Soluciones del control 1 de Métodos II (C) (21-2-22)

Elegir uno de los apartados o] de alguno de los tres problemas [valen 0.5 ptos].

1. Escribir en forma canónica y calcular la solución general de $u_{yy}+4u_{xy}+4u_{xx}-4u=5e^{x+y}$. [1 pto]

o] Hallar la solución que cumple $u(x,0)=0$, $u_y(x,0)=e^x$. [Posible ayuda: $v=e^{x+y}$ cumple la EDP].

$B^2-4AC=0$ parabólica, $\begin{cases}\xi=x-2y\\ \eta=y\end{cases} \to \begin{cases}u_y=-2u_\xi+u_\eta\\ u_x=u_\xi\end{cases}$, $\begin{cases}u_{yy}=4u_{\xi\xi}-4u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\\ u_{xy}=-2u_{\xi\xi}+u_{\xi\eta}\\ u_{xx}=u_{\xi\xi}\end{cases} \to \boxed{u_{\eta\eta}-4u=5e^{\xi+3\eta}}$ forma canónica pedida

EDO lineal de 2° orden en η con $\mu^2-4=0$, $\mu=\pm2$. Se prueba $u_p=Ae^{3\eta} \to 9A-4A=5e^{\xi}$, $A=e^{\xi} \to$

$$u=p(\xi)\,e^{2\eta}+q(\xi)\,e^{-2\eta}+e^{\xi+3\eta}=\boxed{p(x-2y)\,e^{2y}+q(x-2y)\,e^{-2y}+e^{x+y}}$$ solución general

Haciendo $w=u-v$ con la v dada se obtiene $w_{yy}+4w_{xy}+4w_{xx}-4w=0$, $w_{\eta\eta}-w=0$, $w\overset{\uparrow}{=}p(x-2y)\,e^{2y}+q(x-2y)\,e^{-2y}$.

Y esta se podría resolver también con la $\mathcal{F}$: $\hat{w}_{yy}-4k\mathrm{i}\,\hat{w}_y-(4k^2+4)\hat{w}=0$, $\mu=2\mathrm{i}k\pm2$, $\hat{w}_{yy}\overset{\uparrow}{=}e^{2y}p(k)e^{2\mathrm{i}ky}+e^{-2y}q(k)e^{2\mathrm{i}ky}$.

o] $\begin{cases}p(x)+q(x)+e^x=0,\ q=-p-e^x \searrow & q(x)=0\\ -2(p'+q')+2(p-q)+e^x=e^x \quad 2e^x+4p+2e^x=0,\ p(x)=-e^x\uparrow\end{cases} \to \boxed{u(x,y)=e^{x+y}-e^x}$ (fácil de comprobar).

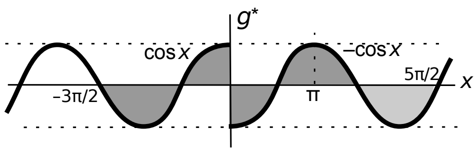
$\big[$Se podría aplicar a w los datos $w(x,0)=-e^x$, $w_y(x,0)=0$ o, peor, resolver con $\mathcal{F}$ para $w(x,0)=f(x)$ y sustituir$\big]$.

2. Sea $\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=0,\ x\geq0,\ t\in\mathbf{R}\\ u(x,0)=u_t(x,0)=0\\ u(0,t)=\operatorname{sen}t\end{cases}$. Calcular $u(\frac{\pi}{2},2\pi)$. Hallar la expresión de $u(x,2\pi)$ para $x\geq2\pi$. [1 pto]

[Ayuda: $v=\operatorname{sen}t\cos x$ cumple el dato de contorno y la EDP].

o] Calcular $u(x,2\pi)$ también si $0\leq x\leq2\pi$ y dibujar la cuerda en ese instante.

Utilizando la v de la ayuda $\xrightarrow{w=u-v} \begin{cases}w_{tt}-w_{xx}=0,\ x\geq0\\ w_t(x,0)=-\cos x\\ w(x,0)=w(0,t)=0\end{cases}$



Extendemos de modo impar $g(x)=-\cos x$ a $g^*(x)$ definida $\forall x$.

La solución viene dada entonces por $u(x,t)=v+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}g^*(s)\,ds$.

