Soluciones del control 1 de Métodos II - A (22-2-23)

Elegir uno de los dos apartados op] (de los problemas 2 y 3).

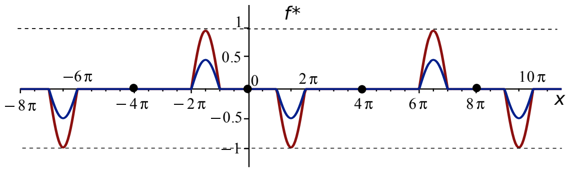
1. Escribir en forma canónica y calcular la solución general de $u_{yy}+3u_{xy}+2u_{xx}=e^{x-y}$. [0.8 ptos]

$B^2-4AC=1$ hiperbólica $\begin{cases}\xi=x-y\\ \eta=x-2y\end{cases}$, $\begin{cases}u_x=u_\xi+u_\eta\\ u_y=-u_\xi-2u_\eta\end{cases}$, $\begin{cases}u_{xx}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\\ u_{xy}=-u_{\xi\xi}-3u_{\xi\eta}-2u_{\eta\eta}\\ u_{yy}=u_{\xi\xi}+4u_{\xi\eta}+4u_{\eta\eta}\end{cases}$ $\to -u_{\xi\eta}=e^{\xi}$, $\boxed{u_{\xi\eta}=-e^{\xi}}$ forma canónica.

$u_\xi=p^*(\xi)-\eta\, e^{\xi}$, $u(\xi,\eta)=p(\xi)+q(\eta)-\eta\, e^{\xi}$, $\boxed{u(x,y)=p(x-y)+q(x-2y)+(2y-x)\,e^{x-y}}$.

2. Sea $\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=0,\ x\in[0,4\pi],\ t\in\mathbf{R}\\ u(x,0)=\begin{cases}\operatorname{sen}x,\ x\in[\pi,2\pi]\\ 0,\ x\in[0,\pi]\cup[2\pi,4\pi]\end{cases}\\ u_t(x,0)=u(0,t)=u(4\pi,t)=0\end{cases}$. **a]** Hallar $u\big(\frac{\pi}{2},2\pi\big)$. **b]** Dibujar y dar la expresión de $u(x,2\pi)$. [1 pto] **op]** Dibujar $u(\pi,t)$ para $t\in[0,8\pi]$. [0.5 ptos]

Extendemos a f^* **impar y** 8π**-periódica** definida en todo $\mathbf{R}$:

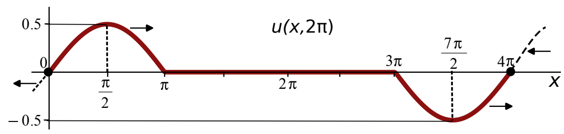


a] $u\big(\frac{\pi}{2},2\pi\big)=\frac{1}{2}\big[f^*\big(\frac{5\pi}{2}\big)+f^*\big(-\frac{3\pi}{2}\big)\big]=-\frac{1}{2}\operatorname{sen}\big(\frac{3\pi}{2}\big)=\boxed{\frac{1}{2}}$.

b] $u(x,2\pi)=\frac{1}{2}\big[f^*(x+2\pi)+f^*(x-2\pi)\big]$. Hay que trasladar 2π la gráfica de $\frac{1}{2}f^*$ a izquierda y derecha unidades y sumar:

[Aparecen la onda que va hacia la derecha (a punto de reflejarse) y la ya reflejada de la que iba a la izquierda].

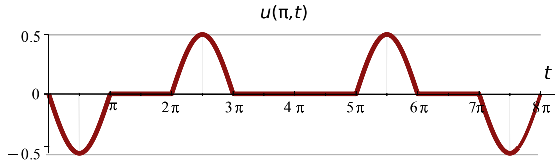
En la f^* todos las zonas no nulas vienen dadas por $\operatorname{sen}x$, que lo siguen siendo al evaluarlos en $(x+2\pi)$ y $(x-2\pi)$.



$$u(x,2\pi)=\begin{cases}\frac{1}{2}\operatorname{sen}x,\ x\in[0,\pi]\cup[3\pi,4\pi]\\ 0,\ x\in[\pi,3\pi]\end{cases}.$$

op] $u(\pi,t)=\frac{1}{2}\big[f^*(\pi+t)+f^*(\pi-t)\big]=\frac{1}{2}\big[f^*(t+\pi)-f^*(t-\pi)\big]$.

