

Soluciones del control 1 de Métodos II - C (19-2-25)

Elegir uno de los dos apartados op] (de los problemas 1 y 2).

- 1.** Sea $[E] \ y^2 u_y + u_x = -xy^2 u$. **a]** Calcular la solución de (E) que cumple $u(x,1)=e^{-x}$. ¿Es única? [1 pto]
 ¿Cuántas soluciones satisfacen $u(x, -\frac{1}{x})=1$?
op] Hallar con la T los puntos del plano en que el dato de Cauchy $u(x, x-1)=0$ tiene problemas de unicidad y observar las tangencias con el dibujo de las características y la recta. [0.3 pto]

a] $\frac{dy}{dx} = y^2$ separable $\rightarrow -\frac{1}{y} = x - C$. $\boxed{x + \frac{1}{y} = C}$ o $y = \frac{1}{C-x}$ características.

Mejor $\begin{cases} \xi = x + y^{-1} \\ \eta = y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_y = -y^{-2} u_\xi + u_\eta \\ u_x = u_\xi \end{cases}, u_\eta = -xu = (\frac{1}{\eta} - \xi)u \rightarrow u = p(\xi) \eta e^{-\xi \eta}$.

La solución general es entonces $u = p^*(x + \frac{1}{y}) y e^{-xy-1}$, $\boxed{u = p(x + \frac{1}{y}) y e^{-xy}}$.

Peor si $\eta = x$, $y = \frac{1}{\xi - \eta}$, $u_\eta = -xy^2 u = -\frac{\eta - \xi + \xi}{(\xi - \eta)^2} u \rightarrow u = p(\xi) \frac{1}{\xi - \eta} e^{\xi/(\eta - \xi)}$

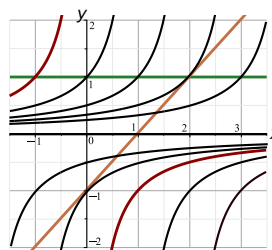
El dibujo de las características prueba la unicidad con el dato verde. Dice lo mismo $T(x) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 1 = 1 \neq 0 \forall x$.

Imponemos el dato: $u(x,1) = p(x+1) e^{-x} = e^{-x} \rightarrow p(v) = 1$, $\boxed{u(x,y) = y e^{-xy}}$. $(y^2 - xy^3 - y^2) e^{-xy} = -xy^3 e^{-xy}$, $\frac{1}{1} e^{-x} = e^{-x}$.

$u(x, -\frac{1}{x}) = p(0) \frac{e}{x} = 1$ imposible. **Ninguna solución** lo cumple. Era característica. $T = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} \equiv 0$ lo corrobora.

op] Para $(g, h) = (x, x-1) \rightarrow T(x) = 1 \cdot (x-1)^2 - 1 \cdot 1 = 0 \rightarrow x = 2, 0 \rightarrow y = 1, -1$. Puntos $\boxed{(2, 1)}$ y $\boxed{(0, -1)}$.

En esos puntos la recta de datos es tangente a distintas características $y = \frac{1}{C-x}$, con pendiente 1 en ellos.



- 2.** Sea $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, x \in [0, 5\pi], t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = \begin{cases} \sin \frac{x}{2}, x \in [0, 2\pi] \\ 0, x \in [2\pi, 5\pi] \end{cases} \\ u_t(x, 0) = u(0, t) = u(5\pi, t) = 0 \end{cases}$. **a]** Dibujar y dar la expresión de f^* en $[-13\pi, 13\pi]$. [1 pto]
b] Hallar $u(4\pi, 5\pi)$ y $u(4\pi, 7\pi)$. **c]** Dibujar $u(x, 5\pi)$.
op] Escribir $u(4\pi, t)$ para $4\pi \leq t \leq 6\pi$ y para $6\pi \leq t \leq 8\pi$. [0.3 pto]

a] Será f^* la extensión impar y 10π -periódica de f .

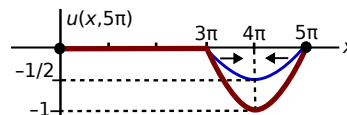
[Su expresión en $[-2\pi, 2\pi]$ será la inicial impar $\sin \frac{x}{2}$. Y en $[-12\pi, -8\pi]$ y $[8\pi, 12\pi]$ pasa a ser $-\sin \frac{x}{2}$.]

