Soluciones del control 1 de Métodos II (C) (15-3-17)

1. Resolver $\begin{cases} 3yu_y - xu_x = 2xyu \\ u(-1,y) = 1 \end{cases}$, estudiando la unicidad de la solución. [0.4 puntos]

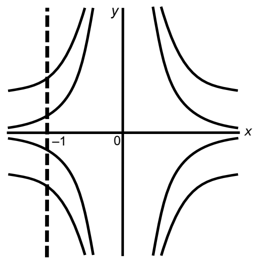
$\frac{dy}{dx} = -\frac{3y}{x} \xrightarrow{\text{lineal}} y = \frac{C}{x^3}$. O bien $\begin{cases} \xi = x^3 y \\ \eta = x \end{cases} \to u_\eta = -2yu = -2\xi\eta^{-3}u$, $u = p(\xi)e^{\xi\eta^{-2}}$, $u(x,y) = p(x^3y)\,e^{xy}$ solución general

O bien $\begin{cases} \xi = x^3 y \\ \eta = y \end{cases}$, $u_\eta = \frac{2}{3}xu = \frac{2}{3}\xi^{1/3}\eta^{-1/3}u$, $u = p(\xi)e^{\xi^{1/3}\eta^{2/3}}$, $u(x,y) = p(x^3y)\,e^{xy}$.

Imponiendo el dato: $u(-1,y) = p(-y)e^{-y} = 1$, $p(v) = e^{-v} \to \boxed{u(x,y) = e^{(x-x^3)y}}$.

$\Big[$Comprobamos: $3y(x-x^3)e^{\cdot\cdot} - y(x-3x^3)e^{\cdot\cdot} = 2xye^{\cdot\cdot}$ y además $u(-1,y) = e^0$ $\Big]$.

Es única porque la recta $x=-1$ no es tangente a las características.
O porque en el proceso de cálculo ha quedado $p(v)$ determinada de forma única $\forall v$. O porque $T(y) = 0\cdot 3y - 1\cdot(+1) = -1 \neq 0 \ \ \forall y$.

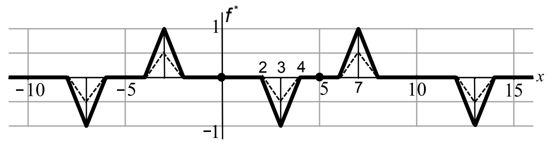


2. Sea $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0,\ x\in[0,5],\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0) = \begin{cases} 2-x,\ x\in[2,3] \\ x-4,\ x\in[3,4] \\ 0,\ \text{resto de } [0,5] \end{cases},\ u_t(x,0) = 0\,. \\ u(0,t) = u(5,t) = 0 \end{cases}$ Hallar el valor de $u(4,3)$. Dibujar $u(x,3)$. Hallar la expresión de $u(2,t)$ para $t\in[0,3]$. [0.4 puntos]

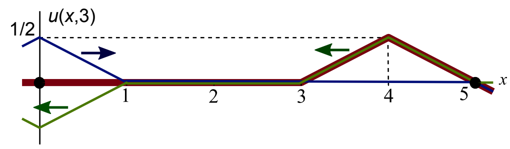
Extendemos $f(x)$ a $f^*(x)$ de forma impar y 10-periódica.

La solución viene dada por $u(x,t) = \frac{1}{2}\big[f^*(x+t) + f^*(x-t)\big]$.

$u(4,3) = \frac{1}{2}\big[f^*(7) + f^*(1)\big] = \frac{1}{2}\big[-f(3) + f(1)\big] = \frac{1}{2}[+1+0] = \boxed{\tfrac{1}{2}}$.



Para dibujar $u(x,3)$ basta trasladar $\frac{1}{2}f^*$ a derecha e izquierda 3 unidades y sumar las gráficas. En ese instante se cancelan en $[0,1]$ ambas gráficas. La onda que viajaba hacia la derecha ya ha rebotado y se ha invertido, y empieza a ir a la izquierda.



$u(2,t) = \frac{1}{2}\big[f^*(2+t) + f^*(2-t)\big]$. Para $t\in[0,3]$ es $f^*(2-t) = 0$.