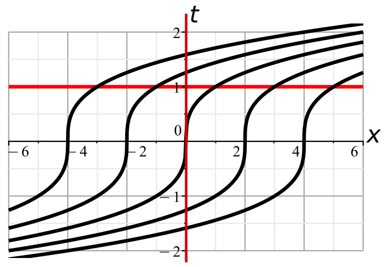
Sumando las $f^*/2$ y $-f^*/2$ trasladadas se tiene el dibujo.
A patir de ese instante $t=8\pi$ se repetirá periódicamente.



3. **a]** Resolver $\begin{cases}u_t+3t^2u_x=(3t^2+1)\,u\\ u(x,1)=f(x)\end{cases}$. i) a partir de las características, ii) mediante la $\mathcal{F}$. Deducir la solución para $f(x)=e^x$ y comprobarla. [2 ptos]

op] Estudiar la tangencia a las características y la unicidad para **a]** y para el dato $u(0,t)=0$. [0.5 ptos]

a] i) $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{3t^2}$. $t^3+C=x$, $x-t^3=C$ características. $x=t^3$ trasladada $\longleftrightarrow$



Conviene $\begin{cases}\xi=x-t^3\\ \eta=t\end{cases}$, $\begin{cases}u_t=-3t^2u_\xi+u_\eta\\ u_x=u_\xi\end{cases}$, $u_\eta=(3\eta^2+1)u$,

$u=p(\xi)\,e^{\eta^3+\eta}$, $\boxed{u(x,t)=p\big(x-t^3\big)\,e^{t^3+t}}$ solución general

$\Big[$Peor: $\begin{cases}\xi=x-t^3\\ \eta=x\end{cases}$, $u_\eta=\big(1+\frac{1}{3}(\eta-\xi)^{-2/3}\big)u \to u=q(\xi)\,e^{\eta+(\eta-\xi)^{1/3}}=q\big(x-t^3\big)\,e^{x+t}\Big]$.

$u(x,1)=p(x-1)e^2=f(x)$, $p(v)=f(v+1)e^{-2}$, $\boxed{u=f\big(x-t^3+1\big)\,e^{t^3+t-2}}$.

ii) $\begin{cases}\hat{u}_t=\big(3t^2\mathrm{i}\,k+3t^2+1\big)\hat{u}\\ \hat{u}(k,1)=\hat{f}(k)\end{cases}$ $\to \hat{u}(k,t)=p(k)\,e^{t^3\mathrm{i}\,k+t^3+t}\xrightarrow{c.i.}p(k)\,e^{\mathrm{i}\,k+2}=\hat{f}(k)$, $\hat{u}(k,t)=e^{t^3+t-2}\hat{f}(k)\,e^{\mathrm{i}\,k(t^3-1)}$.

Como $\mathcal{F}^{-1}\big[\hat{f}(k)\,e^{\mathrm{i}\,ka}\big]=f(x-a)$ es $\boxed{u(x,t)=e^{t^3+t-2}f\big(x-t^3+1\big)}$, como arriba.

Si $f(x)=x$ la solución pasa a ser: $\boxed{u=e^{x+t-1}}$. La comprobamos: $e^{\cdots}+3t^2e^{\cdots}=(3t^2+1)e^{\cdots}$ y también se cumple el dato: $u(x,1)=e^x$.

op] El dato inicial dará claramente **solución única** (lo prueba el dibujo o la $T(x)=1\cdot 1-0\cdot 3\equiv 1$).

La recta $(g,h)=(0,t)$ se ve que será tangente a las características en el origen. También lo da la T:

$T(t)=g'A(g,h)-h'B(g,h)=0\cdot 1-1\cdot(3t^2)=0$, si $t=0$. Tangencia en el punto $\boxed{(0,0)}$.

