Controles 1 y 1* de Métodos II (E)

1. Resolver $yu_y-(x-2)u_x=u-2x$ con el dato $u(x,-1)=x$. [0.5 puntos]

2. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\geq 0\,,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=1-\cos t \end{cases}$. **a]** Hallar $u(\frac{\pi}{3},\pi)$. **b]** Hallar $u(x,\pi)$ para $x\geq\pi$. [Ayuda: $v=1-\cos t\cos x$ cumple dato de contorno y ecuación]. [0.5 puntos]

3. Resolver, utilizando la transformada de Fourier, $\begin{cases} u_t-2t^{-3}u_{xx}=0\,,\ x\in\mathbf{R},\ t>1 \\ u(x,1)=\mathrm{e}^{-x^2/2},\ u \text{ acotada} \end{cases}$. [0.3 puntos]

1*. Resolver $yu_y-(x+1)u_x=u+2x$ con el dato $u(1,y)=y$. [0.5 puntos]

2*. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\geq 0\,,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=1\,,u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=\cos t \end{cases}$. **a]** Hallar $u(\frac{\pi}{3},2\pi)$. **b]** Hallar $u(x,\pi)$ para $x\geq 2\pi$. [Ayuda: $v=\cos t\cos x$ cumple dato de contorno y ecuación]. [0.5 puntos]

3*. Resolver, utilizando la transformada de Fourier, $\begin{cases} u_t-t^{-2}u_{xx}=0\,,\ x\in\mathbf{R},\ t>1 \\ u(x,1)=\mathrm{e}^{-x^2},\ u \text{ acotada} \end{cases}$. [0.3 puntos]

Control 1 de Métodos II (C)

1. Resolver $u_y+u_x=u-x-y$ con el dato $u(x,-2)=x$. [0.5 puntos]

2. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\geq 0\,,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=\begin{cases}(x-1)(x-4),\ x\in[1,4] \\ 0,\ x\in[0,1]\cup[4,\infty)\end{cases} \\ u_t(x,0)=u(0,t)=0 \end{cases}$. **a]** Hallar $u(1,3)$. **b]** Dibujar $u(x,3)$. **c]** Hallar $u(x,3)$ para $x\in[0,1]$. [0.5 puntos]

3. Resolver, utilizando la $\mathcal{F}$, $\begin{cases} u_{tt}-9u_{xx}=0,\ x,t\in\mathbf{R} \\ u(x,1)=f(x),u_t(x,1)=0 \end{cases}$. [Con $s=t-1$ y D'Alembert se comprueba el resultado]. [0.3 puntos]

Controles 2 y 2* de Métodos II (E)

1. Sea $3xy''+2y'+4y=0$. Hallar los 4 primeros términos no nulos del desarrollo de una solución que se anule en $x=0$ dando la regla de recurrencia. ¿Para qué x converge la serie? [0.4 puntos]

2. Sea (P) $\begin{cases} x^2y''+xy'+\lambda y=0 \\ y'(1)=y'(2)=0 \end{cases}$. **a]** Hallar sus autovalores λ_n y autofunciones $\{y_n\}$. [0 directamente o haciendo $x=\mathrm{e}^s$]. [0.6 puntos]
b] Hallar el primer término del desarrollo de $f(x)=x$ en serie de las autofunciones $\{y_n\}$ de (P).
c] Precisar para qué valor de a tiene infinitas soluciones $xy''+y'=x-a$ con esos datos de contorno.

3. Resolver por separación de variables $\begin{cases} u_{tt}-\pi^2u_{xx}=0\,,\ x\in[0,\frac{\pi}{2}]\,,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0\,,\ u(0,t)=t\,,u_x(\frac{\pi}{2},t)=0 \end{cases}$. [0.5 puntos]

1*. Sea $3xy''-2y'+4y=0$. Hallar los 4 primeros términos no nulos del desarrollo de una solución que se anule en $x=0$, dando la regla de recurrencia. ¿Para qué x converge la serie? [0.4 puntos]

2*. Sea (P) $\begin{cases} x^2y''+xy'+\lambda y=0 \\ y'(1)=y'(\mathrm{e})=0 \end{cases}$. **a]** Hallar sus autovalores λ_n y autofunciones $\{y_n\}$. [0 directamente o haciendo $x=\mathrm{e}^s$]. [0.6 puntos]
b] Hallar el primer término del desarrollo de $f(x)=x$ en serie de las autofunciones $\{y_n\}$ de (P).
c] Precisar para qué valor de a tiene infinitas soluciones $x^2y''+xy'=x-a$ con esos datos de contorno.

3*. Resolver por separación de variables $\begin{cases} u_{tt}-4u_{xx}=0\,,\ x\in[0,\frac{1}{2}]\,,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0\,,\ u(0,t)=t\,,u_x(\frac{1}{2},t)=0 \end{cases}$. [0.5 puntos]

Control 2 de Métodos II (C)

1. Sea $x^2y''+(\frac{1}{4}-4x^2)y=0$. Hallar los 3 primeros términos no nulos del desarrollo en torno a $x=0$ de **una** solución, dando la regla de recurrencia. ¿Están acotadas todas las soluciones en $x=0$? [0.4 puntos]

2. Sea (P) $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y'(-\pi)=y'(\pi)=0 \end{cases}$. **a]** Haciendo $x+\pi=s$, deducir todas sus autofunciones $\{y_n\}$. Calcular directamente las 2 primeras y_0 e y_1 y comprobar.
b] Hallar el primer término no nulo del desarrollo de $f(x)=x$ en serie de autofunciones de (P).
c] Precisar cuántas soluciones tiene $y''+\frac{1}{9}y=x$ con esas condiciones de contorno. [0.6 puntos]

