Soluciones de los controles 1 y 1* de Métodos II (E) (19-3-14)

1. Sea $u_{yy}+6u_{xy}+9u_{xx}+9u=9$. Escribirla en forma canónica y hallar su solución general. [0.4 puntos]

2. Sea $\begin{cases} u_{tt}-4u_{xx}=0\,,\ x\geq 0\,,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=\begin{cases}\cos x-1\,,\ x\in[2\pi,4\pi] \\ 0\,,\ x\in[0,2\pi]\cup[4\pi,\infty)\end{cases} \\ u_t(x,0)=u(0,t)=0 \end{cases}$. Dibujar la extensión f^*. Hallar $u(3\pi,3\pi)$. Dibujar $u(x,3\pi)$. Hallar $u(2\pi,t)$ para $t\geq 3\pi$. [0.5 puntos]

3. Resolver $\begin{cases} u_t-u_x=2x\mathrm{e}^{-x^2} \\ u(x,2)=0 \end{cases}$ i) con las caracteristicas, ii) utilizando la $\mathcal{F}$. [El término no homogéneo es derivada de función de transformada conocida]. [0.7 puntos]

1. $\underset{\text{parabólica}}{B^2-4AC=0}$ $\begin{cases}\xi=x-3y \\ \eta=y\end{cases} \to \begin{cases} u_{xx}=u_{\xi\xi} \\ u_{xy}=-3u_{\xi\xi}+u_{\xi\eta} \\ u_{yy}=9u_{\xi\xi}-6u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\end{cases} \to \boxed{u_{\eta\eta}+9u=9} \xrightarrow{\mu^2+9=0} u=p(\xi)\cos 3\eta+q(\xi)\operatorname{sen}3\eta+1$,

$\boxed{u(x,y)=p(x-3y)\cos 3y+q(x-3y)\operatorname{sen}3y+1}$ [problema de **R**, solución en **R**].

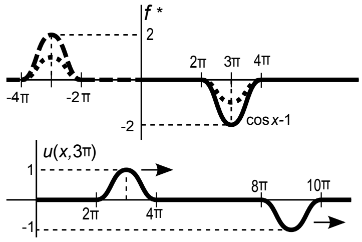
2. Para aplicar D'Alembert extendemos f a f^* impar definida en todo **R**.

$u=\frac{1}{2}\big[f^*(x+2t)+f^*(x-2t)\big] \to u(3\pi,3\pi)=\frac{1}{2}\big[f^*(9\pi)+f^*(-3\pi)\big]=\frac{-f(3\pi)}{2}=\boxed{1}$

Para dibujar $u(x,3\pi)=\frac{1}{2}\big[f^*(x+6\pi)+f^*(x-6\pi)\big]$ basta trasladar la gráfica de $\frac{1}{2}f^*$ a izquierda y derecha 6π unidades y sumar.

Si $t\geq 3\pi$ es $u(2\pi,t)=\frac{1}{2}\big[f^*(2\pi+2t)+f^*(2\pi-2t)\big]=\boxed{0}$, pues $\begin{matrix}2\pi+2t\geq 8\pi\,, \\ 2\pi-2t\leq -4\pi\,.\end{matrix}$

[A partir de ese t es superado 2π por la onda rebotada viajando hacia la derecha].



3. i) $\frac{dt}{dx}=-1$. $\int dt=-\int dx+C$. Características: $\boxed{x+t=C}$. [La recta $t=2$ no lo es y hay solución única].

Mucho más corto: $\begin{cases}\xi=x+t \\ \eta=x\end{cases} \to \begin{cases}u_t=u_\xi \\ u_x=u_\xi+u_\eta\end{cases} \to u_\eta=-2x\mathrm{e}^{-x^2}=-2\eta\mathrm{e}^{-\eta^2}$. $u=p(\xi)+\mathrm{e}^{-\eta^2}=p(x+t)+\mathrm{e}^{-x^2}$.