Imponemos el dato: $u(0,t)=p\big(-t^3\big)=0$ determina $p(v)=0$ para todos los v, positivos y negativos.
Hay **unicidad a pesar de la tangencia**. La única solución con ese dato es la $u\equiv 0$.

Soluciones del control 1 de Métodos II - C (22-2-23)

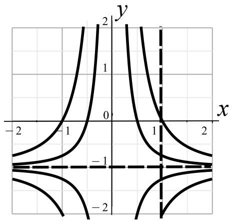
Elegir uno de los dos apartados op] (de los problemas 2 y 3).

1. Sean (E) $2(y+1)u_y - xu_x = xy$ y los datos: i) $u(x,-1)=x$, ii) $u(1,y)=1$. [1 pto]
Hallar la única solución que cumple uno de ellos y dos distintas que cumplan el otro.

$\frac{dy}{dx}=-\frac{2(y+1)}{x}$. Separable o lineal con $y_p=-1$ clara, $e^{\int a}=e^{-2\ln x} \to y=\frac{C}{x^2}-1$. $\boxed{x^2(y+1)=C}$ características.

Con $\begin{cases}\xi=x^2(y+1)\\ \eta=x\end{cases} \to \begin{cases}u_y=x^2u_\xi\\ u_x=2x(y+1)u_\xi+u_\eta\end{cases}$, $-xu_\eta=xy$, $u_\eta=1-\frac{\xi}{\eta^2}$. $u=p(\xi)+\eta+\frac{\xi}{\eta}=\boxed{p\big(x^2(y+1)\big)+xy+2x}$.

(Mucho más largo con $\eta=y$).



Las carácterísticas muestran que habrá solución única de ii) e infinitas o ninguna de i).

Nos dan la misma información $T(x)=1\cdot 0-0\cdot(-x)\equiv 0$ y $T(y)=0-1\cdot(-1)=1\neq 0$, $\forall y$.

Con los datos:
ii) $u(1,y)=p(y+1)+y+2=1 \to p(v)=-v$, $\boxed{u(x,y)=x(2-x+y-xy)}$.
i) $u(x,-1)=p(0)+x=x$, $p(0)=0$. Infinitas $p\in C^1$ pasan por el origen.

Dos soluciones cumpliendo i) son, por ejemplo, la solución de ii) y la más sencilla $\boxed{v=xy+2x}$ ($p\equiv 0$).

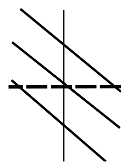
Comprobamos todo: $u(1,y)=1$, $u(x,-1)=x$, y además: $2(y+1)x(1-x)-x(2-2x+y-2xy)=xy$.
$v(x,-1)=x$, y además: $2(y+1)x-x(y+2)=xy$.

2. a] Escribir en forma canónica y calcular la solución general de $u_{yy}-2u_{xy}+u_{xx}+u=x+y$. [0.9 ptos]
op] Hallar la solución que cumple $u(x,0)=x$, $u_y(x,0)=0$ y comprobarla. [0.5 ptos]

$B^2-4AC=0$ parabólica, $\begin{cases}\xi=x+y\\ \eta=y\end{cases} \to \begin{cases}u_y=u_\xi+u_\eta\\ u_x=u_\xi\end{cases}$, $\begin{cases}u_{yy}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\\ u_{xy}=u_{\xi\xi}+u_{\xi\eta}\\ u_{xx}=u_{\xi\xi}\end{cases} \to \boxed{u_{\eta\eta}+u=\xi}$ forma canónica pedida

EDO lineal de 2° orden en η con $\mu^2+1=0$, $\mu=\pm i$. La $u_p=\xi$ (constante en este paso) salta a la vista.

