Control 1 de Métodos II (E) (26-2-20)

o1. Sea $u_y - u_x = 2(x+y)u$ y los datos i) $u(x,-x)=1$, ii) $u(x,x)=1$. Calcular su solución general, la única que satisface uno de los datos y, si existen, dos soluciones distintas que cumplan el otro.

o2. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0,\ x\geq 0,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=\begin{cases}(x-1)(x-3),\ x\in[1,3] \\ 0,\ \text{resto de } [0,\infty)\end{cases} \\ u_t(x,0)=u(0,t)=0 \end{cases}$. **a]** Hallar el valor de $u(1,3)$. **b]** Dibujar $u(x,2)$ y dar su expresión analítica. **c]** Dibujar $u(1,t)$ para $t\geq 0$.

o3. Resolver $\begin{cases} u_{tt}+2u_{xt}+u_{xx}-u=0,\ x,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=g(x) \end{cases}$ **a]** a partir de la forma canónica, **b]** mediante la $\mathcal{F}$.

(Por el covid, el control 2 fue online y con muchas versiones para dificultar la transmisión de información).

Control 1 de Métodos II (A) (17-3-21)

Elegir entre 1 y 1*

1. Sean $(1-y)u_y + xu_x = 2x^2 y$ y los datos i) $u(x,-1)=x^2$, ii) $u(x,1)=x^2$. Calcular su solución general y la que satisface el dato con solución única, probando su unicidad.

1*. Calcular la solución general de $u_{yy}-2u_{xy}+u_{xx}+u_y-u_x=x+y$ y comprobarla.

2. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0,\ x\geq 0,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=\begin{cases}1-x,\ x\in[0,1] \\ 0,\ x\in[1,\infty)\end{cases} \\ u(0,t)=t \end{cases}$. **a]** Hallar el valor de $u(2,2)$ y $u(2,4)$. **b]** Hallar la expresión de $u(2,t)$ para $t\in[0,1]$.

[La v adecuada para el cambio inicial es la obvia].

3. Resolver $\begin{cases} u_t - tu_{xx} - u_x = 0 \\ u(x,0)=e^{-x^2/2} \end{cases}$ mediante la $\mathcal{F}$.

Control 2 de Métodos II (A) (6-5-21)

Elegir uno de los dos apartados o] (de 1 o 2)

1. Hallar el desarrollo de una solución no trivial de $xy''-(2+x)y=0$ que se anule en $x=0$, dando la regla de recurrencia, e identificar esta solución con una función elemental.

o] Precisar si todas las soluciones de la ecuación son analíticas (exige cálculos esta respuesta).

2. Sea $\begin{cases} x^2y''-4xy'+\lambda y=0 \\ y'(2)=y(3)=0 \end{cases}$. Determinar si $\lambda=0$ y $\lambda=6$ son o no autovalores del problema. En caso afirmativo dar su autofunción $\{y_n\}$ y calcular $\langle y_n, y_n\rangle$.

o] Precisar para ambos valores de λ cuántas soluciones tiene $x^2y''-4xy'+\lambda y=4x-9$ con esos datos.

3. Resolver $\begin{cases} u_t-u_{xx}+u=0,\ x\in(0,\pi),\ t>0 \\ u(x,0)=0,\ u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=e^{-t} \end{cases}$. [Usar la clara $v=xe^{-t}$ para el cambio]

4. Resolver por separación de variables $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=t^2\,\text{sen}\,x,\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=\text{sen}\,x,\ u_t(x,0)=u(0,t)=u_x\left(\frac{\pi}{2},t\right)=0 \end{cases}$.

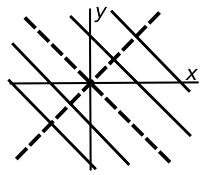
Soluciones de controles 1 de Métodos II (20 y 21)

o1. Sea $u_y - u_x = 2(x+y)u$ y los datos	i) $u(x,-x)=1$, ii) $u(x,x)=1$.	Calcular su solución general, la única que satisface uno de los datos y, si existen, dos soluciones distintas que cumplan el otro.