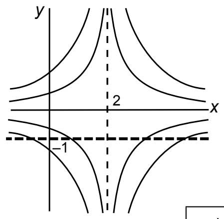
3. Resolver por separación de variables $\begin{cases} u_t-u_{xx}=2\,,\ x\in(0,\frac{\pi}{2})\,,\ t>0 \\ u(x,0)=0\,,\ u_x(0,t)=u(\frac{\pi}{2},t)=0 \end{cases}$. [0.5 puntos]

Soluciones de los controles 1 - 1* de Métodos II - E

1. Resolver $yu_y-(x-2)u_x=u-2x$ con el dato $u(x,-1)=x$. [0.5 puntos]

1*. Resolver $yu_y-(x+1)u_x=u+2x$ con el dato $u(1,y)=y$. [0.5 puntos]

1. $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x-2}$ (lineal). $y=C\,e^{-\int\frac{dx}{x-2}}=\frac{C}{x-2}$. Características: $\boxed{xy-2y=C}$.



Haciendo $\begin{cases}\xi=xy-2y\\ \eta=y\end{cases}\to\begin{cases}u_y=(x-2)u_\xi+u_\eta\\ u_x=yu_\xi\end{cases}$, $u_\eta=\frac{u}{y}-2\frac{x}{y}=\frac{u}{\eta}-\frac{2\xi}{\eta^2}-\frac{4}{\eta}$.

$$u=p(\xi)\eta-\eta\int\big(\tfrac{2\xi}{\eta^3}+\tfrac{4}{\eta^2}\big)d\eta=p(\xi)\eta+\tfrac{\xi}{\eta}+4=\boxed{p(xy-2y)\,y+x+2}.$$

O bien: $\begin{cases}\xi=xy-2y\\ \eta=x\end{cases}\to\begin{cases}u_y=(x-2)u_\xi\\ u_x=yu_\xi+u_\eta\end{cases}$, $u_\eta=-\frac{u}{\eta-2}+\frac{2\eta}{\eta-2}$. $u=\frac{p^*(\xi)}{\eta-2}+\frac{1}{\eta-2}\int 2\eta\,d\eta=\frac{p^*(\xi)+\eta^2}{\eta-2}=\boxed{\frac{p^*(xy-2y)+x^2}{x-2}}$.

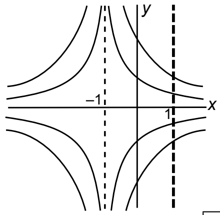
Imponiendo el dato inicial: $u(x,-1)=-p(2-x)+x+2=x$, $p(2-x)=2$, $p(v)\equiv 2$, $\boxed{u(x,y)=2y+x+2}$.

O bien, $u(x,-1)=\frac{p^*(2-x)+x^2}{x-2}=x$, $p^*(2-x)=-2x$, $p^*(v)=2v-4$, $u=\frac{2y(x-2)+x^2-4}{x-2}=2y+x+2$.

Comprobamos: $u(x,-1)=x$, y además: $yu_y-(x-2)u_x=2y-x+2=2y+x+2-2x=u-2x$.

Esta solución es la única, pues $y=-1$ no es tangente a las características, o porque $\Delta=-1\neq 0$.

1*. $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x+1}$ (lineal). $y=C\,e^{-\int\frac{dx}{x+1}}=\frac{C}{x+1}$. Características: $\boxed{xy+y=C}$.



Haciendo $\begin{cases}\xi=xy+y\\ \eta=y\end{cases}\to\begin{cases}u_y=(x+1)u_\xi+u_\eta\\ u_x=yu_\xi\end{cases}$, $u_\eta=\frac{u}{y}+2\frac{x}{y}=\frac{u}{\eta}+\frac{2\xi}{\eta^2}-\frac{2}{\eta}$.

$$u=p(\xi)\eta+\eta\int\big(\tfrac{2\xi}{\eta^3}-\tfrac{2}{\eta^2}\big)d\eta=p(\xi)\eta-\tfrac{\xi}{\eta}+2=\boxed{p(xy+y)\,y-x+1}.$$

O bien: $\begin{cases}\xi=xy+y\\ \eta=x\end{cases}\to\begin{cases}u_y=(x+1)u_\xi\\ u_x=yu_\xi+u_\eta\end{cases}$, $u_\eta=-\frac{u}{\eta+1}-\frac{2\eta}{\eta+1}$. $u=\frac{p^*(\xi)}{\eta+1}+\frac{1}{\eta+1}\int 2\eta\,d\eta=\frac{p^*(\xi)+\eta^2}{\eta+1}=\boxed{\frac{p^*(xy+y)-x^2}{x+1}}$.

Imponiendo el dato inicial: $u(1,y)=p(2y)y=y$, $p(2y)=1$, $p(v)\equiv 1$, $\boxed{u(x,y)=y-x+1}$.

O bien, $u(1,y)=\frac{p^*(2y)-1}{2}=y$, $p^*(2y)=2y+1$, $p^*(v)=v+1$, $u=\frac{y(x+1)+1-x^2}{x+1}=y-x+1$.

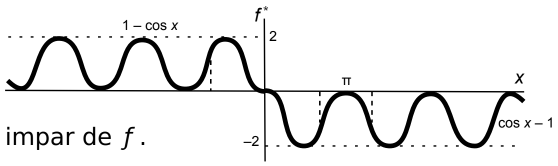
Comprobamos: $u(1,y)=y$, y además: $yu_y-(x+1)u_x=y+x+1=y-x+1+2x=u+2x$.

Esta solución es la única, pues $x=1$ no es tangente a las características, o porque $\Delta=2\neq 0$.