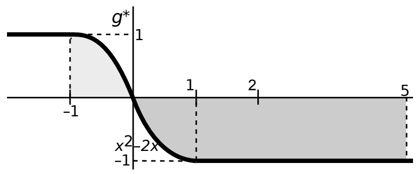
$u=p(\xi)\cos\eta+q(\xi)\,\mathrm{sen}\,\eta+\xi=\boxed{p(x+y)\cos y+q(x+y)\,\mathrm{sen}\,y+x+y}$ solución general



op] $\begin{cases}p(x)+x=x,\ p(x)=0\\ \quad q(x)\cos 0+1=0,\ q(x)=-1\end{cases} \to \boxed{u(x,y)=x+y-\mathrm{sen}\,y}$, fácil de comprobar:
$\mathrm{sen}\,y-0+0+x+y-\mathrm{sen}\,y=x+y$, $u(x,0)=x+0-0$, $u_y(x,0)=1-\cos 0=0$.

3. Sea $\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=0,\ x\geq 0,\ t\in\mathbf{R}\\ u_t(x,0)=\begin{cases}(x-1)^2,\ x\in[0,1]\\ 0,\ x\in[1,\infty)\end{cases}\\ u(x,0)=0,\ u(0,t)=t\end{cases}$. **a]** Calcular $u(2,1)$ y $u(2,3)$. [La v buena para el cambio es la obvia]. [0.9 ptos]
op] Calcular $u(2,t)$ para todo $t\geq 3$. [0.5 ptos]

$w=u-t \to \begin{cases}w_{tt}-w_{xx}=0-0=0,\ x\geq 0\\ w_t(x,0)=\begin{cases}x^2-2x,\ x\in[0,1]\\ -1,\ x\in[1,\infty)\end{cases}\\ w(x,0)=w(0,t)=0\end{cases} \to \begin{cases}w_{tt}-w_{xx}=0,\ x,t\in\mathbf{R}\\ w(x,0)=0,\ w_t(x,0)=g^*(x)\end{cases}$,



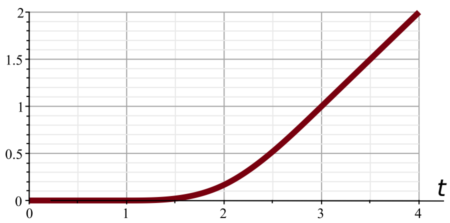
Con g^* extendida impar a todo x. $w(2,t)=\frac{1}{2}\int_{2-t}^{2+t}g^*(s)\,ds$, $u=w+t$.

a] $w(2,1)=\frac{1}{2}\int_1^3(-1)=-1$, $\boxed{u(2,1)=0}$. $w(2,3)=\frac{1}{2}\int_{-1}^5 g^*=\frac{1}{2}\int_1^5(-1)=-2$, $\boxed{u(2,3)=1}$.

op] Para $t\geq 3$ el área de los nuevos intervalos que aparecen a la izquierda de -1 se cancelan con los añadidos a la derecha.

Por tanto, se tiene $\forall t\geq 3$ que $w(2,t)=-2 \to \boxed{u(2,t)=t-2}$.

[Con alguna cuenta más se prueba que la evolución del punto $x=2$ es la del dibujo de la derecha: hasta $t=1$ no se mueve, en $[1,3]$ sigue algo cúbico y si $t\geq 3$ es la recta calculada que parte del $(3,1)$ hallado].



Hallemos: $w(2,2)=\frac{1}{2}\int_0^4 g^*=\frac{1}{2}\big[\frac{1}{3}x^3-x^2\big]_0^1-\frac{3}{2}=-\frac{5}{6}$, $u(2,2)=\frac{1}{6}$.

4. Resolver, utilizando la transformada de Fourier, $\begin{cases}u_t-u_{xx}-2u_x=0,\ x\in\mathbf{R},\ t>0\\ u(x,0)=e^{-x^2/4},\ u \text{ acotada}\end{cases}$. [1 pto]

$\begin{cases}\hat{u}_t+k^2\hat{u}+2ik\hat{u}=0\\ \hat{u}(k,0)=\sqrt{2}e^{-k^2}\end{cases} \xrightarrow[\text{EDO en } t]{} \hat{u}(k,t)=p(k)\,e^{-k^2t-2ikt} \underset{\text{d.i.}}{=} \sqrt{2}\,e^{-k^2(t+1)}e^{-2ikt} \xrightarrow{t \text{ cte}} \boxed{u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{t+1}}\,e^{-\frac{(x+2t)^2}{4t+4}}}$.