$\frac{dy}{dx}=-1$, $\underbrace{\boxed{y+x=C}}_{\text{características}}$. $\left\{\begin{array}{l}\xi=y+x\\ \eta=y\end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{l}u_y=u_\xi+u_\eta\\ u_x=u_\xi\end{array}\right.$, $u_\eta=2(x+y)u=2\xi u$, $u=p(\xi)\,e^{2\xi\eta}=\boxed{p(y+x)\,e^{2y^2+2xy}}$.

O bien: $\left\{\begin{array}{l}\xi=y+x\\ \eta=x\end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{l}u_y=u_\xi\\ u_x=u_\xi+u_\eta\end{array}\right. \to -u_\eta=2\xi u$, $u=q(\xi)\,e^{-2\xi\eta}=\boxed{q(y+x)\,e^{-2xy-2x^2}}$ (parecida).

El dato i), sobre característica, dará infinitas o ninguna solución. El ii) solución única:



$u(x,x)=p(2x)\,e^{4x^2}=1 \to p(v)=e^{-v^2}$, $u(x,y)=e^{2y^2+2xy-y^2-2xy-x^2}=\boxed{e^{y^2-x^2}}$

O bien: $u(x,x)=q(2x)\,e^{-4x^2}=1 \to q(v)=e^{v^2}$, $u(x,y)=e^{y^2+2xy+x^2-2xy-2x^2}\uparrow$

[Comprobamos: $2y\,e^{\cdots}+2x\,e^{\cdots}=(x+y)\,e^{\cdots}$ y además $u(x,x)=e^0$].

[Es única porque la recta $y=x$ claramente no es tangente a las rectas características.
O porque en el proceso de cálculo ha quedado $p(v)$ determinada de forma única $\forall v$.
O porque $T(x)=1\cdot 1-1\cdot(-1)=2\neq 0 \;\; \forall x$].

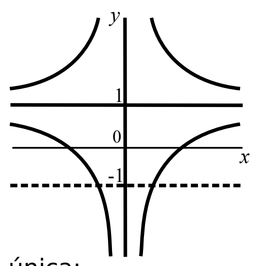
Para i) se obtiene $u(x,-x)=p(0)=1$. Cada $p\in C^1$ que valga 1 en 0 nos da una de las infinitas soluciones.

$p(v)\equiv 1 \to u=e^{2y(x+y)}$, $p(v)=e^{-v^2} \to u=e^{y^2-x^2}$ anterior, ... [$T(x)\equiv 0$ confirma que es característica].

1. Sean $(1-y)u_y+xu_x=2x^2y$ y los datos	i) $u(x,-1)=x^2$ ii) $u(x,1)=x^2$.	Calcular su solución general y la que satisface el dato con solución única, probando su unicidad.

$\frac{dy}{dx}=\frac{1-y}{x}$. Lineal con $y_p=1$ a ojo, o $e^{\int a}=e^{-\ln x}$, $y=\frac{C}{x}+\frac{1}{x}\int dx=\frac{C}{x}+1$. $\boxed{x(y-1)=C}$.

Separable: $\int\frac{dy}{y-1}=-\int\frac{dx}{x}+C$, $\ln(y-1)=C-\ln x$, $y-1\overset{\uparrow}{=}\frac{C}{x}$.



$\left\{\begin{array}{l}\xi=xy-x\\ \eta=x\end{array}\right.$, $\left\{\begin{array}{l}u_y=xu_\xi\\ u_x=(y-1)u_\xi+u_\eta\end{array}\right.$, $u_\eta=2xy=2\xi+2\eta$, $u=2\xi\eta+\eta^2+p(\xi)$,

$\boxed{u(x,y)=2x^2y-x^2+p(xy-x)}$ solución general

[Peor: $\left\{\begin{array}{l}\xi=xy-x\\ \eta=y\end{array}\right.$, $u_\eta=\frac{2x^2y}{1-y}=\frac{2\xi^2\eta}{(1-\eta)^3} \to u=\frac{\xi^2}{(\eta-1)^2}+\frac{2\xi^2}{\eta-1}+p(\xi)\uparrow$].