La solución será: $u(x, t) = \frac{1}{2} [f^*(x+t) + f^*(x-t)]$.



b] $u(4\pi, 5\pi) = \frac{1}{2} [f^*(-\pi) + f^*(9\pi)] = \frac{1}{2} [f^*(-\pi) - f^*(\pi)] = \frac{1}{2} [-1 - 1] = -1$.

$u(4\pi, 7\pi) = \frac{1}{2} [f^*(-3\pi) + f^*(11\pi)] = \frac{1}{2} [-f^*(3\pi) + f^*(\pi)] = \frac{1}{2} [-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}] = 0$.

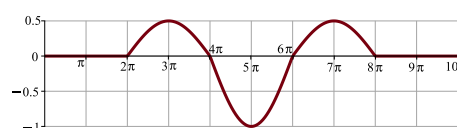


c] $u(x, 5\pi) = \frac{1}{2} [f^*(x+5\pi) + f^*(x-5\pi)]$. Trasladando $\frac{1}{2} f^*$ sólo aparecen en $[0, 5\pi]$ dos ondas iguales de altura $-1/2$ entre 3π y 5π que crean otra de altura -1 . [La función que describe esa onda resulta ser el $-\cos \frac{x}{2}$.]

op] Para $4\pi \leq t \leq 6\pi$ es $4\pi+t \in [8\pi, 10\pi]$ y $4\pi-t \in [-2\pi, 0]$. Por tanto:

$$u(4\pi, t) = \frac{1}{2} [\sin \frac{4\pi-t}{2} - \sin \frac{4\pi+t}{2}] = -\sin \frac{t}{2}.$$

Si $6\pi \leq t \leq 8\pi$ sólo aparece $u(4\pi, t) = -\frac{1}{2} \sin \frac{4\pi+t}{2} = -\frac{1}{2} \sin \frac{t}{2}$.



Sería fácil dibujar también trasladando ondas $u(4\pi, t) = \frac{1}{2} [f^*(4\pi+t) + f^*(4\pi-t)] = \frac{1}{2} [f^*(4\pi+t) - f^*(t-4\pi)]$

- 3. a]** Resolver $\begin{cases} u_{tt} + 2u_{tx} + u_{xx} = f''(x) \\ u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$ mediante la $\mathcal{F}$. [2 pto]
b] Escribir en forma canónica $u_{tt} + 2u_{tx} + u_{xx} = 2$. Hallar su solución general. Calcular la solución que cumple los datos iniciales $u(x, 0) = x^2$, $u_t(x, 0) = x$. [Una $v(x)$ cumpliendo la EDP podría acortar algún cálculo].

a] $\begin{cases} \hat{u}_{tt} - 2ik\hat{u}_t - k^2\hat{u} = -k^2\hat{f}(k) \\ \hat{u}(k, 0) = \hat{f}(k), \hat{u}_t(k, 0) = \hat{g}(k) \end{cases}, \mu^2 - 2ik\mu - k^2, \mu = ik \text{ doble}, \hat{u}_p \text{ obvia. } u(\hat{k}, t) = [p(k) + q(k)t] e^{ikt} + \hat{f}(k).$

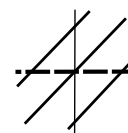
$\xrightarrow{c.i.} \begin{cases} p(k) + \hat{f}(k) = \hat{f}(k), p(k) = 0 \\ ikp(k) + q(k) = \hat{g}(k), q(k) = \hat{g}(k) \end{cases} \rightarrow \hat{u}(k, t) = t \hat{g}(k) e^{ikt} + \hat{f}(k), \boxed{u(x, t) = t g(x-t) + f(x)}.$

b] $B^2 - 4AC = 0$ $\begin{cases} \xi = x - t \\ \eta = t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_t = -u_\xi + u_\eta \\ u_x = u_\xi \end{cases}, \begin{cases} u_{tt} = u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \\ u_{xt} = -u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta} \\ u_{xx} = u_{\xi\xi} \end{cases} \rightarrow \boxed{u_{\eta\eta} = 2}$ forma canónica $u(\xi, \eta) = p(\xi) + q(\eta)\eta + \eta^2$.

Solución general: $\boxed{u(x, t) = p(x-t) + q(x-t)t + t^2}$, $u_t = -p' + q - q't + 2t$. Imponiendo datos:

$\begin{cases} u(x, 0) = p(x) = x^2 \\ -2x + q(x) = x, q(x) = 3x \end{cases} \rightarrow u = x^2 - 2xt + t^2 + 3xt - 3t^2 + t^2 = \boxed{u(x, t) = x^2 + tx - t^2}$ la que daría **a]**.