El valor de $f^*(2+t) = f(2+t)$ depende de t. En concreto: $u(2,t) = \frac{1}{2}\begin{cases} 2-(2+t),\ t\in[0,1] \\ (2+t)-4,\ t\in[1,2] \\ 0,\ t\in[2,3] \end{cases} = \boxed{\begin{cases} -t/2,\ t\in[0,1] \\ t/2-1,\ t\in[1,2] \\ 0,\ t\in[2,3] \end{cases}}$.

3. a] Resolver $\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} - 2u_t + 4u_x = 0,\ x,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = f(x) \end{cases}$ mediante la $\mathcal{F}$ $\begin{bmatrix}\text{identificar} \\ \text{cuadrado} \\ \text{perfecto}\end{bmatrix}$. Deducir la solución para $f(x)\equiv 1$.

b] Escribir en forma canónica la ecuación y hallar a partir de ella su solución general. [0.7 puntos]

a] $\begin{cases} \hat u_{tt} + 4k^2\hat u - 2\hat u_t - 4ik\hat u = 0 \\ \hat u(k,0) = \hat f(k),\ \hat u_t(k,0) = \hat f(k) \end{cases}$ $\begin{matrix} \mu^2 - 2\mu + 4k^2 - 4ik = 0 \to \\ \mu = 1 \pm \sqrt{1 + 4ik - 4k^2} = 1 \pm (1+2ik) \end{matrix}$ $\to \hat u(k,t) = p(k)\,e^{2(1+ik)t} + q(k)\,e^{-2ikt}$

$\xrightarrow{\text{c.i.}}$ $\begin{matrix} p(k) + q(k) = \hat f(k),\ q(k) = \hat f(k) - p(k) \searrow \\ 2(1+ik)p(k) - 2ikq(k) = \hat f(k) \qquad 2(1+2ik)p(k) = (1+2ik)\hat f(k) \nearrow \end{matrix}$ $p(k) = \frac{1}{2}\hat f(k) = q(k)$,

$\hat u(k,t) = \frac{1}{2}e^{2t}\hat f(k)\,e^{ik2t} + \frac{1}{2}\hat f(k)\,e^{-ik2t} \to \boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}\big[f(x-2t)\,e^{2t} + f(x+2t)\big]}$.

En particular, para $f(x) = 1$ obtenemos la solución $\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}\big[e^{2t} + 1\big]}$.

$\Big[$Fácilmente comprobable: $u(x,0) = \frac{2}{2}$, $u_t(x,0) = e^0$, $u_{tt} - 4u_{xx} - 2u_t + 4u_x = 2e^{2t} - 0 - 2e^{2t} + 0 = 0$ $\Big]$.

b] Las características son las de la ecuación de ondas (lo dicen las derivadas segundas):

$\begin{cases} \xi = x+2t \\ \eta = x-2t \end{cases}$, $\begin{cases} u_x = u_\xi + u_\eta \\ u_t = 2u_\xi - 2u_\eta \end{cases}$, $\begin{cases} u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \\ u_{tt} = 4u_{\xi\xi} - 8u_{\xi\eta} + 4u_{\eta\eta} \end{cases}$ $\to -16u_{\xi\eta} + 8u_\eta = 0$, $\boxed{u_{\xi\eta} - \frac{1}{2}u_\eta = 0}$ forma canónica.

$u_\eta = v$, $v_\xi = \frac{1}{2}v \to v = p^*(\eta)\,e^{\xi/2}$, $u = p(\eta)\,e^{\xi/2} + q(\xi)$, $\boxed{u(x,t) = p(x-2t)\,e^{x/2+t} + q(x+2t)}$ solución general.

