Soluciones del control 1 de Métodos II - C (21-2-24)

Elegir uno de los dos apartados op] (de los problemas 1 y 2).

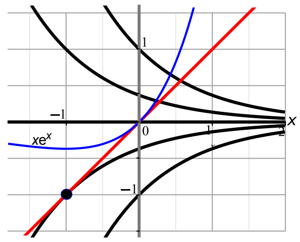
---

1. Sea [E] $yu_y-u_x=2u-y$. **a]** Calcular la única solución de (E) que cumple $u(0,y)=y+1$. [0.9 ptos]

op] Hallar el punto del plano en que el dato $u(x,x)=x$ plantea problemas de unicidad y comprobarlo con el dibujo de la recta y las características. [0.5 ptos]

---

a] $\frac{dy}{dx}=-y$ lineal $\to$ $y=Ce^{-x}$. $\boxed{ye^x=C}$ características.



Eligiendo $\begin{cases}\xi=ye^x\\ \eta=y\end{cases}\to\begin{cases}u_y=e^xu_\xi+u_\eta\\ u_x=ye^xu_\xi\end{cases}$, $yu_\eta=2u-y$, $u_\eta=\frac{2}{\eta}u-1\to$

$$u=p(\xi)\eta^2-\eta^2\int\frac{d\eta}{\eta^2}=p(\xi)\eta^2+\eta=\boxed{p\big(ye^x\big)y^2+y}.$$

Más largo si $\eta=x$: $u_\eta=-2u+\xi e^{-\eta}\to u=q(\xi)\,e^{-2\eta}+\xi e^{-\eta}=\boxed{q\big(ye^x\big)\,e^{-2x}+y}$.

[El dibujo de las carácterísticas prueba la unicidad con ese dato. Nos dice lo mismo $T(y)=0\cdot y-1\cdot(-1)=1\neq0,\ \forall y$].

Imponemos el dato: $\begin{array}{l}u(0,y)=p(y)y^2+y=y+1\to p(y)=\frac{1}{y^2}\searrow\\ u(0,y)=q(y)+y=y+1\ \to\ q(y)\equiv1\ \nearrow\end{array}$ $\boxed{u(x,y)=e^{-2x}+y}$. $\begin{array}{l}y+2e^{-2x}=2e^{-2x}+2y-y,\\ y+e^0=y+1.\end{array}$

op] Para $(g,h)=(x,x)\to T(x)=1\cdot x-1\cdot(-1)=x+1=0\to x=-1,\ y=-1$. Punto $\boxed{(-1,-1)}$.

En el punto la recta de datos $y=x$ es tangente a la característica $y=-e^{-(x+1)}$, de pendiente 1 en -1.

[Se ve que el dato lleva a $p\big(xe^x\big)=0$, que sólo fija $p(v)=0$ para $v\geq-e^{-1}$, es decir, no precisa la u si $y<-e^{-x-1}$].

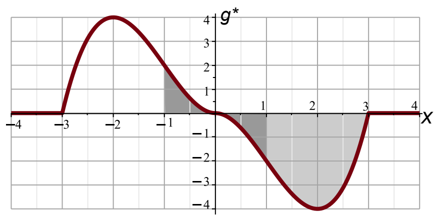
---

2. Sea $\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=0,\ x\geq0,\ t\in\mathbf{R}\\ u_t(x,0)=\begin{cases}x^3-3x^2,\ x\in[0,3]\\ 0,\ x\in[3,\infty)\end{cases}\\ u(x,0)=0,\ u(0,t)=0\end{cases}$. **a]** Calcular $u(1,2)$ y $u(1,t)$ para todo $t\geq4$. [0.9 ptos]

op] Calcular $u(1,t)$ para todo $t\in[1,2]$. [0.5 ptos]

---

a] Se extiende g a g^* impar definida $\forall x$: $\begin{cases}w_{tt}-w_{xx}=0,\ x,t\in\mathbf{R}\\ w(x,0)=0,\ w_t(x,0)=g^*(x)\end{cases}$.



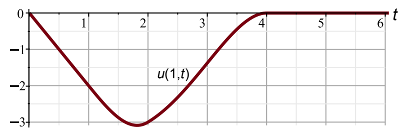
[Aunque no es necesaria, su expresión en $[-3,0]$ será x^3+3x^2].