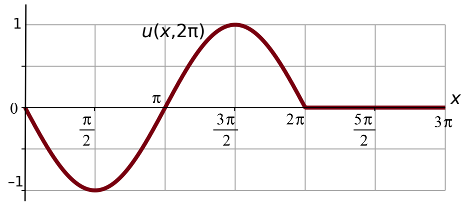
$$u(\tfrac{\pi}{2},2\pi)\underset{\operatorname{sen}2\pi=0}{=}0+\tfrac{1}{2}\int_{-3\pi/2}^{5\pi/2}g^*\underset{\text{impar}}{=}\tfrac{1}{2}\int_{3\pi/2}^{5\pi/2}g=\tfrac{1}{2}\big[\operatorname{sen}\tfrac{3\pi}{2}-\operatorname{sen}\tfrac{5\pi}{2}\big]=\tfrac{1}{2}[-1-1]=\boxed{-1}.$$

Para $x\geq2\pi$ es $x-2\pi$ positivo, luego: $u(x,2\pi)=0-\frac{1}{2}\int_{x-2\pi}^{x+2\pi}\cos s\,ds=\frac{1}{2}\big[\operatorname{sen}(x-2\pi)-\operatorname{sen}(x+2\pi)\big]=\boxed{0}$.

[Todavía no llegó la onda, que viaja a velocidad 1].

o] Ahora es $x-2\pi\leq0$ y $x+2\pi\leq0$. Usando la imparidad:

$$u(x,2\pi)=-\tfrac{1}{2}\int_{2\pi-x}^{x+2\pi}\cos s\,ds=\tfrac{1}{2}\big[\operatorname{sen}(2\pi-x)-\operatorname{sen}(x+2\pi)\big]=\boxed{-\operatorname{sen}x}.$$



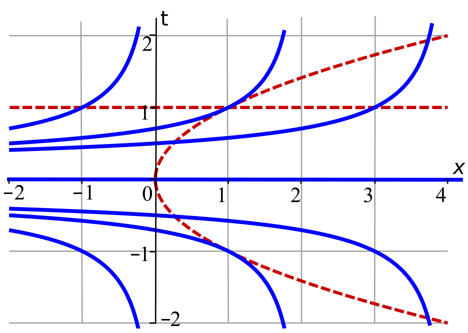
Juntando los resultados se tiene el dibujo de $u(x,2\pi)$ de la derecha: el movimiento del extremo crea la onda que por ahora llega a 2π.

3. Sea $t^3u_t+2u_x=2t^2u$. **a]** Dibujar sus características y hallar con ellas la solución que satisface $u(x,1)=x$.

b] Hallar sólo con la $\mathcal{F}$ la que cumple $u(x,1)=f(x)$ y ver que devuelve la solución de **a]**. [1.8 ptos (1+0.8)]

o] Precisar en qué puntos puede dar problemas de unicidad el dato $u(t^2,t)=0$ y dibujar esta curva.

a] $\frac{dt}{dx}=\frac{t^3}{2}$. $\int\frac{2\,dt}{t^3}+C=x$, $x=C-\frac{1}{t^2}$, $x+\frac{1}{t^2}=C$ características $x=-1/t^2 \leftrightarrow$



Conviene $\begin{cases}\xi=x+t^{-2}\\ \eta=t\end{cases}$, $\begin{cases}u_t=-2t^{-3}u_\xi+u_\eta\\ u_x=u_\xi\end{cases}$, $u_\eta=\frac{2}{\eta}u$, $u=p(\xi)\eta^2$,

$\boxed{u(x,t)=p\big(x+\frac{1}{t^2}\big)t^2}$ solución general

$\Big[$Peor: $\begin{cases}\xi=x+t^{-2}\\ \eta=x\end{cases}$, $u_\eta=t^2u=\frac{u}{\xi-\eta} \to u=\frac{p(\xi)}{\xi-\eta}\uparrow\Big]$.

El dato inicial dará claramente (dibujo o $T\equiv1$) solución única.

$u(x,t)=p(x+1)=x \to p(v)=v-1$, $\boxed{u(x,t)=xt^2+1-t^2}$.

$\big[$Comprobamos: $2t^4(x-1)+2t^2=2t^2u$ y además $u(x,1)=x\big]$.

b] $\begin{cases}t^3\hat{u}_t-2\mathrm{i}k\hat{u}=2t^2\hat{u}\\ \hat{u}(k,1)=\hat{f}(k)\end{cases} \to \hat{u}_t=\big(\frac{2\mathrm{i}k}{t^3}+\frac{2}{t}\big)\hat{u}$, $\hat{u}(k,t)=p(k)\,e^{-\mathrm{i}k/t^2}e^{2\ln t}\xrightarrow{c.i.}\hat{u}(k,t)=t^2\hat{f}(k)\,e^{\mathrm{i}k(1-t^{-2})}$.