El dato ii), sobre la característica $y=1$, dará infinitas o ninguna solución. El i) solución única:

$u(x,-1)=p(-2x)-3x^2=x^2 \to p(v)=v^2$, $u(x,y)=2x^2y-x^2+x^2y^2-2x^2y+x^2=\boxed{x^2y^2}$.

[Comprobamos: $2x^2y(1-y)+2x^2y^2=2x^2y$ y además $u(x,-1)=x^2$].

Es única porque la recta $y=-1$ claramente no es tangente a las características. O porque en el proceso de cálculo ha quedado $p(v)$ determinada de forma única $\forall v$. O porque $T(x)=1\cdot 2-0\cdot x=2\neq 0 \;\; \forall x$.

Para ii) se obtiene $u(x,1)=x^2+p(0)=x^2$. Cada $p\in C^1$ con $p(0)=0$ da una de las infinitas soluciones que hay.

1*. Calcular la solución general de $u_{yy}-2u_{xy}+u_{xx}+u_y-u_x=x+y$ y comprobarla.

$B^2-4AC=0$ parabólica, $\left\{\begin{array}{l}\xi=x+y\\ \eta=y\end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{l}u_y=u_\xi+u_\eta\\ u_x=u_\xi\end{array}\right.$, $\left\{\begin{array}{l}u_{yy}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\\ u_{xy}=u_{\xi\xi}+u_{\xi\eta}\\ u_{xx}=u_{\xi\xi}\end{array}\right. \to \boxed{u_{\eta\eta}+u_\eta=\xi}$ forma canónica

$\mu=0,-1$, u_p a ojo o probando $u_p=A\eta+B \to u=p(\xi)+q(\xi)\,e^{-\eta}+\xi\eta=\boxed{p(x+y)+q(x+y)\,e^{-y}+xy+y^2}$ solución general

$u_y=p'+[q'-q]e^{-y}+x+2y$. $u_x=p'+q'e^{-y}+y$. $u_y-u_x=-qe^{-y}+x+y$. $u_{yy}-2u_{xy}+u_{xx}=qe^{-y}$.

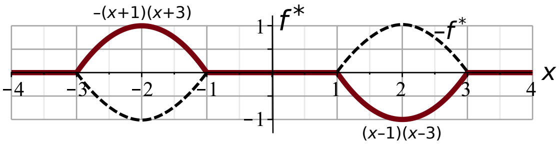
$u_{yy}=p''+[q''-2q'+q]e^{-y}+2$. $u_{xy}=p''+[q''-q']e^{-y}+1$. $u_{xx}=p''+q''e^{-y}$. $\nearrow$

o2. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\geq 0\,,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=\begin{cases}(x-1)(x-3)\,,\ x\in[1,3] \\ 0\,,\ \text{resto de}\,[0,\infty)\end{cases} \\ u_t(x,0)=u(0,t)=0 \end{cases}$. **a]** Hallar el valor de $u(1,3)$. **b]** Dibujar $u(x,2)$ y dar su expresión analítica. **c]** Dibujar $u(1,t)$ para $t\geq 0$.

Extendemos de forma impar $f(x)$ a $f^*(x)$ definida $\forall x$.

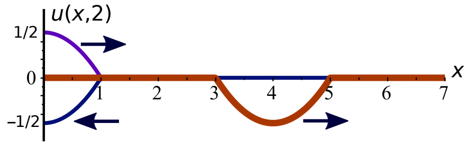
La solución viene dada por $u(x,t)=\frac{1}{2}\big[f^*(x+t)+f^*(x-t)\big]$.

a] $u(1,3)=\frac{1}{2}\big[f^*(4)+f^*(-2)\big]=\frac{1}{2}\big[0-f(2)\big]=\boxed{\frac{1}{2}}$.