La solución es entonces $w(x,t)=\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}g^*(s)\,ds$. En particular:

$$u(1,2)=\tfrac{1}{2}\int_{-1}^{3}g^*\underset{\text{impar}}{=}\tfrac{1}{2}\int_{1}^{3}g=\tfrac{1}{2}\Big[\tfrac{x^4}{4}-x^3\Big]_1^3=\tfrac{1}{2}\Big[\tfrac{81-1}{4}-27+1\Big]=\boxed{-3}.$$

Si $t\geq4$ es $1-t\leq-3,\ 1+t\geq5$, $u(1,t)=\frac{1}{2}\int_{1-t}^{1+t}g^*=\frac{1}{2}\int_{-3}^{3}g^*\underset{\text{impar}}{=}\boxed{0}$.

op] Para $t\in[1,2]$ el intervalo incluye ambas expresiones y, utilizando la imparidad, se anula la integral entre $1-t<0$ y $t-1>0$ y por tanto:



$$u(1,t)=\tfrac{1}{2}\int_{t-1}^{t+1}g=\tfrac{1}{2}\Big[\tfrac{x^4}{4}-x^3\Big]_{t-1}^{t+1}=\tfrac{1}{2}\Big[\tfrac{8t^3+8t}{4}-6t^2-2\Big]=\boxed{t^3-3t^2+t-1}.$$

[Con alguna cuenta más se prueba que la evolución del punto $x=1$ para $t\geq0$ es la del segundo dibujo: hasta $t=1$ su expresión es $-2t$, en $[1,2]$ es la de arriba, en $[2,4]$ es de orden 4 y si $t\geq4$ ya vimos que se anulaba].

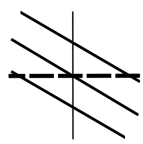
---

3. Sea $\begin{cases}u_{tt}-4u_{tx}+4u_{xx}+u=0\\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=g(x)\end{cases}$. **a]** Resolverlo a partir de la forma canónica. **b]** Llegar a la misma solución real utilizando sólo la $\mathcal{F}$. [2 ptos]

---

a] $B^2-4AC=0$ parabólica, $\begin{cases}\xi=x+2t\\ \eta=t\end{cases}\to\begin{cases}u_t=2u_\xi+u_\eta\\ u_x=u_\xi\end{cases}$, $\begin{cases}u_{tt}=4u_{\xi\xi}+4u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\\ u_{xt}=2u_{\xi\xi}+u_{\xi\eta}\\ u_{xx}=u_{\xi\xi}\end{cases}\to\boxed{u_{\eta\eta}+u=0}$ forma canónica

EDO lineal homogénea de 2° orden en η con $\mu^2+1=0$, $u(\xi,\eta)=p(\xi)\cos\eta+q(\xi)\operatorname{sen}\eta$.



La solución general es $\boxed{u(x,t)=p(x+2t)\cos t+q(x+2t)\operatorname{sen}t}$, $u_t=2p'c-ps+2q's+qc$.

Imponiendo los datos: $\begin{cases}u(x,0)=p(x)=0\searrow\\ \qquad q(x)\cos0=g(x),\ q(x)=g(x)\end{cases}\to\boxed{u(x,t)=g(x+2t)\operatorname{sen}t}$.

b] $\begin{cases}\hat{u}_{tt}+4ik\hat{u}_t+\big(1-4k^2\big)\hat{u}=0\\ \hat{u}(k,0)=0,\ \hat{u}_t(k,0)=\hat{g}(k)\end{cases}$, $\mu=-2ik\pm\sqrt{-1}=-2ik+i,-2ik-i$. $u(\hat{k},t)=p(k)\,e^{-2ikt+it}+q(k)\,e^{-2ikt-it}$

$\xrightarrow{c.i.}\begin{cases}p(k)+q(k)=0,\ q(k)=-p(k)\searrow\\ \qquad 2i\,p(k)=\hat{g}(k),\ p(k)=\frac{1}{2i}\hat{g}(k)\end{cases}\to\ \hat{u}(k,t)=\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\,\hat{g}(k)\,e^{-2ikt}$, $\boxed{u(x,t)=\operatorname{sen}t\ g(x+2t)}$.

[Comprobando: $u_x=sg'$, $u_t=cg+2sg'$, $u_{xx}=sg''$, $u_{xt}=cg'+2sg''$, $u_{tt}=-sg+4cg'+4sg''\to L[u]=0$, $u_t(x,0)=c$].