Como $\mathcal{F}^{-1}\big[\hat{f}(k)\,e^{\mathrm{i}ka}\big]=f(x-a)$ es $\boxed{u(x,t)=t^2f\big(x-1+\frac{1}{t^2}\big)}$, que da lo de arriba si $f(x)=x$.

o] La parábola $x=t^2$ se ve que será tangente a las características en 2 puntos simétricos. Los da la T:

$(g,h)=(t^2,t)$. $T(t)=g'A(g,h)-h'B(g,h)=2t^4-2=0$, si $t=\pm1$. Tangencia en los puntos $\boxed{(1,\pm1)}$.

Soluciones del control 2 de Métodos II (C) (25-4-22)

1. Sea $x(1-x)y''-(1+x)y'+y=0$. **a]** Hallar el desarrollo de una solución no trivial de que se anule en $x=0$, dando la regla de recurrencia, e identificarla con una función elemental. [1.6 pts (1.2+0.4)]
b] Probar que hay soluciones no triviales de la ecuación que tienden a 0 cuando $x\to\infty$.

a] $x=0$ singular regular con $a^*(x)=\frac{x+1}{x-1}$, $b^*(x)=\frac{x}{1-x}$, $r(r-1)-r=0$, $r=2,0$. Se anula en $x=0$:

$$y_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+2}\ \to\ \sum_{k=0}^{\infty}\Big[(k+2)(k+1)c_kx^{k+1}-(k+2)(k+1)c_kx^{k+2}-(k+2)c_kx^{k+1}-(k+2)c_kx^{k+2}+c_kx^{k+2}\Big]=0$$

$$\to x^1: 2c_0-2c_0=0,\ \forall c_0.\quad x^2: 6c_1-2c_0-3c_1-2c_0+c_0=0,\ c_1=c_0.$$

$$x^{k+1}: k(k+2)c_k-k(k+2)c_{k-1}=0\to c_k=c_{k-1},\ c_2=c_1=c_0,\ \dots\to \boxed{y_1=x^2+x^3+x^4-\cdots=\frac{x^2}{1-x}}\ \text{no acotada.}$$

b] La solución $y_2=1+x$ casi salta a la vista y sale (largo) con Frobenius. $y=\frac{c_1x^2}{1-x}+c_2(1+x)\xrightarrow{c_1=c_2=1}\frac{1}{1-x}\xrightarrow{x\to\infty}0$.

También se puede hallar la solución general desde la primera: $e^{-\int a}=\frac{x}{(1-x)^2}$, $y_2=y_1\int\frac{1}{x^3}=-\frac{1}{2(1-x)}$.

O bien, $x=\frac{1}{s}\to\frac{1}{s}\big(1-\frac{1}{s}\big)\big[s^4\ddot{y}+2s^3\dot{y}\big]+s^2\big(1+\frac{1}{s}\big)\dot{y}+y=s^2(s-1)\ddot{y}+s(3s-1)\dot{y}+y=0$, $r=\pm1$, $y_1=s\sum\underset{s\to0}{\longrightarrow}0$.

2. Sea $\begin{cases}x^2y''-2xy'+\lambda y=0\\ y'(1)=y(2)=0\end{cases}$. **a]** Precisar si $\lambda=-4$ y $\lambda=2$ son o no autovalores del problema. En caso afirmativo dar su autofunción $\{y_n\}$ y calcular $\langle y_n,y_n\rangle$. [1.6 pts (1.2+0.4)]
b] Determinar para ambos valores de λ cuántas soluciones tiene $x^2y''-2xy'+\lambda y=4$ con esos datos.

a] $\mu^2-3\mu+\lambda=0$, $\mu=\frac{3\pm\sqrt{9-4\lambda}}{2}$. $\lambda=-4$, $\mu=4,-1$. $y=c_1x^4+c_2x^{-1}$. $\left.\begin{matrix}4c_1-c_2=0\\16c_1+c_2/2=0\end{matrix}\right\}$ **No autovalor**. [$0\ \alpha\alpha'=\cdots$].

$\lambda=2\to\mu=2,1$. $y=c_1x^2+c_2x$. $\left.\begin{matrix}2c_1+c_2=0\\2(2c_1+c_2)=0\end{matrix}\right\}\to c_2=-2c_1$. Es autovalor con $\boxed{y_n=\{x^2-2x\}}$.

