valor de la solución de (P) en el origen en caso de que: i) $F=f=1$, ii) $F=z, f=z^3$.