$\Big[$Hemos usado: $\mathcal{F}[f']=-ik\hat{f}$, $\mathcal{F}[f'']=-k^2\hat{f}$, $\mathcal{F}\big[e^{-ax^2}\big]=\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-k^2/4a}$, $\mathcal{F}^{-1}\big[e^{-ak^2}\big]=\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-x^2/4a}$ y $\mathcal{F}^{-1}\big[\hat{f}(k)e^{-ika}\big]=f(x-a)\Big]$.

Soluciones del control 2 de Métodos II - A (19-4-23)

1. Sea $xy''-(2+x)y'=0$. **a]** Hallar los 4 primeros términos no nulos del desarrollo de una solución que se anule en $x=0$, dando la regla de recurrencia. **b]** ¿Es su punto del infinito singular regular?
[1.1+0.3=1.4 pts]

a] $x=0$ es punto singular regular de $x^2y''-x(2+x)y'=0$ con $\lambda(\lambda-1)-2\lambda=0 \to r_1=3,\ r_2=0$.

Se anula en $x=0$ la $y_1=\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+3}$, $c_0\neq 0$ (analítica). La $y_2=\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k+dy_1\ln x$ no lo hace (acotada, ¿analítica?).

$$\sum_0 \big[(k+3)(k+2)c_k x^{k+2}-2(k+3)c_k x^{k+2}-(k+3)c_k x^{k+3}\big]=\sum_0 \big[k(k+3)c_k x^{k+2}-(k+3)c_k x^{k+3}\big]=0 \to$$

x^2: $0\cdot c_0=0$, c_0 indeterminado; x^3: $4c_1-3c_0=0$, $c_1=\frac{3}{4}c_0$; x^{k+2}: $k(k+3)c_k-(k+2)c_{k-1}=0$,

$$\boxed{c_k=\frac{k+2}{k(k+3)}c_{k-1}} \to c_2=\frac{2}{5}c_1=\frac{3}{10}c_0,\ c_3=\frac{5}{18}c_2=\frac{1}{12}c_0 \to \boxed{y_1=x^3\Big[1+\tfrac{3}{4}x+\tfrac{3}{10}x^2+\tfrac{1}{12}x^3+\cdots\Big]}.$$

[Esta serie, según Frobenius, converge al menos donde lo hacían $a^*=-2-x$ y $b^*=0$, es decir, $\forall x$].

[Resoluble sin series: $v'=(1+\frac{2}{x})v$, $v=Cx^2e^x=y'$, $y=C(x^2-2x+2)e^x+K$. Nuestra y_1 es $3(x^2-2x+2)e^x-6$.
Para comprobar sería aún más corto: $y=C\int\big(x^2+x^3+\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{6}x^5+\cdots\big)dx=C\big(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{10}x^5+\frac{1}{36}x^6+\cdots\big)^{\uparrow C=3}$].

b] $x=\frac{1}{s} \to \frac{1}{s}\big[s^4\ddot{y}+2s^3\dot{y}\big]+\big[2+\frac{1}{s}\big]s^2\dot{y}=0$, $s^2\ddot{y}+(4s+1)\dot{y}=0$. $a^*=4+\frac{1}{s} \to s=0$ **singular no regular**.

2. Sea (P) $\begin{cases} y''+2y'+\lambda y=0 \\ y(0)+y'(0)=y(1)+y'(1)=0 \end{cases}$. **a]** Precisar si $\lambda=-3$ y $\lambda=1$ son o no autovalores, encontrando la autofunción en caso afirmativo. [1+0.6=1.6 pts]
b] Hallar, si existe, un valor de la constante a para el que $y''+2y'+y=\underset{ae^{-x}}{ae^{-2x}}-1$ tenga infinitas soluciones con esos datos de contorno.

a] $\mu^2+2\mu+\lambda=0$, $\mu=-1\pm\sqrt{1-\lambda}$. Como $\alpha\cdot\alpha'<0$, no podemos descartar $\lambda=-3 \to \mu=1,-3$.