2. Sea $\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=0,\ x\geq 0,\ t\in\mathbf{R}\\ u(x,0)=u_t(x,0)=0\\ u(0,t)=1-\cos t\end{cases}$. **a]** Hallar $u(\frac{\pi}{3},\pi)$. **b]** Hallar $u(x,\pi)$ para $x\geq\pi$. [0.5 puntos]
[Ayuda: $v=1-\cos t\cos x$ cumple dato de contorno y ecuación].

2*. Sea $\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=0,\ x\geq 0,\ t\in\mathbf{R}\\ u(x,0)=1,\ u_t(x,0)=0\\ u(0,t)=\cos t\end{cases}$. **a]** Hallar $u(\frac{\pi}{3},2\pi)$. **b]** Hallar $u(x,\pi)$ para $x\geq 2\pi$. [0.5 puntos]
[Ayuda: $v=\cos t\cos x$ cumple dato de contorno y ecuación].

2. $w=u-v$, $v_t=\operatorname{sen}t\cos x\to\begin{cases}w_{tt}-w_{xx}=0-0=0,\ x\geq 0\\ w(x,0)=\cos x-1\\ w_t(x,0)=w(0,t)=0\end{cases}$.



Resolvemos $\begin{cases}w_{tt}-w_{xx}=0,\ x,t\in\mathbf{R}\\ w(x,0)=f^*(x),\ w_t(x,0)=0\end{cases}$, con f^* extensión impar de f.

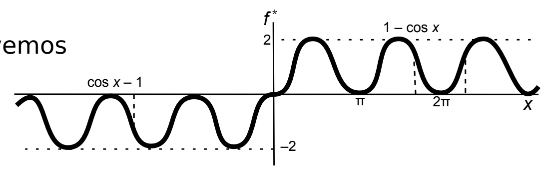
Su solución viene dada por $w(x,t)=\frac{1}{2}\big[f^*(x+t)+f^*(x-t)\big]$. En particular:

a] $w(\frac{\pi}{3},\pi)=\frac{1}{2}\big[f^*(\frac{4\pi}{3})+f^*(-\frac{2\pi}{3})\big]=\frac{1}{2}\big[f(\frac{4\pi}{3})-f(\frac{2\pi}{3})\big]=0$, $u(\frac{\pi}{3},\pi)=0-1-\cos\frac{\pi}{3}\cos\pi=\boxed{\frac{3}{2}}$.

b] Para $x\geq\pi$ es $w(x,\pi)=\frac{1}{2}\big[f(x+\pi)+f(x-\pi)\big]=\frac{1}{2}\big[\cos(x+\pi)+\cos(x-\pi)-2\big]=-1-\cos x\to$

$u(x,\pi)=-1-\cos x+1-\cos\pi\cos x=\boxed{0}$ [todavía no ha llegado la perturbación del origen].

2*. $w=u-v$, $v_t=-\operatorname{sen}t\cos x\to\begin{cases}w_{tt}-w_{xx}=0,\ x\geq 0\\ w(x,0)=1-\cos x\\ w_t(x,0)=w(0,t)=0\end{cases}$. Resolvemos



$\begin{cases}w_{tt}-w_{xx}=0,\ x,t\in\mathbf{R}\\ w(x,0)=f^*(x),\ w_t(x,0)=0\end{cases}$, con f^* extensión impar de f.

Su solución viene dada por $w(x,t)=\frac{1}{2}\big[f^*(x+t)+f^*(x-t)\big]$. En particular:

a] $w(\frac{\pi}{3},2\pi)=\frac{1}{2}\big[f^*(\frac{7\pi}{3})+f^*(-\frac{5\pi}{3})\big]=\frac{1}{2}\big[f(\frac{7\pi}{3})-f(\frac{5\pi}{3})\big]=0$, $u(\frac{\pi}{3},2\pi)=0+\cos\frac{\pi}{3}\cos 2\pi=\boxed{\frac{1}{2}}$.

b] Para $x\geq\pi$ es $w(x,\pi)=\frac{1}{2}\big[f(x+\pi)+f(x-\pi)\big]=\frac{1}{2}\big[2-\cos(x+\pi)-\cos(x-\pi)\big]=1+\cos x\to$

$u(x,\pi)=1+\cos x+\cos\pi\cos x=\boxed{1}$ [todavía no ha llegado la perturbación del origen].

3. Resolver, utilizando la transformada de Fourier, $\begin{cases} u_t-2t^{-3}u_{xx}=0\,,\ x\in\mathbf{R}\,,\ t>1 \\ u(x,1)=\mathrm{e}^{-x^2/2},\ u \text{ acotada}\end{cases}$. [0.3 puntos]

3*. Resolver, utilizando la transformada de Fourier, $\begin{cases} u_t-t^{-2}u_{xx}=0\,,\ x\in\mathbf{R}\,,\ t>1 \\ u(x,1)=\mathrm{e}^{-x^2},\ u \text{ acotada}\end{cases}$. [0.3 puntos]

3. $\begin{cases}\hat u_t+2k^2t^{-3}\,\hat u=0\\ \hat u(k,1)=\mathrm{e}^{-k^2/2}\end{cases} \xrightarrow[\text{EDO en } t]{} \hat u(k,t)=p(k)\,\mathrm{e}^{k^2/t^2} \underset{\text{d.i.}}{=} \mathrm{e}^{k^2/t^2}\,\mathrm{e}^{-3k^2/2}=\mathrm{e}^{-k^2\frac{3t^2-2}{2t^2}} \xrightarrow{t \text{ cte}} \boxed{u(x,t)=\frac{t}{\sqrt{3t^2-2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2x^2}{6t^2-4}}}$.