Soluciones del control 2 de Métodos II - C (17-4-24)

1. Sea $(1-x^2)y''-xy'+4y=0$. **a]** Resolver por series hasta x^5 en torno a $x=0$, dando la regla de recurrencia. Comprobar que la solución que satisface $y(0)=1, y'(0)=0$ es un polinomio.
b] Hallar las raíces del polinomio indicial en $x=1$. ¿Están todas las soluciones acotadas en este punto? ¿Son todas analíticas en él? [1+0.5=1.5 ptos]

a] $x=0$ es regular y hay dos soluciones analíticas en el punto que se calculan en un único proceso de cálculo:

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k \to \sum_2\big[k(k-1)c_kx^{k-2}-k(k-1)c_kx^k\big]-\sum_1 kc_kx^k+\sum_0 4c_kx^k=0 \to$$

x^0: $2c_2+4c_0=0$, $c_2=-2c_0$. x^1: $6c_3-c_1+4c_1=0$, $c_3=-\frac{1}{2}c_1$. x^2: $12c_4-2c_2-2c_2+4c_2=0$, $c_4=0$.

x^k: $(k+2)(k+1)c_{k+2}-\big[k^2-4\big]c_k=0$, $c_{k+2}=\frac{k-2}{k+1}c_k \to c_5=\frac{1}{4}c_3=-\frac{1}{8}c_1$, $c_6=c_8=\cdots=0$.

Luego $\boxed{y=c_0\big[1-2x^2\big]+c_1\big[x-\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{8}x^5+\cdots\big]}$. La que cumple los datos $(c_0=1,\ c_1=0)$ es $\boxed{y=1-2x^2}$.

De la ecuación obtendríamos: $y''(0)=4y(0)$. Derivándola: $(1-x^2)y'''-3xy''+3y'=0$, $y'''(0)=-3y'(0)$.

Derivando más: $(1-x^2)y^{iv}-5xy'''=0$, $y^{iv}(0)=0$. $(1-x^2)y^{v}-7xy^{iv}-5y'''=0$, $y^{v}(0)=5y'''(0)=-15y'(0)$.

Y el desarrollo de Taylor nos lleva a los términos de arriba: $y=y(0)\big[1-2x^2\big]+y'(0)\big[x-\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{8}x^5+\cdots\big]$.

b] $x=s+1 \to s(s+2)y''+(s+1)y'-4y=0$. Es $s=0$ singular regular con $r(r-1)+\frac{1}{2}r=0$, $r_1=\frac{1}{2}$, $r_2=0$.

Las dos $y_1=s^{1/2}\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k$, $y_2=\sum_{k=0}^{\infty}b_ks^k$, $c_0,b_0\neq0$, están acotadas en $s=0$, pero sólo y_2 es analítica.

2. Sea (P$_f$) $\begin{cases}x^2y''+\lambda y=x^3-ax^2\\ y(1)+3y'(1)=y(4)=0\end{cases}$. **a]** Precisar si $\lambda=-2$ es o no autovalor del problema homogéneo (P$_h$). **b]** Probar que $\lambda=0$ lo es y dar su autofunción $\{y_0\}$. [.3+.5+.6=1.4 ptos]
c] Para $\lambda=0$, calcular el a para el que el no homogéneo (P$_f$) tiene infinitas soluciones.
op] Encontrar, en términos de una tangente, la ecuación que debería resolverse numéricamente para hallar los infinitos $\lambda>\frac{1}{4}$ del (P$_h$), y escribir las autofunciones. [1 pto]

Las soluciones generales de las ecuaciones de Euler homogéneas las dan $\mu^2-\mu+\lambda=0$, $\mu=\frac{1\pm\sqrt{1-4\lambda}}{2}$.

a] Si $\lambda=-2$, $\mu=-1,2$, $y=c_1x^2+c_2x^{-1}$, $\begin{array}{l}y(1)+3y'(1)=7c_1-2c_2=0\\ y(4)=16c_1+\frac{1}{4}c_2=0.\end{array}$, $\begin{vmatrix}7&-2\\16&1/4\end{vmatrix}\neq0\to c_1=c_2=0$. **No autovalor**.

b] Para $\lambda=0$ es $\mu=0,1$, $y=c_1+c_2x \to \begin{array}{l}y(1)+3y'(1)=c_1+4c_2=0\\ y(4)=c_1+4c_2=0\end{array} \to \lambda=0$ autovalor con $\boxed{y_0=\{x-4\}}$.

c] En forma autoadjunta: $(y')'+\frac{\lambda}{x^2}y=x-a$. (P$_f$) tendrá infinitas soluciones cuando se anule la integral:

$$\int_1^4(x-a)(x-4)\,dx=\int_1^4\big(x^2-4x-ax+4a\big)dx=\frac{63}{3}-30-\frac{15a}{2}+12a=\frac{9a}{2}-9=0 \to \text{si } \boxed{a=2}.$$