$y=c_1e^x+c_2e^{-3x}$, $y'=c_1e^x-3c_2e^{-3x}$, $\begin{array}{l} y(0)+y'(0)=2c_1-2c_2=0,\ c_2=c_1\downarrow \\ y(1)+y'(1)=2c_1e-2c_2e^{-3}=0=2c_1(e-e^{-3}) \end{array}$, $c_1=c_2=0$. **No autovalor**.

$\lambda=1$, $\mu=1$ doble. $y=(c_1+c_2x)e^{-x}$, $y'=(c_2-c_1-c_2x)e^{-x}$, $\begin{array}{l} c_2=0 \\ c_2e^{-1}=0 \end{array}$, $\forall c_2$. **Autovalor** con $\boxed{y_1=\{e^{-x}\}}$.

b] El homogéneo tiene si $\lambda=1$ las infinitas soluciones $\{e^{-x}\}$, y el no homogéneo tendrá infinitas o ninguna. La ecuación en forma autoadjunta es $\big(e^{2x}y'\big)'+e^{2x}y=a-e^{2x}$. Para que tenga soluciones debe anularse:

$$\int_0^1\big(a-e^{2x}\big)e^{-x}dx=\int_0^1\big(ae^{-x}-e^x\big)dx=a\big(1-e^{-1}\big)-e+1=0 \text{ si } \boxed{a=e}.$$

Para ese valor tiene **infinitas** soluciones. Para los otros a no tendrá ninguna.

[No se piden, pero las hallamos. Habrá $y_p=Ae^{-2x}+B$, $(4A-4A+A)e^{-2x}+B=a-e^{2x} \to y_p=ae^{-2x}-1$ [$=f$ casualmente].
$y=(c_1+c_2x)e^{-x}+e^{1-2x}-1 \overset{c.c.}{\to} y=c_1e^{-x}+(e+1)xe^{-x}+e^{1-2x}-1$].

Había cambiado ae^{-x} por ae^{-2x} (para que quien lo hiciese con la y_p la hallase más fácilmente y fuese algo más complicado con la integral), pero se me olvidó hacerlo en los enunciados repartidos. El problema fue casi igual. La integral era $a-e+1$ y las infinitas soluciones, pues, aparecieron para $a=e-1$. Dejo este que me gusta más.

3. Sea $\begin{cases} u_t-u_{xx}+3u=0,\ x\in\big(0,\frac{\pi}{2}\big),\ t>0 \\ u(x,0)=f(x),\ u_x(0,t)=0,\ u\big(\frac{\pi}{2},t\big)=e^{-3t} \end{cases}$. Resolver por separación de variables para: i) $f(x)=0$, ii) $f(x)=1-\cos x$. [2.3 ptos]
[Una v que no estropea la EDP es la clara $v=e^{-3t}$].

Haciendo $w=u-e^{-3t}$: $\begin{cases} w_t-w_{xx}+3w=0 \\ w(x,0)=f(x)-1,\ w_x(0,t)=w\big(\frac{\pi}{2},t\big)=0 \end{cases}$. $w=XT \to XT'+3XT=X''T$, $\frac{X''}{X}=\frac{T'}{T}+3=-\lambda$.

$\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=X'(\pi/2)=0 \end{cases} \to \lambda_n=(2n-1)^2,\ X_n=\big\{\cos(2n-1)x\big\}_{n=1,2\ldots}$ (formulario). Ademas $T'=-(2+\lambda)T \to T_n=\big\{e^{-(3+\lambda_n)t}\big\}$.

Probamos entonces $w=\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-4(n^2-n+1)t}\cos(2n-1)x$, y del dato inicial: $\sum_{n=1}^{\infty} c_n\cos(2n-1)x=f(x)-1$.

Para i) los coeficientes vendrán dados por $c_n=-\frac{2}{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\cos(2n-1)x\,dx=\frac{4(-1)^n}{\pi(2n-1)}$, y la solución será

$$\boxed{u(x,t)=e^{-3t}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}e^{-4(n^2-n+1)t}\cos(2n-1)x}.$$

Para ii) es claro que $c_1=-1$ y que el resto son 0, así que $\boxed{u(x,t)=e^{-3t}-e^{-4t}\cos x}$ (fácil de comprobar).