3*. $\begin{cases}\hat u_t+k^2t^{-2}\,\hat u=0\\ \hat u(k,1)=\frac{1}{\sqrt2}\mathrm{e}^{-k^2/4}\end{cases} \xrightarrow{\text{EDO en } t} \hat u(k,t)=p(k)\,\mathrm{e}^{k^2/t} \underset{\text{d.i.}}{=} \frac{1}{\sqrt2}\,\mathrm{e}^{k^2/t}\mathrm{e}^{-5k^2/4}=\frac{1}{\sqrt2}\,\mathrm{e}^{-k^2\frac{5t-4}{4t}} \xrightarrow{t \text{ cte}} \boxed{u(x,t)=\frac{\sqrt t}{\sqrt{5t-4}}\,\mathrm{e}^{-\frac{tx^2}{5t-4}}}$

[Sólo hemos tenido que utilizar: $\mathcal F[f'']=-k^2\hat f$, $\mathcal F[\mathrm{e}^{-ax^2}]=\frac{1}{\sqrt{2a}}\,\mathrm{e}^{-k^2/4a}$ y $\mathcal F^{-1}[\mathrm{e}^{-ak^2}]=\frac{1}{\sqrt{2a}}\,\mathrm{e}^{-x^2/4a}$].

Soluciones del control 1 de Métodos II - C

1. Resolver $u_y+u_x=u-x-y$ con el dato $u(x,-2)=x$. ¿Es única la solución? [0.5 puntos]

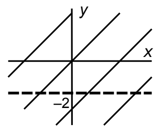
$\frac{dy}{dx}=1$. $\int dy=\int dx+C$. Características: $\boxed{y-x=C}$.

Haciendo $\begin{cases}\xi=y-x\\ \eta=y\end{cases} \to \begin{cases}u_y=u_\xi+u_\eta\\ u_x=-u_\xi\end{cases}$, $u_\eta=u-x-y=u+\xi-2\eta$. $u=p(\xi)\,\mathrm{e}^\eta+2\eta-\xi+2=\boxed{p(y-x)\,\mathrm{e}^y+x+y+2}$.

O bien: $\begin{cases}\xi=y-x\\ \eta=x\end{cases} \to \begin{cases}u_y=u_\xi\\ u_x=-u_\xi+u_\eta\end{cases}$, $u_\eta=u-x-y=u-\xi-2\eta$. $u=p(\xi)\,\mathrm{e}^\eta+2\eta+\xi+2=\boxed{p^*(y-x)\,\mathrm{e}^x+x+y+2}$.

[Para las u_p , mejor que integrar, probamos $u_p=A\eta+B \to A=2\,,B=2-\xi$, $A=2\,,B=2+\xi$ respectivamente].

Imponiendo el dato inicial: $\begin{matrix}u(x,-2)=p(-x-2)\,\mathrm{e}^{-2}+x=x \to p(v)\equiv0\\ u(x,-2)=p^*(-x-2)\,\mathrm{e}^x+x=x \to p^*(v)\equiv0\end{matrix}$, $\boxed{u(x,y)=x+y+2}$.



Comprobamos: $u(x,-2)=x$, y además: $u_y+u_x=1+1=x+y+2-x-y=u-x-y$.

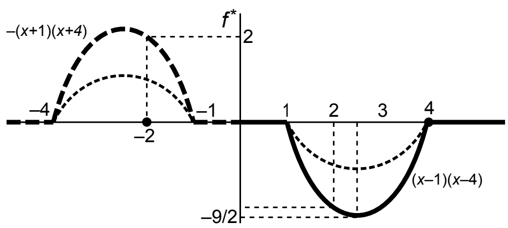
[Como los datos se dan sobre una recta no característica, la solución debía ser única].

2. Sea $\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\ge0\,,\ t\in\mathbf{R}\\ u(x,0)=\begin{cases}(x-1)(x-4),\ x\in[1,4]\\ 0,\ x\in[0,1]\cup[4,\infty)\end{cases}\\ u_t(x,0)=u(0,t)=0\end{cases}$. **a]** Hallar $u(1,3)$. **b]** Dibujar $u(x,3)$. **c]** Hallar $u(x,3)$ para $x\in[0,1]$. [0.5 puntos]

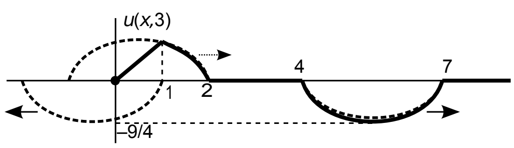
Para usar D'Alembert hay que extender impar a todo $\mathbf{R}$:

a] $u(1,3)=\frac12\Big[f^*(4)+f^*(-2)\Big]=\frac12\Big[f(4)-f(2)\Big]=\frac12[0+2]=\boxed{1}$.

b] $u(x,3)=\frac12\big[f^*(x+3)+f^*(x-3)\big]$. Hay que trasladar la gráfica de $\frac12 f^*$ a izquierda y derecha 3 unidades y sumar:



[En ese instante están la onda que va hacia la derecha y la suma de la que va hacia la izquieda con la extensión que viene. Lo que pasa en $[0,1]$ lo precisa el apartado siguiente].



c] Si $x\in[0,1]$, $f^*(x+3)$ la da la incial y $f^*(x-3)$ la extensión:

$$f(x+3)-f(3-x)=(x+2)(x-1)-(2-x)(-x-1)=2x$$

$\to$ $\boxed{u(x,3)=x\,,\text{ si } x\in[0,1]}$.