O para esta 'ecuación' tan sencilla $y''=x-a$ es fácil hallar $y=c_1+c_2x+\frac{x^3}{6}-\frac{ax^2}{2}$ e imponer los datos.

op] Si $\lambda>\frac{1}{4}$ la solución es $y=\sqrt{x}\big[c_1\cos\frac{w\ln x}{2}+c_2\,\text{sen}\frac{w\ln x}{2}\big]$, llamando $w=\sqrt{4\lambda-1}$. Imponiendo los datos:

$y(1)+3y'(1)=\frac{5}{2}c_1+\frac{3w}{2}c_2=0$, $c_1-\frac{3w}{5}c_2 \searrow$

$y(4)=2c_1\cos(w\ln2)+2c_2\,\text{sen}(w\ln2)=0$, $c_2\big[\text{sen}(w\ln2)-\frac{3w}{5}\cos(w\ln2)\big]=0$.

$\boxed{\tan(w_n\ln2)=\frac{3w_n}{5}}$, $\lambda_n=\frac{1+w_n^2}{4}$.

$\boxed{y_n=\big\{\text{sen}\frac{w_n\ln x}{2}-\frac{3w_n}{5}\cos\frac{w_n\ln x}{2}\big\}}$.

3. Sea $\begin{cases}u_t-3u_{xx}=e^{-2t}\,\text{sen}\,x,\ x\in\big(0,\frac{\pi}{2}\big),\ t>0\\ u(x,0)=f(x),\ u(0,t)=1,\ u_x\big(\frac{\pi}{2},t\big)=0\end{cases}$. **a]** Calcular su solución siendo $f(x)=1-\text{sen}\,x$. [1.4 ptos]
[Una buena v es la constante que salta a la vista].
op] Hallar los dos primeros términos de la serie solución en el caso de ser $f(x)=0$. [1 pto]

Haciendo $w=u-1$: $\begin{cases}w_t-3w_{xx}=e^{-2t}\,\text{sen}\,x\\ w(x,0)=f(x)-1,\ w(0,t)=w_x\big(\frac{\pi}{2},t\big)=0\end{cases}$. $\begin{cases}X''+\lambda X=0\\ X(0)=X'(\pi/2)=0\end{cases}$, $X_n=\big\{\text{sen}(2n-1)x\big\}_{n=1,2\ldots}$ (formulario y datos de contorno).

$$w=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\,\text{sen}(2n-1)x \overset{\text{EDP}}{\to} \sum_{n=1}^{\infty}\big[T_n'+3n^2T_n\big]\text{sen}(2n-1)x=e^{-2t}\,\text{sen}\,x, \text{ y además } \sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\,\text{sen}(2n-1)x=f(x)-1.$$

Para **a]** es claro que $T_1(0)=-1$ y que $T_n(0)=0$ si $n\neq0$. El único problema con solución no nula será:

$\begin{cases}T_1'+3T_1=e^{-2t}\\ T_1(0)=-1\end{cases}$, $T_1=Ce^{-3t}+e^{-2t}$ [fvc o $y_p=Ae^{-2t}$] $\xrightarrow{d.i.} C=-2$. $\boxed{u(x,t)=1+\big(e^{-2t}-2e^{-3t}\big)\,\text{sen}\,x}$ (fácil de comprobar)

$T_n'+3n^2T_n=0$, $T_n(0)=0 \Rightarrow T_n\equiv0$.

b] Los $T_n(0)$ vendrán dados por $T_n(0)=-\frac{2}{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\text{sen}(2n-1)x\,dx=-\frac{4}{\pi(2n-1)}$. $T_1(0)=-\frac{4}{\pi}$, $T_2(0)=-\frac{4}{3\pi}$.

Los dos primeros términos de la serie solución salen de resolver: $\begin{cases}T_1'+3T_1=e^{-2t}\\ T_1(0)=-4/\pi\end{cases}$ y $\begin{cases}T_2'+27T_1=0\\ T_2(0)=-4/3\pi\end{cases}$ $\to$

$$\boxed{u(x,t)=1+\big[e^{-2t}-\big(1+\tfrac{4}{\pi}\big)e^{-3t}\big]\text{sen}\,x-\tfrac{4}{3\pi}e^{-27t}\,\text{sen}\,3x+\cdots}.$$