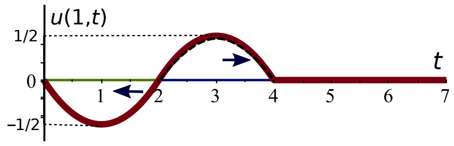
b] Para dibujar $u(x,2)$ se lleva $f^*/2$ a derecha e izquierda 2 unidades y se suman las gráficas. Se cancelan las ondas en $[0,1]$ (las parábolas son simétricas). La que iba hacia la derecha lo seguirá haciendo y para su expresión basta poner $x-2$ en vez de x:

$u(x,0)=\frac{1}{2}(x-3)(x-5)$ si $x\in[3,5]$ y 0 en el resto de $[0,\infty)$.



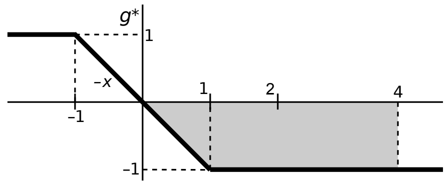
c] Como $u(1,t)=\frac{1}{2}\big[f^*(1+t)+f^*(1-t)\big]=\frac{1}{2}\big[f^*(t+1)-f^*(t-1)\big]$

(por ser f^* impar), basta trasladar 1 unidad $f^*/2$ a la izquierda y $-f^*/2$ hacia la derecha y sumar ambas gráficas. [Su expresión no pedida es $t(t-2)$, $t\in[0,2]$, $-(t-2)(t-4)$, $t\in[2,4]$, y 0 después].



2. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\geq 0\,,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=0\,,\ u_t(x,0)=\begin{cases}1-x\,,\ x\in[0,1] \\ 0\,,\ x\in[1,\infty)\end{cases} \\ u(0,t)=t \end{cases}$. **a]** Hallar el valor de $u(2,2)$ y $u(2,4)$. **b]** Hallar la expresión de $u(2,t)$ para $t\in[0,1]$. [La v adecuada para el cambio inicial es la obvia].

$v=t$ cumple el dato no nulo $\xrightarrow{w=u-t}$ $\begin{cases} w_{tt}-w_{xx}=0\,,\ x\geq 0 \\ w_t(x,0)=g(x)=\begin{cases}-x\,,\ x\in[0,1] \\ -1\,,\ x\geq 1\end{cases} \\ w(x,0)=w(0,t)=0 \end{cases}$



Extendemos de forma impar $g(x)$ a $g^*(x)$ definida $\forall x$.

La solución viene dada por $w(x,t)=\frac{1}{2}\int_{2-t}^{2+t}g^*(s)\,ds$, $u=w+t$.

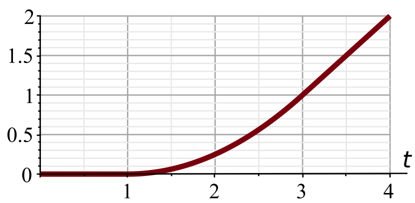
a] $w(2,2)=\frac{1}{2}\int_0^4 g^*=-\frac{7}{4}$ (mirando áreas). $\boxed{u(2,2)=\frac{1}{4}}$. $w(2,4)=\frac{1}{2}\int_{-2}^{6}g^*=-\frac{1}{2}\int_2^6 ds=-2$. $\boxed{u(2,4)=2}$.

b] Para $t\in[0,1]$ tanto $2-t$ como $2+t$ son mayores que 1.

Por tanto, $w(2,t)=-\frac{1}{2}\int_{2-t}^{2+t}ds=-t\to\boxed{w(2,t)=0}$ en $[0,1]$.

[Aún no llegó la perturbación que viaja a velocidad 1].