3. Resolver, utilizando la $\mathcal F$, $\begin{cases}u_{tt}-9u_{xx}=0\,,\ x,t\in\mathbf{R}\\ u(x,1)=f(x)\,,u_t(x,1)=0\end{cases}$. [Con $s=t-1$ y D'Alembert se comprueba el resultado]. [0.3 puntos]

$\begin{cases}\hat u_{tt}+9k^2\hat u=0\\ \hat u(k,1)=\hat f(k)\,,\hat u_t(k,1)=0\end{cases} \xrightarrow{\mu=\pm3k\mathrm{i}} \hat u(k,t)=p(k)\,\mathrm{e}^{3k\mathrm{i}t}+q(k)\,\mathrm{e}^{-3k\mathrm{i}t} \xrightarrow{c.i.} \begin{matrix}p(k)\,\mathrm{e}^{3k\mathrm{i}}+q(k)\,\mathrm{e}^{-3k\mathrm{i}}=\hat f(k)\\ 3k\mathrm{i}\big[p(k)\,\mathrm{e}^{3k\mathrm{i}}-q(k)\,\mathrm{e}^{-3k\mathrm{i}}\big]=0\end{matrix}$

$2p(k)\,\mathrm{e}^{3k\mathrm{i}}=\hat f(k)$, $p(k)=\frac12\hat f(k)\,\mathrm{e}^{-3k\mathrm{i}}$, $q(k)=\frac12\hat f(k)\,\mathrm{e}^{3k\mathrm{i}}$, $\hat u(k,t)=\frac12\big[\hat f(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(3t-3)}+\hat f(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(3-3t)}\big]$.

Como $\mathcal F^{-1}\big[\hat f(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}ka}\big]=f(x-a)$, deducimos que $\boxed{u(x,t)=\frac12\big[f(x+3t-3)+f(x-3t+3)\big]}$.

[Haciendo $s=t-1$, se tiene el problema $\begin{cases}u_{ss}-9u_{xx}=0\,,\ x,s\in\mathbf{R}\\ u(x,0)=f(x)\,,u_s(x,0)=0\end{cases} \to u(x,s)=\frac12\big[f(x+3s)+f(x-3s)\big]$]

Soluciones de los controles 2-2* de Métodos II (E)

1. Sea $3xy''+2y'+4y=0$. Hallar los 4 primeros términos no nulos del desarrollo de una solución que se anule en $x=0$ dando la regla de recurrencia. ¿Para qué x converge la serie? [0.4 puntos]

1*. Sea $3xy''-2y'+4y=0$. Hallar los 4 primeros términos no nulos del desarrollo de una solución que se anule en $x=0$, dando la regla de recurrencia. ¿Para qué x converge la serie? [0.4 puntos]

1. $x=0$ es punto singular regular de $x^2y''+x\frac{2}{3}y'+\frac{4x}{3}y=0$ con $\lambda(\lambda-1)+\frac{2}{3}\lambda=0 \to \lambda_1=\frac{1}{3},\ \lambda_2=0$.

Se anula en $x=0$ la $y_1=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+1/3}$, $c_0\neq 0$ (no analítica). La $y_2=\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_kx^k$ no se anula en 0 (y es analítica).

$$\sum_0\left[3(k+\tfrac{1}{3})(k-\tfrac{2}{3})c_kx^{k-2/3}+2(k+\tfrac{1}{3})c_kx^{k-2/3}+4c_kx^{k+1/3}\right]=\sum_0\left[k(3k+1)c_kx^{k-2/3}+4c_kx^{k+1/3}\right]=0 \to$$

$x^{-2/3}$: $0\cdot c_0=0$, c_0 indeterminado; $x^{1/3}$: $4c_1+4c_0=0$, $c_1=-c_0$; $x^{k-2/3}$: $k(3k+1)c_k+4c_{k-1}=0$,

$$\boxed{c_k=-\frac{4}{k(3k+1)}\,c_{k-1}} \to c_2=-\frac{2}{7}c_1=\frac{2}{7}c_0,\ c_3=-\frac{2}{15}c_2=-\frac{4}{105}c_0 \to \boxed{y_1=x^{1/3}\left[1-x+\frac{2}{7}x^2-\frac{4}{105}x^3+\cdots\right]}.$$

Esta serie, según Frobenius, converge al menos donde lo hacían $a^*=\frac{2}{3}$ y $b^*=\frac{4x}{3}$, es decir, $\forall x$.

1*. $x=0$ es punto singular regular de $x^2y''-x\frac{2}{3}y'+\frac{4x}{3}y=0$ con $\lambda(\lambda-1)-\frac{2}{3}\lambda=0 \to \lambda_1=\frac{5}{3},\ \lambda_2=0$.

Se anula en $x=0$ la $y_1=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+5/3}$, $c_0\neq 0$ (no analítica). La $y_2=\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_kx^k$ no se anula en 0 (y es analítica).

$$\sum_0\left[3(k+\tfrac{5}{3})(k+\tfrac{2}{3})c_kx^{k+2/3}-2(k+\tfrac{5}{3})c_kx^{k+2/3}+4c_kx^{k+5/3}\right]=\sum_0\left[k(3k+5)c_kx^{k+2/3}+4c_kx^{k+5/3}\right]=0 \to$$

$x^{2/3}$: $0\cdot c_0=0$, c_0 indeterminado; $x^{5/3}$: $8c_1+4c_0=0$, $c_1=-\frac{1}{2}c_0$; $x^{k+2/3}$: $k(3k+5)c_k+4c_{k-1}=0$,

$$\boxed{c_k=-\frac{4}{k(3k+5)}\,c_{k-1}} \to c_2=-\frac{2}{11}c_1=\frac{1}{11}c_0,\ c_3=-\frac{2}{21}c_2=-\frac{2}{231}c_0 \to \boxed{y_1=x^{5/3}\left[1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{11}x^2-\frac{2}{231}x^3+\cdots\right]}.$$

Esta serie, según Frobenius, converge al menos donde lo hacían $a^*=-\frac{2}{3}$ y $b^*=\frac{4x}{3}$, es decir, $\forall x$.