[$v = x^2$ cumple EDP. $w = u - v \rightarrow \begin{cases} w_{tt} + 2w_{tx} + w_{xx} = 0 \rightarrow w_{\eta\eta} = 0, w = p(x-t) + q(x-t)t \\ w(x, 0) = 0, w_t(x, 0) = x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} p(x) = 0, q(x) = x \end{cases}$ (la u general toma otra forma: $u = p + qt + x^2$).



- 1.** Sea (e) $x(1+x)y'' - xy' - 3y = 0$. **a)** Calcular una corta solución de (e) no trivial y_1 que se anule en $x=0$, dando la regla de recurrencia. ¿Están todas las soluciones de (e) acotadas en $x=0$? [1.4 pts]
op) Estudiar si hay alguna solución no trivial de (e) que tienda a 0 cuando $x \rightarrow \infty$. [0.8 pts]
 [Podría o no ser útil saber que $y = x(1+x)^2 \ln(1 + \frac{1}{x}) - x^2 - \frac{3x}{2} - \frac{1}{3}$ es una solución de (e)].

a) $x=0$ singular. $x^2 y'' + x(\frac{-x}{1+x})y' - \frac{3x}{1+x}y = 0$. Singular regular con $r(r-1)=0$. $y_1 = x \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ se anula en $x=0$.
 $y_2 = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k + dy_1 \ln x$ también acotada en 0, sea o no $d=0$ (se puede ver que $d \neq 0$), ya que $x \ln|x| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.
 Llevando y_1 a (e): $\sum_1 [(k+1)kc_k x^k + (k+1)kc_k x^{k+1}] + \sum_0 [-(k+1)c_k x^{k+1} - 3c_k x^{k+1}] = 0 \rightarrow$
 $x^1: 2c_1 - c_0 - 3c_0 = 0, c_1 = 2c_0. x^2: 6c_2 + 2c_1 - 2c_1 - 3c_1 = 0, c_2 = \frac{1}{2}c_1 = c_0.$
 $x^{k+1}: (k+2)(k+1)c_{k+1} + [k^2 - 4]c_k = 0, c_{k+1} = \frac{2-k}{k+1}c_k \rightarrow c_3 = c_4 = \dots = 0. \quad y_1 = x + 2x^2 + x^3 = x(1+x)^2.$
op) $x = \frac{1}{s} \rightarrow \frac{1}{s}(\frac{1}{s} + 1)[s^4 + 2s^3]\ddot{y} + s\dot{y} - 3y = s^2(1+s)\ddot{y} + s(3+2s)\dot{y} + 4y = 0. s=0$ singular regular con $r^2 + 2r - 3 = 0$.
 $r=1, -3. y_1 = s \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \xrightarrow{s \rightarrow 0} 0$ (o sea, si $x \rightarrow \pm\infty$). $[y_2 = s^{-3} \sum_{k=0}^{\infty} b_k s^k + dy_1 \ln s$ es la y_1 de arriba que $\rightarrow \infty$].
 [A partir de la y_1 e integrando se puede llegar a la otra solución elemental y_2 citada en la posible ayuda.
 Esta y_2 tiende a $-1/3$ cuando $x \rightarrow 0$ y, sorprendentemente, a 0 cuando $x \rightarrow \infty$].

- 2.** Sea $(P_f) \begin{cases} x(1+x)y'' - xy' + \lambda y = x \\ y'(1) = y'(2) = 0 \end{cases}$. **a)** Escribir la EDO en forma autoadjunta. [0.4+1=1.4 pts]
b) Probar que $\lambda=0$ es autovalor del homogéneo, dar su autofunción $\{y_0\}$ y determinar cuántas soluciones tiene (P_f) para $\lambda=0$.
op) Precisar cuántas soluciones tiene (P_f) cuando $\lambda=-3$. [La respuesta es corta, aunque, como la homogénea es la del problema 1., se podría perder tiempo imponiendo datos]. [0.8 pts]

a) $y'' - \frac{y'}{x+1} + \frac{\lambda y}{x(x+1)} = \frac{1}{x+1}, e^{\int a} = \frac{1}{x+1}, \frac{y''}{x+1} - \frac{y'}{(x+1)^2} + \frac{\lambda y}{x(x+1)^2} = \left[\frac{y'}{x+1}\right]' + \frac{\lambda y}{x(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$ forma autoadjunta.