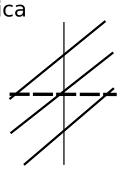
[Con alguna cuenta más se prueba que la evolución del punto $x=2$ es la del dibujo de la derecha: hasta $t=1$ no se mueve, en $[1,3]$ sigue una parábola y si $t\geq 3$ es una recta que pasa por el $(4,2)$ hallado].



o3. Resolver $\begin{cases} u_{tt}+2u_{xt}+u_{xx}-u=0\,,\ x,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=0\,,\ u_t(x,0)=g(x)\end{cases}$ **a]** a partir de la forma canónica, **b]** mediante la $\mathcal{F}$.

a] $B^2-4AC=0$ parabólica, $\begin{cases}\xi=x-t \\ \eta=t\end{cases}\to\begin{cases}u_x=u_\xi \\ u_t=-u_\xi+u_\eta\end{cases}$, $\begin{cases}u_{xx}=u_{\xi\xi} \\ u_{xt}=-u_{\xi\xi}+u_{\xi\eta} \\ u_{tt}=u_{\xi\xi}-2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\end{cases}\to\boxed{u_{\eta\eta}-u=0}$ forma canónica

$\mu=\pm 1\to u=p(\xi)\,e^{\eta}+q(\xi)\,e^{-\eta}=\boxed{p(x-t)\,e^t+q(x-t)\,e^{-t}}$ solución general



$\to u_t(x,t)=\big[p(x-t)-p'(x-t)\big]e^t-\big[q'(x-t)+q(x-t)\big]e^{-t}$.

$\begin{cases}p(x)+q(x)=0\to q(x)=-p(x),\ p'(x)+q'(x)=0 \searrow \\ p(x)-q(x)-p'(x)-q'(x)=g(x) \qquad p(x)=\frac{1}{2}g(x)\nearrow\end{cases}$ $u=\frac{1}{2}g(x-t)\big[e^t-e^{-t}\big]$, $\boxed{u(x,t)=g(x-t)\,\mathrm{sh}\,t}$.

b] $\begin{cases}\hat{u}_{tt}-2ik\hat{u}_t-k^2\hat{u}-\hat{u}=0 \\ \hat{u}(k,0)=0,\ \hat{u}_t(k,0)=\hat{g}(k)\end{cases}$ $\begin{matrix}\mu^2-2ik\mu-k^2-1=0\to \\ \mu=ik\pm\sqrt{-k^2+k^2+1}=ik\pm 1\end{matrix}$ $\to\hat{u}(k,t)=p(k)\,e^{(ik+1)t}+q(k)\,e^{(ik-1)t}\xrightarrow{c.i.}$

$\begin{cases}p(k)+q(k)=0\,, \qquad q(k)=-p(k)\searrow \\ (ik+1)p(k)+(ik-1)q(k)=\hat{g}(k) \quad 2p(k)=\hat{g}(k)\nearrow\end{cases}$ $p(k)=\frac{1}{2}\hat{g}(k)$, $\hat{u}(k,t)=\hat{g}(k)\,e^{ikt}\,\mathrm{sh}\,t\to\boxed{u(x,t)=g(x-t)\,\mathrm{sh}\,t}$.

3. Resolver $\begin{cases}u_t-tu_{xx}-u_x=0 \\ u(x,0)=e^{-x^2/2}\end{cases}$ mediante la $\mathcal{F}$.

$\begin{cases}\hat{u}_t+k^2t\hat{u}+ik\hat{u}=0 \\ \hat{u}(k,0)=e^{-k^2/2}\end{cases}\to\hat{u}(k,t)=p(k)\,e^{-k^2t^2/2}e^{-ikt}\xrightarrow{c.i.}\hat{u}(k,t)=e^{-k^2(1+t^2)/2}e^{-ikt}$.

Como $\mathcal{F}^{-1}\big[\hat{f}(k)\,e^{ika}\big]=f(x-a)$ y $\mathcal{F}^{-1}\big[e^{-ak^2}\big]=\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-x^2/4a}$, es $\boxed{u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,e^{-(x+t)^2/2(1+t^2)}}$.

Soluciones del control 2 de Métodos II (A) (6-5-21)

1. Hallar el desarrollo de una solución no trivial de $xy''-(2+x)y=0$ que se anule en $x=0$, dando la regla de recurrencia, e identificar esta solución con una función elemental. [1 + 0.4 ptos]

o] Precisar si todas las soluciones de la ecuación son analíticas (exige cálculos esta respuesta).