Soluciones del control 2 de Métodos II (C) (17-5-17)

1. Sea $xy''-(1+x)y'+y=0$. **a]** Hallar 4 términos no nulos del desarrollo de una solución que se anule en $x=0$, dando la regla de recurrencia. **b]** ¿Están acotadas todas las soluciones en $x=0$? [0.4 puntos]
r] ¿Son analíticas todas las soluciones en $x=0$?

a] $x^2y''-x(1+x)y'+xy=0$. $x=0$ es singular regular con $r(r-1)-r+0=0$, $r=2,0$. Se anula en $x=0$:

$$y_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+2}\;\to\;\sum_{k=0}^{\infty}\big[(k+2)(k+1)c_kx^{k+1}-(k+2)c_kx^{k+1}-(k+2)c_kx^{k+2}+c_kx^{k+2}\big]=0\;\to$$

$x^1: 2c_0-2c_0=0$, $\forall c_0$. $x^2: 3c_1-c_0=0$, $c_1=\frac13c_0$. $x^{k+1}: (k+2)kc_k-kc_{k-1}=0\to c_k=\frac{1}{k+2}c_{k-1}$

$\to c_2=\frac14c_1=\frac1{12}c_0$, $c_3=\frac15c_2=\frac1{60}c_0,\dots\to\boxed{y_1=x^2+\frac13x^3+\frac1{12}x^4+\frac1{60}x^5+\cdots}$ $\big[=2(e^x-1-x)\big]$.

b] La otra solución $y_2=\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k+dy_1\ln x$ también está acotada en $x=0$ (sea o no $d=0$), porque $x^2\ln x\xrightarrow{x\to0}0$.

r] y_1 lo es. Si $d=0$ lo será y_2 $\to\sum_{k=0}^{\infty}\big[k(k-2)b_kx^{k-1}-(k-1)b_kx^k\big]+d\big[2y_1'-\frac2xy_1-y_1\big]=0\to$ $x^0: b_1=b_0$. $x^1: d[2]=0$.

$\big[$De hecho, con un poco de vista o alguna integral se puede dar la solución general sin series: $y=c_1e^x+c_2(1+x)\big]$.

2. Sea $\begin{cases}y''-2y'+\lambda y=0\\ y'(0)=y'(1)=0\end{cases}$. **a]** Probar que $\lambda=0$ es autovalor y escribir la autofunción $\{y_0\}$ asociada. Estudiar si $\lambda=-3$ y $\lambda=2$ son o no autovalores del problema.
b] Hallar el coeficiente de $\{y_0\}$ en el desarrollo de $f(x)=e^x$ en serie de autofunciones. [0.6 puntos]
c] Precisar cuántas soluciones tiene $y''-2y'-3y=3$, con esos mismos datos de contorno.
r] Precisar cuántas soluciones tiene $y''-2y'=3$, con esos mismos datos de contorno.

En forma autoadjunta: $\big[e^{-2x}y'\big]'+\lambda e^{-2x}y=0$. Peso $r(x)=e^{-2x}$. $\mu^2-2\mu+\lambda=0$, $\mu=1\pm\sqrt{1-\lambda}$.

a] $\lambda=0$, $\mu=0,2$: $y=c_1+c_2e^{2x}$, $y'=2c_2e^{2x}\to\left.\begin{matrix}2c_2=0\\2c_2e^2=0\end{matrix}\right\}\to\lambda=0$ autovalor, $\boxed{y_0=\{1\}}$.

$\lambda=-3$ no puede ser autovalor pues $\alpha\alpha'=\beta\beta'=0\equiv q(x)$. O directamente:

$\mu=0,2$, $y=c_1e^{3x}+c_2e^{-x}$, $y'=3c_1e^{3x}-c_2e^{-x}\to\left.\begin{matrix}3c_1-c_2=0\;\to\\3c_1e^3-c_2e^{-1}=0\end{matrix}\right\}\to c_2\big[e^3-e^{-1}\big]\to c_2=c_1=0$.

Si $\lambda=2$, $\mu=1\pm i$: $\begin{matrix}y=[c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x]\,e^x\\ y'=\big[(c_1+c_2)\cos x+(c_2-c_1)\operatorname{sen}x\big]e^{-x}\end{matrix}\to\begin{matrix}c_1+c_2=0\to\\2c_2e\operatorname{sen}1=0\end{matrix}\to c_2=c_1=0$. No autovalor.

b] $e^x=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_ny_n(x)\to c_0=\frac{\langle e^x,y_0\rangle}{\langle y_0,y_0\rangle}=\frac{\int_0^1e^{-x}dx}{\int_0^1e^{-2x}dx}=2\frac{1-e^{-1}}{1-e^{-2}}=2e\frac{e-1}{e^2-1}=\boxed{\frac{2e}{e+1}}$.

c] Como el problema homogéneo tiene sólo la solución trivial $y\equiv0$, el no homogéneo tiene **solución única**.