$\left[\frac{y'}{x^2}\right]'+\frac{\lambda}{x^4}y=0$. $r(x)=\frac{1}{x^4}$, $\langle y_n,y_n\rangle=\int_1^2\frac{1}{x^4}x^2(x-2)^2dx=\int_1^2\big(1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\big)dx=\boxed{3-4\ln 2}$.

b] Para $\lambda=-4$ claramente solución **única**. Para $\lambda=2$ habrá infinitas o ninguna según se anule o no la integral:
$\int_1^2\underbrace{\frac{4}{x^4}}_{f(x)}(x^2-2x)\,dx=\int_1^2\big(\frac{4}{x^2}-\frac{8}{x^3}\big)dx=-1\neq0$. **Sin solución**. [O desde la solución general $y=c_1x^2+c_2x+2$].

Elegir entre 3 y 4

3. Resolver $\begin{cases}u_t-2tu_{xx}=\cos t,\ x\in(0,\pi),\ t>0\\ u(x,0)=\cos 2x,\ u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=0\end{cases}$ y comprobar la solución. [2.1 ptos]

$u=XT$ en la EDP homogénea $\to\frac{T'}{2tT}=\frac{X''}{X}=-\lambda\to\begin{cases}X''+\lambda X=0\\X'(0)=X'(\pi)=0\end{cases}$. [Y además $T'=-2\lambda tT$].

Las autofunciones del homogéneo son, por tanto, $X_n=\{\cos nx\}$, $n=0,1,\dots$ [$X_0=\{1\}$ entre ellas].

Llevamos a la EDP y al dato inicial la serie $u(x,t)=T_0(t)+\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\cos nx$, obteniendo:

$$T_0'+\sum_{n=1}^{\infty}\big[T_n'+2n^2tT_n\big]\cos nx=\cos t\quad\text{y}\quad T_0(0)+\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\cos nx=\cos 2x\quad\text{[ambas ya desarrolladas].}$$

Sólo son no nulas las soluciones de estos 2 problemas (los demás tienen la solución única $T_n\equiv0$):

$$\begin{cases}T_0'=\cos t\\T_0(0)=0\end{cases}\to T_0=C+\operatorname{sen}t\xrightarrow{d.i.}C=0\qquad\text{y}\qquad\begin{cases}T_2'+8tT_2=0\\T_2(0)=1\end{cases}\to T_2=C\,e^{-4t^2}\xrightarrow{d.i.}C=1.$$

Así la solución es $\boxed{u(x,t)=\operatorname{sen}t+e^{-4t^2}\cos 2x}$ [$u_t=\cos t-8te^{-4t^2}\cos 2x$, $u_{xx}=-4e^{-4t^2}\cos 2x\Rightarrow u_t-2tu_{xx}=\cos t$ y el dato inicial y los de contorno son casi inmediatos].

4. Resolver por separación de variables $\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=0,\ x\in\big[0,\frac{\pi}{2}\big],\ t\in\mathbf{R}\\ u(x,0)=u_t(x,0)=u_x(0,t)=0,\ u\big(\frac{\pi}{2},t\big)=t\end{cases}$. [$v=t$ es buena para el cambio] [2.1 ptos]

$\xrightarrow{w=u-t}\begin{cases}w_{tt}-w_{xx}=0\\w_t(x,0)=-1,\ w(x,0)=w_x(0,t)=w\big(\frac{\pi}{2},t\big)=0\end{cases}$. Del formulario y los datos nulos obtenemos si $w=XT$:

$$\begin{cases}X''+\lambda X=0\\X'(0)=X(\pi/2)=0\end{cases}\to\lambda_n=(2n-1)^2,\ X_n=\{\cos(2n-1)x\},\quad\begin{cases}T''+(2n-1)^2T=0\\T(0)=0\end{cases}\to T_n=\{\operatorname{sen}(2n-1)t\},\ n=1,2,\dots$$

Probamos $w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\operatorname{sen}(2n-1)t\cos(2n-1)x$. Del último dato:

$$w_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)c_n\cos(2n-1)x=-1\to c_n=-\frac{4}{\pi(2n-1)}\int_0^{\pi/2}\cos(2n-1)x\,dx=-\frac{4\operatorname{sen}(2n-1)x}{\pi(2n-1)^2}\Big]_0^{\pi}=\frac{4(-1)^n}{\pi(2n-1)^2}.$$

La solución es entonces $\boxed{u(x,t)=t+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}\operatorname{sen}(2n-1)t\cos(2n-1)x}$.