$x^2y''-x(2+x)y=0$, $x=0$ regular, $r(r-1)=0$, $r=1,0$. Se anula en $x=0$ la $y_1=x\sum_{n=0}^{\infty}c_kx^k$, $c_0\neq 0$.

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty}c_kx^{k+1} \to \sum_{k=1}^{\infty}(k+1)kc_kx^k+\sum_{k=0}^{\infty}\big[-2c_kx^{k+1}-c_kx^{k+2}\big]=0 \to$$

$$x^1: 2c_1-2c_0=0,\ c_1=c_0;\quad x^2: 6c_2-2c_1-c_0=0,\ c_2=\tfrac{1}{2}c_0;$$

$$x^k: (k+1)kc_k-2c_{k-1}-c_{k-2}=0,\ c_k=\tfrac{2}{(k+1)k}c_{k-1}+\tfrac{1}{(k+1)k}c_{k-2} \to c_3=\tfrac{1}{6}c_2+\tfrac{1}{12}c_1=\tfrac{1}{6}c_0,\ \dots$$

$$c_{k-2}=\tfrac{1}{(k-2)!}c_0,\ c_{k-1}=\tfrac{1}{(k-1)!}c_0 \to c_k=\tfrac{2}{(k+1)k(k-1)!}c_0+\tfrac{k-1}{(k+1)k(k-1)(k-2)!}c_0=\tfrac{1}{k!}c_0.$$

Eligiendo $c_0=1$ es $\boxed{y=x\big[1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\cdots+\frac{1}{k!}x^k+\cdots\big]=x\,e^x}$, fácil de comprobar.

o] Será analítica $y_2=\sum_{n=0}^{\infty}b_kx^k+dy_1\ln x$ si es $d=0$ y no lo será si $d\neq 0$. Iniciamos su cálculo:

$$y_2''=\sum_{n=2}^{\infty}k(k-1)b_kx^{k-2}+dy_1''\ln x+\frac{2dy_1'}{x}-\frac{dy_1}{x^2} \to \sum_{n=2}^{\infty}k(k-1)b_kx^{k-1}-\sum_{n=0}^{\infty}\big[2b_xx^k+b_kx^{k+1}\big]+d(2x+1)\,e^x=0.$$

$x^0: -2b_0+d=0,\ d=2b_0\neq 0$. **No es analítica** (y no todas lo son).

Más corto $y_2=x\,e^x\int\frac{e^{-2x}}{x^2}\,dx=x\,e^x\int\big[\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+2-\cdots\big]dx=x\big(1+x+\cdots\big)\big(-\frac{1}{x}+2x-\cdots\big)-2x\,e^x\ln x$, con $\ln x$.

2. Sea $\begin{cases}x^2y''-4xy'+\lambda y=0\\ y'(2)=y(3)=0\end{cases}$. Determinar si $\lambda=0$ y $\lambda=6$ son o no autovalores del problema. En caso afirmativo dar su autofunción $\{y_n\}$ y calcular $\langle y_n,y_n\rangle$. [1 + 0.4 ptos]

o] Precisar para ambos valores de λ cuántas soluciones tiene $x^2y''-4xy'+\lambda y=4x-9$ con esos datos.

$\big[\frac{y'}{x^4}\big]'+\frac{\lambda}{x^6}y=0$. $\mu^2-5\mu+\lambda=0$, $\mu=\frac{5\pm\sqrt{25-4\lambda}}{2}$. $\lambda=0\to\mu=5,0$. $y=c_1x^5+c_2$. $\left.\begin{array}{r}80c_1=0\\ c_2=0\end{array}\right\}$ **No autovalor**.

$\lambda=6\to\mu=3,2$. $y=c_1x^3+c_2x^2$. $\left.\begin{array}{r}12c_1+4c_2=0\\ 9(3c_1+c_2)=0\end{array}\right\}\to c_2=-3c_1$. Es autovalor con $\boxed{y_n=\{x^3-3x^2\}}$.