2. Sea (P) $\begin{cases}x^2y''+xy'+\lambda y=0\\ y'(1)=y'(2)=0\end{cases}$. **a]** Hallar sus autovalores λ_n y autofunciones $\{y_n\}$. [0.6 puntos]
[0 directamente o haciendo $x=e^s$].
b] Hallar el primer término del desarrollo de $f(x)=x$ en serie de las autofunciones $\{y_n\}$ de (P).
c] Precisar para qué valor de a tiene infinitas soluciones $xy''+y'=x-a$ con esos datos de contorno.

2*. Sea (P) $\begin{cases}x^2y''+xy'+\lambda y=0\\ y'(1)=y'(e)=0\end{cases}$. **a]** Hallar sus autovalores λ_n y autofunciones $\{y_n\}$. [0.6 puntos]
[0 directamente o haciendo $x=e^s$].
b] Hallar el primer término del desarrollo de $f(x)=x$ en serie de las autofunciones $\{y_n\}$ de (P).
c] Precisar para qué valor de a tiene infinitas soluciones $x^2y''+xy'=x-a$ con esos datos de contorno.

En forma autoadjunta: $(xy')'+\lambda\frac{1}{x}y=0$ [peso $r(x)=\frac{1}{x}$]. Son problemas separados regulares con $\lambda\geq 0$.

Las soluciones generales de las ecuaciones de Euler son: $y=c_1+c_2\ln x$ ($\lambda=0$)
$y=c_1\cos(w\ln x)+c_2\,\mathrm{sen}(w\ln x)$ ($\lambda>0$, $w=\sqrt{\lambda}$)

Haciendo $x=e^s$ la ecuación pasa a ser: $\frac{d^2y}{ds^2}+\lambda y=0$.

2. a] Para $\lambda=0$: $\begin{matrix}y'(1)=c_2=0\\ y'(2)=c_2/2=0\end{matrix} \to \lambda=0$ es autovalor con autofunción $\boxed{y_0=\{1\}}$.

$\lambda>0$: $y'=\frac{w}{x}\left[-c_1\,\mathrm{sen}(w\ln x)+c_2\cos(w\ln x)\right]$, $\begin{matrix}y'(1)=wc_2=0\downarrow\\ y'(2)=-\frac{w}{2}c_1\,\mathrm{sen}(w\ln 2)=0\nearrow\end{matrix}$ $\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{(\ln 2)^2}$, $\boxed{y_n=\{\cos\frac{n\pi\ln x}{\ln 2}\}}$.

[$\frac{d^2y}{ds^2}+\lambda y=0$, $y(s=0)=y'(s=\ln 2)$ es problema conocido con esos mismos λ_n y con $y_n(s)=\{\cos\frac{n\pi s}{\ln 2}\}\nearrow$].

b] $c_0=\frac{\langle x,1\rangle}{\langle 1,1\rangle}=\boxed{\frac{1}{\ln 2}}$, pues $\langle x,1\rangle=\int_1^2\frac{x}{x}dx=1$ y $\langle 1,1\rangle=\int_1^2\frac{1}{x}dx=\ln 2$.

c] Homogéneo ($\lambda=0$) con infinitas soluciones $\{1\}$, $f(x)=x-a$, $\int_1^2 1\cdot f=\frac{3}{2}-a$. Infinitas soluciones si $\boxed{a=\frac{3}{2}}$.

2*. a] $\begin{matrix}y'(1)=c_2=0\\ y'(2)=c_2/e=0\end{matrix} \to \boxed{y_0=\{1\}}$. $\begin{matrix}y'(1)=wc_2=0\downarrow\\ y'(2)=-\frac{w}{e}c_1\,\mathrm{sen}\,w=0\nearrow\end{matrix}$ $\lambda_n=n^2\pi^2$, $\boxed{y_n=\{\cos(n\pi\ln x)\}}$, $n=1,2,\ldots$

[$\frac{d^2y}{ds^2}+\lambda y=0$, $y(s=0)=y'(s=1)$ es problema conocido con esos λ_n y con $y_n(s)=\{\cos n\pi s\}\uparrow$].

b] $c_0=\frac{\langle x,1\rangle}{\langle 1,1\rangle}=\boxed{e-1}$, pues $\langle x,1\rangle=\int_1^e\frac{x}{x}dx=e-1$ y $\langle 1,1\rangle=\int_1^e\frac{1}{x}dx=1$.

c] Homogéneo ($\lambda=0$) con soluciones $\{1\}$, $f(x)=1-\frac{a}{x}$, $\int_1^e 1\cdot f=e-1-a$. Infinitas soluciones si $\boxed{a=e-1}$.