Soluciones del control 2 de Métodos II - C (19-4-23)

1. Sea $x\,y''-(2+x)\,y'=0$. **a]** Hallar los cuatro primeros términos no nulos del desarrollo en torno a $x=1$ de la solución que satisface $y(1)=y'(1)=1$.
[1+0.4=1.4 pts]
b] Hallar las raíces del polinomio indicial en $x=0$. ¿Están todas las soluciones acotadas en ese punto?

a] Podemos trabajar en torno a $x=1$ haciendo $x-1=s \to (1+s)y''-(3+s)y'=0$, con $s=0$ punto regular, y sabiendo, por los datos iniciales, que $c_0=c_1=1$.

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}c_ks^k\,,\quad \sum_{2}\big[k(k-1)c_ks^{k-2}+k(k-1)c_ks^{k-1}\big]-\sum_{1}\big[3kc_ks^{k-1}+kc_ks^k\big]=0\ \to$$

$s^0:\ 2c_2-3c_1=0$, $c_2=\frac{3}{2}c_1=\frac{3}{2}$. $\quad s^1:\ 6c_3+2c_2-6c_2-c_1=0$, $c_3=\frac{2}{3}c_2+\frac{1}{6}c_1=1+\frac{1}{6}=\frac{7}{6}$ (ya tenemos 4).

Luego los cuatro términos pedidos son $\boxed{y=1+s+\frac{3}{2}s^2+\frac{7}{6}s^3+\cdots=1+(x-1)+\frac{3}{2}(x-1)^2+\frac{7}{6}(x-1)^3+\cdots}$.

O más corto. De la ecuación obtenemos: $y''(1)-3y'(1)=0$, $y''(1)=3$.

Derivándola: $xy'''+y''-(2+x)y''-y'=0$, $y'''(1)=2y''(1)+y'(1)=7$.

Y el desarrollo de Taylor nos da: $y=y(1)+y'(1)(x-1)+\frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{y'''(1)}{3!}(x-1)^3+\cdots\uparrow$

[Resoluble sin series: $v'=\big(1+\frac{2}{s+1}\big)v$, $y'=C(s+1)^2e^s$, $y=C(s^2+1)\,e^s+K\xrightarrow{d.i.}y=(s^2+1)\,e^s=(s^2+1)\big(1+s+\frac{s^2}{2}+\frac{s^3}{6}+\cdots\big)$].

b] $x=0$ singular regular con $r_1=3$, $r_2=0$. La $y_1=x^3\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k$, $c_0\neq0$, está claramente acotada en $x=0$.

La $y_2=\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k+dy_1\ln|x|$ también lo está aunque apareciese el posible logaritmo, pues $x^3\ln|x|\underset{x\to0}{\longrightarrow}0$.

2. Sea (P) $\begin{cases}x^2y''+\lambda y=0\\ y(1)+2y'(1)=y(3)=0\end{cases}$. **a]** Determinar si $\lambda=0$ y $\lambda=\frac{1}{4}$ son o no autovalores, escribiendo la autofunción en caso afirmativo. [1+0.6=1.6 pts]
b] Precisar en ambos casos cuántas soluciones tiene $x^2y''+\lambda y=x^2-3$ con esos mismos datos. [$\ln 3\approx1.1$].

a] Las soluciones generales de las ecuaciones de Euler son: $\mu^2-\mu+\lambda=0$, $\begin{array}{l}y=c_1+c_2x\ \ (\lambda=0)\\ y=(c_1+c_2\ln x)\,x^{1/2}\ \ \big(\lambda=\frac{1}{4}\big)\end{array}$

Para $\lambda=0$: $\begin{array}{l}y(1)+2y'(1)=c_1+3c_2=0\\ y(3)=c_1+3c_2=0\end{array}\to\ \lambda=0$ es autovalor con autofunción $\boxed{y_0=\{x-3\}}$.