b) Para $\lambda=0$ la homogénea es $y'' = \frac{y'}{x+1} \rightarrow v = y' = C^*(x+1), y = C(x+1)^2 + K. \frac{y'(1)=4C=0}{y'(2)=6C=0} \rightarrow y_0 = \{1\}.$

El (P_f) tendrá infinitas o ninguna según sea el valor de $\int_1^2 \frac{1}{(x+1)^2} dx = \left[-\frac{1}{1+x}\right]_1^2 = \frac{1}{6} \neq 0$. **Sin solución.**

O se ve fácil la solución particular $y_p = -x$ de $(1+x)y'' - y' = 1$. Imponiendo datos a la solución de la no homogénea:

$$y = C(x+1)^2 + K - x, y' = 2C(x+1) - 1 \rightarrow \frac{y'(1)=4C-1=0}{y'(2)=6C-1=0} \text{ imposible.}$$

op) Como $\alpha\alpha' = \beta\beta' = q = 0$, todos los $\lambda \geq 0$ y seguro que $\lambda = -3$ no es autovalor (comprobable con lo visto en 1.). Como el homogéneo tiene sólo la solución trivial, el (P_f) tiene **solución única** para $\lambda = -3$.

- 3.** Sea $\begin{cases} u_t - u_{xx} = 2 \cos x, x \in (0, \frac{\pi}{2}), t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), u_x(0, t) = u_x(\pi/2, t) = 0 \end{cases}$ **a)** Calcular y comprobar la solución si $f(x) = \cos x$ y dar un término de la serie para $f(x) = \frac{3\pi}{8} \sin 2x$. [1.7 pts]
op) Calcular y escribir la serie solución completa en el caso $f(x) = \frac{3\pi}{8} \sin 2x$. [0.8 pts]

a) Las autofunciones del homogéneo saldrán del problema $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X(\pi/2) = 0 \end{cases}, X_n = \{\cos(2n-1)x\}_{n=1,2,\dots}$ (formulario y datos de contorno).

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n \xrightarrow{\text{EDP}} \sum_{n=1}^{\infty} [T'_n + (2n-1)^2 T_n] \cos(2n-1)x = 2 \cos x, \text{ y además } \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \cos(2n-1)x = f(x).$$

Para el $\cos x$ es claro que $T_1(0) = 1$ y que $T_n(0) = 0$ si $n \neq 1$. El único problema con solución no nula será:

$$\begin{cases} T'_1 + T_1 = 2 \\ T_1(0) = 1 \end{cases}, T_1 = Ce^{-t} + 2 [y_p \text{ a ojo o con la fvc}] \xrightarrow{\text{d.i.}} C = -1. \quad u(x, t) = (2 - e^{-t}) \cos x \quad \begin{matrix} \text{Fácil de comprobar,} \\ \text{datos obvios y} \\ e^{-t}C + (2 - e^{-t})C = 2C \end{matrix}$$

Con la otra f necesitamos integrar para conocer los $T_n(0)$. Será $c_n = \frac{2}{\pi/2} \frac{3\pi}{8} \int_0^{\pi/2} \sin(2x) \cos(2n-1)x dx$.

En particular es $c_1 = 3 \int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx = -\cos^3 x \Big|_0^{\pi/2} = 1$ (el mismo de antes). $u = (2 - e^{-t}) \cos x + \dots$

op) Los demás $c_n = \frac{3}{4} \int_0^{\pi/2} [\sin(2n+1)x + \sin(3-2n)x] dx = \frac{3}{4} \left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3-2n} \right] = \frac{3}{(2n+1)(3-2n)} \cdot [1, -\frac{3}{5}, -\frac{1}{7}, \dots]$
 $\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

$$\text{Más términos de la serie salen de: } \begin{cases} T'_n + (2n-1)^2 T_n = 0 \\ T_n(0) = c_n \end{cases} \rightarrow u = (2 - e^{-t}) \cos x - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3e^{-(2n-1)^2 t}}{(2n+1)(2n-3)} \cos(2n-1)x \\ (2 - e^{-t}) \cos x - \frac{3}{5} e^{-9t} \cos 3x - \frac{1}{7} e^{-25t} \cos 5x - \dots$$