Imponiendo el dato inicial: $u(x,2)=p(x+2)+\mathrm{e}^{-x^2}=0 \to p(v)=-\mathrm{e}^{-(v-2)^2}$, $\boxed{u(x,t)=\mathrm{e}^{-x^2}-\mathrm{e}^{-(x+t-2)^2}}$.

ii) Si $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$, el término de la derecha es $-f'$ y su transformada es $\mathrm{i}k\hat{f}$, conocida:

$\begin{cases}\hat{u}_t+\mathrm{i}k\,\hat{u}=\frac{\mathrm{i}k}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-k^2/4} \\ \hat{u}(k,2)=0\end{cases} \to \hat{u}=p(k)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-k^2/4} \xrightarrow{c.i.} p(k)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-k^2/4+2\mathrm{i}k}$, $\hat{u}=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-k^2/4}-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-k^2/4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(2-t)}$.

Como $\mathcal{F}^{-1}\big[\hat{f}(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}ka}\big]=f(x-a)$, es $u(x,t)=\mathrm{e}^{-x^2}-\mathrm{e}^{-(x+t-2)^2}$. [Resolver con $\mathcal{F}$ es transformar e imponer también el dato inicial].

1*. Sea $u_{yy}-4u_{xy}+4u_{xx}-4u=8$. Escribirla en forma canónica y hallar su solución general. [0.4 puntos]

2*. Sea $\begin{cases} u_{tt}-9u_{xx}=0\,,\ x\geq 0\,,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=\begin{cases}\operatorname{sen}^2\pi x\,,\ x\in[1,2] \\ 0\,,\ x\in[0,1]\cup[2,\infty)\end{cases} \\ u_t(x,0)=u(0,t)=0 \end{cases}$. Dibujar la extensión f^*. Hallar $u(\frac{3}{2},1)$. Dibujar $u(x,1)$. Hallar $u(1,t)$ para $t\geq 1$. [0.5 puntos]

3*. Resolver $\begin{cases} u_t+u_x=x\mathrm{e}^{-x^2/2} \\ u(x,1)=0 \end{cases}$ i) con las caracteristicas, ii) utilizando la $\mathcal{F}$. [El término no homogéneo es derivada de función de transformada conocida]. [0.7 puntos]

1*. $\underset{\text{parabólica}}{B^2-4AC=0}$ $\begin{cases}\xi=x+2y \\ \eta=y\end{cases} \to \begin{cases} u_{xx}=u_{\xi\xi} \\ u_{xy}=2u_{\xi\xi}+u_{\xi\eta} \\ u_{yy}=4u_{\xi\xi}+4u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\end{cases} \to \boxed{u_{\eta\eta}-4u=8} \xrightarrow{\mu^2-4=0} u=p(\xi)\,\mathrm{e}^{2\eta}+q(\xi)\,\mathrm{e}^{-2\eta}-2$,

$\boxed{u(x,y)=p(x+2y)\,\mathrm{e}^{2y}+q(x+2y)\,\mathrm{e}^{-2y}-2}$.

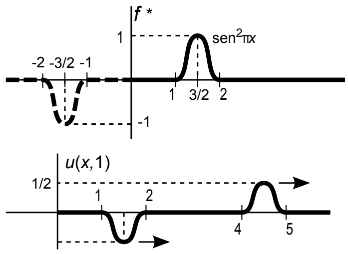
2*. Para aplicar D'Alembert extendemos f a f^* impar definida en todo **R**.

$u=\frac{1}{2}\big[f^*(x+3t)+f^*(x-3t)\big] \to u(\frac{3}{2},1)=\frac{1}{2}\big[f^*(\frac{9}{2})+f^*(-\frac{3}{2})\big]=\frac{-f(3/2)}{2}=\boxed{-\frac{1}{2}}$

Para dibujar $u(x,1)=\frac{1}{2}\big[f^*(x+3)+f^*(x-3)\big]$ basta trasladar la gráfica de $\frac{1}{2}f^*$ a izquierda y derecha 3 unidades y sumar.

Si $t\geq 1$ es $u(1,t)=\frac{1}{2}\big[f^*(1+3t)+f^*(1-3t)\big]=\boxed{0}$, pues $\begin{matrix}1+3t\geq 4\,, \\ 1-3t\leq -2\,.\end{matrix}$

[A partir de ese t es superado 1 por la onda rebotada viajando hacia la derecha].



3*. i) $\frac{dt}{dx}=1$. $\int dt=\int dx+C$. Características: $\boxed{x-t=C}$. [La recta $t=1$ no lo es y hay solución única].