Para $\lambda=\frac{1}{4}$: $y'=x^{-1/2}\big[c_2+\frac{1}{2}(c_1+c_2\ln x)\big]$, $\begin{array}{l}y'(1)+2y'(1)=2c_1+2c_2=0,\ c_2=-c_1\downarrow\\ y(3)=(c_1+c_2\ln3)\sqrt{3}=0\quad c_1(1-\underset{\neq0}{\ln3})\sqrt{3}=0.\end{array}$ $c_1=c_2=0$ **No autovalor**.

b] La ecuación en forma autoadjunta es: $\big(y'\big)'+\frac{\lambda}{x^2}y=1-\frac{3}{x^2}$.

Para $\lambda=\frac{1}{4}$ el problema no homogéneo tiene **solución única**, por tener el homogéneo sólo la trivial.

Para $\lambda=0$, el homogéneo tiene infinitas $\{x-3\}$, y sobre el no homogéneo informa la integral:

$\int_1^3\big(1-\frac{3}{x^2}\big)(x-3)\,dx=\int_1^3\big(x-3-\frac{3}{x}+\frac{9}{x^2}\big)\,dx=\frac{9-1}{2}-6-3\ln3-3+9=4-3\ln3\neq0$. **No tiene solución**.

O para esta 'ecuación' tan sencilla $y''=1-\frac{3}{x^2}$ es fácil hallar $y=c_1+c_2x+\frac{x^2}{2}+3\ln x$ e imponer los datos.

3. Sea $\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=F(x)\,,\ x\in[0,\pi]\,,\ t\in\mathbf{R}\\ u(x,0)=u_t(x,0)=u(0,t)=u(\pi,t)=0\end{cases}$. Hallar por separación de variables: [2.3 ptos]
i) La solución para $F(x)=\operatorname{sen}x$.
ii) Dos términos no nulos de la serie solución si $F(x)=\frac{\pi}{4}$.

Al ser un problema no homogéneo, debemos probar una serie con las autofunciones X_n del homogéneo.

Sabemos que al separar variables aparece $\begin{cases}X''+\lambda X=0\\ X(0)=X(\pi)=0\end{cases}\to X_n=\{\operatorname{sen}nx\}$, $n=1,2,\ldots$ (formulario).

Llevamos $u=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\operatorname{sen}nx$ a la EDP: $\sum_{n=1}^{\infty}\big[T_n''+n^2T_n\big]\operatorname{sen}nx=F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\operatorname{sen}nx$, $B_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}F(x)\operatorname{sen}nx\,dx$.

Y de los datos iniciales: $u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\operatorname{sen}nx=0$, $u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n'(0)\operatorname{sen}nx=0\Rightarrow T_n(0)=T_n'(0)=0\ \forall n$.

Para el caso i) la F ya está desarrollada y basta resolver este problema:

$\begin{cases}T_1''+T_1=1\to T_1=c_1\cos t+c_2\operatorname{sen}t+1\downarrow\\ T_1(0)=T_1'(0)=0\qquad\to\qquad T_1=1-\cos t.\end{cases}$ $\begin{cases}T_n''+n^2T_n=0\\ T_n(0)=T_n'(0)=0\end{cases}\Rightarrow T_n\equiv0$ (es solución y hay unicidad). $\boxed{u=(1-\cos t)\operatorname{sen}x}$.

Para ii) necesitamos los $B_n=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}nx\,dx=\frac{1-(-1)^n}{2n}$ [se anulan si n par y valen $\frac{1}{n}$ si n impar]. Luego: $\frac{\pi}{4}=\operatorname{sen}x+\frac{1}{3}\operatorname{sen}3x+\cdots$

Resolvemos aquí: $\begin{cases}T_1''+T_1=1\\ T_1(0)=T_1'(0)\end{cases}$ (la de antes) y $\begin{cases}T_3''+9T_3=\frac{1}{3}\\ T_3(0)=T_3'(0)\end{cases}\to T_n=\frac{1}{27}(1-\cos3t)$.

Luego $\boxed{u=(1-\cos t)\operatorname{sen}x+\frac{1}{27}(1-\cos3t)\operatorname{sen}3x+\cdots}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\big[1-\cos(2n-1)t\big]\operatorname{sen}(2n-1)x$.