$\big[$Directamente: La solución general de la no homogénea es: $y=c_1e^{3x}+c_2e^{-x}-1\xrightarrow{c.c.}y=-1\big]$.

r] $\big[e^{-2x}y'\big]'=3e^{-2x}$. $\int_0^1 3e^{-2x}\neq0\Rightarrow$ **no tiene solución**. $\big[$O imponiendo los datos a $y=c_1e^{3x}+c_2e^{-x}-\frac32x\big]$.

3. Sea el problema no homogéneo $\begin{cases}u_t-u_{xx}+3u=F(x),\;x\in(0,\pi),\;t>0\\u(x,0)=u(0,t)=u(\pi,t)=0\end{cases}$, con **a]** $F(x)=4\operatorname{sen}x$, **b]** $F(x)=\pi$.
Hallar la solución en el caso **a]** y los 2 primeros términos no nulos de la serie solución en **b]**. [0.8 puntos]
r] Calcular toda la serie solución del caso **b]**.

$u=X(x)T(t)$, $(T'+3T)X''=XT'$, $\frac{X''}{X}=\frac{T'}{T}+3=-\lambda\to\begin{cases}X''+\lambda X=0\\X(0)=X(\pi)=0\end{cases}\to\lambda_n=n^2$, $n=1,2,\dots$, $X_n=\{\operatorname{sen}nx\}$.

$\big[$Y además $T'+(3+\lambda)T=0$, que aquí no se utiliza por tratarse de un problema no homogéneo$\big]$.

Llevamos la serie $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\operatorname{sen}nx$ a la EDP no homogénea y al dato inicial para calcular los T_n:

$\sum_{n=1}^{\infty}\big[T_n'+n^2T_n+3T_n\big]\operatorname{sen}nx=F(x)$, función a desarrollar en $\operatorname{sen}nx$. Para **a]**, F ya está desarrollada. Para **b]**:

$$c_n=\frac2\pi\int_0^\pi\pi\operatorname{sen}nx\,dx=\Big[-\frac2n\cos nx\Big]_0^n=2\,\frac{1-(-1)^n}{n}\to\pi=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{2n-1}\operatorname{sen}(2n-1)x=4\operatorname{sen}x+\frac43\operatorname{sen}3x+\cdots$$

Además: $u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\operatorname{sen}nx=0\to T_n(0)=0$ para todo n. Nos queda en cada caso:

a] Todos los $T_n\equiv0$ menos $T_1'+4T_1=4$, $T_1(0)=0$. Solución general: $T_1=Ce^{-4t}+1\xrightarrow{T_1(0)=0}T_1(t)=1-e^{-4t}$.

$\big[$La $T_{1p}=1$ salta a la vista, o bien: $T_1=Ce^{-4t}+e^{-4t}\int4e^{4t}dt=Ce^{-4t}+1\big]$. La solución es: $\boxed{u=\big(1-e^{-4t}\big)\operatorname{sen}x}$.

b] A la vista del desarrollo de π anterior, es no nulo el T_1 (el mismo de **a]**) y el siguiente no nulo lo da:

$\begin{cases}T_3'+12T_3=\frac43\\T_3(0)=0\end{cases}$. $T_3=Ce^{-12t}+\frac19\xrightarrow{d.i.}C=-\frac19$. Por tanto: $\boxed{u=\big(1-e^{-4t}\big)\operatorname{sen}x+\frac19\big(1-e^{-12t}\big)\operatorname{sen}3x+\cdots}$.

r] $\begin{cases}T_n'+(n^2+3)T_n=c_n\\T_n(0)=0\end{cases}$. $T_n=\frac{c_n}{n^2+3}\big[1-e^{-(n^2+3)t}\big]$. Por tanto: $\boxed{u=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-e^{-4(n^2-n+1)t}}{(2n-1)(n^2-n+1)}\operatorname{sen}(2n-1)x}$.