Como es $r(x)=\frac{1}{x^6}$, $\langle y_n,y_n\rangle=\int_2^3\frac{1}{x^6}x^4(x-3)^2dx=\int_2^3\big(1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}\big)dx=\boxed{\frac{5}{2}-6\ln\frac{3}{2}}$.

o] Para $\lambda=0$ claramente solución **única**. Para $\lambda=6$ habrá infinitas o ninguna según se anule o no la integral:

$\int_2^3\underbrace{\frac{4x-9}{x^6}}_{f(x)}(x^3-3x^2)\,dx=\int_2^3\big(\frac{4}{x^2}-\frac{21}{x^3}+\frac{27}{x^4}\big)dx=\big[-\frac{4}{x}+\frac{21}{2x^2}-\frac{9}{x^3}\big]_2^3=0$. Hay **infinitas**.

[Más largo a partir de la solución general de la no homogénea $y=c_1x^3+c_2x^2+2x-\frac{3}{2}$].

3. Resolver $\begin{cases}u_t-u_{xx}+u=0,\ x\in(0,\pi),t>0\\ u(x,0)=0,\ u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=e^{-t}\end{cases}$. [Usar la clara $v=xe^{-t}$ para el cambio] [1.4 ptos]

$\xrightarrow{w=u-v}\begin{cases}w_t-w_{xx}+w=0\\ w(x,0)=-x,\ w_x(0,t)=w_x(\pi,t)=0\end{cases}$. $w=XT\to\frac{T'}{T}+1=\frac{X''}{X}=-\lambda\to\begin{array}{l}X''+\lambda X=0,\ X'(0)=X'(\pi)=0\\ T'=-(\lambda+1)T\end{array}$

$\lambda_n=n^2$, $n=0,1,\dots$, $X_n=\{\cos nx\}$. $T_n=\big\{e^{-(n^2+1)t}\big\}$. Probamos $w(x,t)=\frac{c_0}{2}e^{-t}+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\,e^{-(n^2+1)t}\cos nx$.

Del último dato: $w(x,0)=\frac{c_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos nx=-x\to c_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\,dx=\frac{2x\,\mathrm{sen}\,nx}{n\pi}\Big]_0^\pi+\int_0^\pi\frac{2\,\mathrm{sen}\,nx\,dx}{n\pi}=2\,\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}$.

Y además $c_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,dx=\pi\to\boxed{u(x,t)=\big(x-\frac{\pi}{2}\big)e^{-t}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\,e^{-(4n^2-4n+2)t}\cos(2n-1)x}$.

4. Resolver por separación de variables $\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=t^2\,\mathrm{sen}\,x,\ x\in\big[0,\frac{\pi}{2}\big],\ t\in\mathbf{R}\\ u(x,0)=\mathrm{sen}\,x,\ u_t(x,0)=u(0,t)=u_x\big(\frac{\pi}{2},t\big)=0\end{cases}$. [1.4 ptos]

Las autofunciones del homogéneo la da $X''+\lambda X=0$, $X(0)=X'\big(\frac{\pi}{2}\big)=0$, y son $X_n=\big\{\mathrm{sen}(2n-1)x\big\}$, $n=1,2\dots$

Llevamos a la EDP y a los datos iniciales la serie $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\,\mathrm{sen}(2n-1)x$, obteniendo:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\big[T_n'+(2n-1)^2T_n\big]\mathrm{sen}(2n-1)x=t^2\,\mathrm{sen}\,x \quad \text{y}\quad \sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\,\mathrm{sen}(2n-1)x=\mathrm{sen}\,x,\ \sum_{n=1}^{\infty}T_n'(0)\,\mathrm{sen}(2n-1)x=0.$$

La única T_n no nula (pues en los otros problemas iniciales es 0 solución y es única) la proporciona:

$$\begin{cases}T_1''+T_1=t^2\\ T_1(0)=1,\ T_1'(0)=0\end{cases}\xrightarrow{T_p=At^2+Bt+C}T_1=c_1\cos t+c_2\,\mathrm{sen}\,t+t^2-2\xrightarrow{d.i.}\boxed{u(x,t)=\big(t^2-2+3\cos t\big)\mathrm{sen}\,x}.$$