3. Resolver por separación de variables $\begin{cases} u_{tt}-\pi^2 u_{xx}=0\,,\ x\in[0,\frac{\pi}{2}]\,,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0\,,\ u(0,t)=t\,,\ u_x(\frac{\pi}{2},t)=0 \end{cases}$. [0.5 puntos]

3*. Resolver por separación de variables $\begin{cases} u_{tt}-4u_{xx}=0\,,\ x\in[0,\frac{1}{2}]\,,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0\,,\ u(0,t)=t\,,\ u_x(\frac{1}{2},t)=0 \end{cases}$. [0.5 puntos]

3. Una v clara que satisface las condiciones de contorno es $v=t$. Haciendo $w=u-t$:

$\begin{cases} w_{tt}-\pi^2 w_{xx}=0\,,\ x\in[0,\frac{\pi}{2}]\,,\ t\in\mathbf{R} \\ w(x,0)=0,\ w_t(x,0)=-1\,,\ w(0,t)=w_x(\frac{\pi}{2},t)=0 \end{cases}$. Conocidas son separación de variables y autofunciones:

$$\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=X'(\pi/2)=0 \end{cases} \to X_n=\{\operatorname{sen}(2n-1)x\}\ ;\quad \begin{cases} T''+\lambda\pi^2 T=0 \\ T(0)=0 \end{cases} \to T_n=\{\operatorname{sen}(2n-1)\pi t\}\,,\ n=1,2,\dots$$

Imponiendo a $w=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}(2n-1)\pi t \operatorname{sen}(2n-1)x$ el dato $w_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)\pi c_n \operatorname{sen}(2n-1)x=-1 \to$

$$(2n-1)\pi c_n=\tfrac{2}{\pi/2}\int_0^{\pi/2}-\operatorname{sen}(2n-1)x\,dx=\tfrac{-4}{\pi(2n-1)}\,.\quad \boxed{u=t-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\operatorname{sen}(2n-1)\pi t \operatorname{sen}(2n-1)x}\,.$$

3*. $\begin{cases} w_{tt}-4w_{xx}=0\,,\ x\in[0,\frac{1}{2}]\,,\ t\in\mathbf{R} \\ w(x,0)=0,\ w_t(x,0)=-1\,,\ w(0,t)=w_x(\frac{1}{2},t)=0 \end{cases}$. Conocidas separación de variables y autofunciones:

$$\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=X'(1/2)=0 \end{cases} \to X_n=\{\operatorname{sen}(2n-1)\pi x\}\ ;\quad \begin{cases} T''+4\lambda T=0 \\ T(0)=0 \end{cases} \to T_n=\{\operatorname{sen}(4n-2)\pi t\}\,,\ n=1,2,\dots$$

Probamos: $w=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}(4n-2)\pi t \operatorname{sen}(2n-1)\pi x$. $w_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}(4n-2)\pi c_n \operatorname{sen}(2n-1)\pi x=-1 \to$

$$(4n-2)\pi c_n=\tfrac{2}{1/2}\int_0^{1/2}-\operatorname{sen}(2n-1)\pi x\,dx=\tfrac{-4}{\pi(2n-1)}\,.\quad \boxed{u=t-\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\operatorname{sen}(4n-2)\pi t \operatorname{sen}(2n-1)\pi x}\,.$$

No se ha explicado en clase cómo resolver estos problemas mediante D'Alembert. Para que se cumpla $w(0,t)=0$ se debe extender impar respecto a 0 y, por el otro dato, par respecto al extremo derecho L. Resulta entonces una g^* de periódo $4L$, que es precisamente el periodo de los cosenos impares que aparecen en la serie solución. Análoga situación (con senos) se da cuando la w_x aparece en la izquierda y la w en la derecha.

Soluciones del control 2 de Métodos II (C)

1. Sea $x^2y''+(\frac{1}{4}-4x^2)y=0$. Hallar los 3 primeros términos no nulos del desarrollo en torno a $x=0$ de **una** solución, dando la regla de recurrencia. ¿Están acotadas todas las soluciones en $x=0$? [0.4 puntos]

$x=0$ es singular regular con $r(r-1)+0\cdot r+\frac{1}{4}=(r-\frac{1}{2})^2=0$, $r=\frac{1}{2}$ doble. Calculamos $y_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+1/2}$, $c_0\neq 0$.

$$\sum_0\left[(k+\tfrac{1}{2})(k-\tfrac{1}{2})c_kx^{k+1/2}+\tfrac{1}{4}c_kx^{k+1/2}-4c_kx^{k+5/2}\right]=\sum_0\left[k^2c_kx^{k+1/2}-4c_kx^{k+5/2}\right]=0\ \to$$

$$x^{1/2}:\ 0\cdot c_0=0,\ c_0\text{ indeterminado};\quad x^{3/2}:\ c_1=0;\quad x^{5/2}:\ 4c_2-4c_0=0,\ c_2=c_0;$$

$$x^{k+1/2}:\ k^2c_k-4c_{k-2}=0,\ c_k=\tfrac{4}{k^2}c_{k-2},\text{ regla de recurrencia}\ \to\ c_3=0,\ c_4=\tfrac{4}{16}c_2=\tfrac{1}{4}c_0,\dots\ \to$$

$$\boxed{y_1=x^{1/2}\left[1+x^2+\tfrac{1}{4}x^4+\cdots\right]}\quad\text{solución claramente } \textbf{acotada} \text{ en } x=0.$$

La otra solución $y_2=x^{3/2}\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k+y_1\ln x$ está también **acotada** en el origen (pues $x^{1/2}\ln x \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$).

2. Sea (P) $\begin{cases}y''+\lambda y=0\\ y'(-\pi)=y'(\pi)=0\end{cases}$. **a]** Haciendo $x+\pi=s$, deducir todas sus autofunciones $\{y_n\}$. Calcular directamente las 2 primeras y_0 e y_1 y comprobar.
b] Hallar el primer término no nulo del desarrollo de $f(x)=x$ en serie de autofunciones de (P).
c] Precisar cuántas soluciones tiene $y''+\frac{1}{9}y=x$ con esas condiciones de contorno. [0.6 puntos]

a] $x+\pi=s\ \to \begin{cases}y''+\lambda y=0\\ y'(0)=y'(2\pi)=0\end{cases}$. Formulario: $\lambda_n=\frac{n^2}{4}$, $n=0,1,2,\dots$, $y_n=\{\cos\frac{ns}{2}\}=\left\{\cos\frac{n(x+\pi)}{2}\right\}$ $(y_0=\{1\})$.

Como $\alpha\cdot\alpha'=\beta\cdot\beta'=q=0$, todos los $\lambda\geq 0$. $\lambda=0\to y=c_1+c_2x\to \begin{matrix}c_2=0\\ c_2=0\end{matrix}\ \to\ \boxed{y_0=\{1\}}$.

$\lambda>0$: $\begin{matrix}y=c_1\cos wx+c_2\,\mathrm{sen}\,wx\\ y'=-wc_1\,\mathrm{sen}\,wx+wc_2\cos wx\end{matrix}$. $\begin{matrix}y'(-\pi)=w(c_1\,\mathrm{sen}\,w\pi+c_2\cos w\pi)=0\\ y'(\pi)=w(-c_1\,\mathrm{sen}\,w\pi+c_2\cos w\pi)=0\end{matrix}$. Tiene soluciones no nulas

si el determinante $\begin{vmatrix}\mathrm{sen}\,w\pi & \cos w\pi\\ -\mathrm{sen}\,w\pi & \cos w\pi\end{vmatrix}=2\,\mathrm{sen}\,w\pi\cos w\pi=\mathrm{sen}\,2w\pi=0\ \to\ w_n=\frac{n}{2},\ \lambda_n=\frac{n^2}{4},\ n=1,2,\dots$

En particular, para $n=1$, $\begin{matrix}y'(-\pi)=wc_1=0\\ y'(\pi)=-wc_1=0\end{matrix}$ y c_2 cualquiera. $\boxed{y_1=\{\mathrm{sen}\,\frac{x}{2}\}}=\left\{\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right\}$.

b] Como x es impar, $\langle x,1\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}x\,dx=0\Rightarrow c_0=\boxed{0}$. $c_1=\frac{\langle x,y_1\rangle}{\langle y_1,y_1\rangle}=\boxed{\frac{8}{\pi}}$, pues:

$$\langle x,y_1\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}x\,\mathrm{sen}\tfrac{x}{2}\,dx=-2x\cos\tfrac{x}{2}\Big]_{-\pi}^{\pi}+2\int_{-\pi}^{\pi}\cos\tfrac{x}{2}\,dx=8,\ \langle y_1,y_1\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{sen}^2\tfrac{x}{2}dx=\tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[1-\cos x]\,dx=\pi.$$

c] El problema homogéneo tiene sólo la solución trivial, puesto que $\lambda=\frac{1}{9}$ no es autovalor de (P).
Por tanto, el problema no homogéneo **tendrá solución única**.

[No se pide, pero la calculamos. Una y_p se ve casi a ojo: $y=c_1\cos\frac{x}{3}+c_2\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{3}+9x\overset{\text{c.c.}}{\to}y=9x-54\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{3}$].

3. Resolver por separación de variables $\begin{cases}u_t-u_{xx}=2,\ x\in(0,\frac{\pi}{2}),\ t>0\\ u(x,0)=0,\ u_x(0,t)=u(\frac{\pi}{2},t)=0\end{cases}$. [0.5 puntos]

Al ser un problema no homogéneo, debemos probar una serie con las autofunciones X_n del homogéneo.

Sabemos que al separar variables aparece $\begin{cases}X''+\lambda X=0\\ X'(0)=X(\pi/2)=0\end{cases}\to X_n=\{\cos(2n-1)x\}$, $n=1,2,\dots$ (formulario).

Llevamos a la ecuación $u=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\cos(2n-1)x\ \to\ \sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n'+(2n-1)^2T_n\right]\cos(2n-1)x=2=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos(2n-1)x$,

$$\text{siendo}\quad c_n=\frac{2}{\pi/2}\int_0^{\pi/2}2\cos(2n-1)x\,dx=\frac{8}{\pi(2n-1)}\,\mathrm{sen}\,\frac{(2n-1)\pi}{2}=\frac{8(-1)^{n+1}}{\pi(2n-1)}.$$

Del dato inicial: $u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\cos(2n-1)x=0\Rightarrow T_n(0)=0\ \forall n$. Resolvemos, pues: $\begin{cases}T_n'+(2n-1)^2T_n=c_n\\ T_n(0)=0\end{cases}$

$$\to\ T_n=Ce^{-(2n-1)^2t}+\frac{c_n}{(2n-1)^2}\overset{\text{d.i.}}{\to}C=-\frac{c_n}{(2n-1)^2},\quad \boxed{u(x,t)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}\left[1-e^{-(2n-1)^2t}\right]\cos(2n-1)x}.$$

[Se puede dar una $v=\frac{\pi^2}{4}-x^2$ que cumple ecuación y condiciones de contorno, que llevaría a problema homogéneo:

$$\begin{cases}w_t-w_{xx}=0\\ w(x,0)=x^2-\frac{\pi^2}{4},\ w_x(0,t)=w(\pi,t)=0\end{cases}\to\ w=\sum_{n=1}^{\infty}k_ne^{-(2n-1)^2t}\cos(2n-1)x,\text{ e imponiendo el dato inicial:}$$

$$k_n=\frac{2}{\pi/2}\int_0^{\pi/2}(x^2-\tfrac{\pi^2}{4})\cos(2n-1)x\,dx=\cdots=\frac{8(-1)^{n+1}}{\pi(2n-1)^3}\ \to\ u=\frac{\pi^2}{4}-x^2+\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^3}e^{-(2n-1)^2t}\cos\frac{(2n-1)x}{2},$$

que es otra forma de la solución que deja clara la distribución estacionaria v a la que tienden las temperaturas].