Mucho más corto: $\begin{cases}\xi=x-t \\ \eta=x\end{cases} \to \begin{cases}u_t=-u_\xi \\ u_x=u_\xi+u_\eta\end{cases} \to u_\eta=x\mathrm{e}^{-x^2/2}=\eta\mathrm{e}^{-\eta^2/2}$. $u=p(\xi)-\mathrm{e}^{-\eta^2/2}=p(x-t)-\mathrm{e}^{-x^2/2}$.

El dato inicial: $u(x,1)=p(x-1)-\mathrm{e}^{-x^2/2}=0 \to p(v)=\mathrm{e}^{-(v+1)^2/2}$, $\boxed{u(x,t)=\mathrm{e}^{-(x-t+1)^2/2}-\mathrm{e}^{-x^2/2}}$.

ii) Si $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2/2}$, el término de la derecha es $-f'$ y su transformada es $\mathrm{i}k\hat{f}$, conocida:

$\begin{cases}\hat{u}_t-\mathrm{i}k\,\hat{u}=\mathrm{i}k\,\mathrm{e}^{-k^2/2} \\ \hat{u}(k,1)=0\end{cases} \to \hat{u}=p(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}-\mathrm{e}^{-k^2/2} \xrightarrow{c.i.} p(k)=\mathrm{e}^{-k^2/2-\mathrm{i}k}$, $\hat{u}=\mathrm{e}^{-k^2/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(t-1)}-\mathrm{e}^{-k^2/2}$.

Como $\mathcal{F}^{-1}\big[\hat{f}(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}ka}\big]=f(x-a)$, es $u(x,t)=\mathrm{e}^{-(x-t+1)^2/2}-\mathrm{e}^{-x^2/2}$. [Resolver con $\mathcal{F}$ es transformar e imponer también el dato inicial].

Soluciones del control 1 de Métodos II (C) (19-3-14)

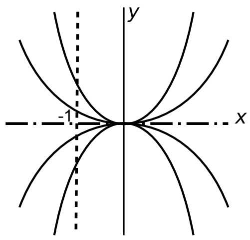
1. Resolver $\begin{cases}3yu_y+xu_x=3u-3\\ u(-1,y)=y\end{cases}$. ¿Cuántas soluciones de la ecuación cumplen $u(x,x^3)=x$? [0.5 puntos]

2. Escribir en forma canónica $u_{yy}+4u_{xy}+5u_{xx}+u_y+2u_x=x$. [0.2 puntos]

3. Sea $\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\geq 0\,,\ t\in\mathbf{R}\\ u(x,0)=0\,,\ u_t(x,0)=\begin{cases}(x-2)(x-4)\,,\ x\in[2,4]\\ 0\,,\ \text{resto de }[0,\infty)\end{cases}\\ u(0,t)=0\end{cases}$. Dibujar la extensión g^*. Hallar el valor de $u(3,6)$. Hallar $u(3,t)$ para $t\geq 7$ y para $1\leq t\leq 5$. [0.5 puntos]

4. Resolver, utilizando la transformada de Fourier, $\begin{cases}u_t-u_{xx}+2u=0\,,\ x\in\mathbf{R}\,,\ t>0\\ u(x,0)=e^{-x^2/4},\ u\text{ acotada}\end{cases}$. [0.4 puntos]

1. $\frac{dy}{dx}=\frac{3y}{x}\xrightarrow{\text{lineal}} y=Cx^3\,,\ \frac{y}{x^3}=C$. Haciendo $\begin{cases}\xi=yx^{-3}\\ \eta=y\end{cases}\to\begin{cases}u_y=x^{-3}u_\xi+u_\eta\\ u_x=-3yx^{-4}u_\xi\end{cases}\to$



$3yu_\eta=3u-3\,,\ u_\eta=\frac{u-1}{\eta}$ lineal (y separable), $u=p(\xi)\eta+\underset{\text{a ojo}}{1}=p\left(\frac{y}{x^3}\right)y+1$.
(más largo es hacer $-\eta\int\eta^{-2}d\eta=1$)

$u(-1,y)=y\to -p(-y)\,y+1=y\,,\ p(v)=1+\frac{1}{v}\to \boxed{u(x,y)=y+x^3+1}$.

Con $\begin{cases}\xi=yx^{-3}\\ \eta=x\end{cases}\to u_\eta=\frac{3u-3}{\eta}\,,\ u=p^*(\xi)\eta^3+1=p^*\left(\frac{y}{x^3}\right)x^3+1\,,\ p^*(v)\overset{\uparrow}{=}1+v$

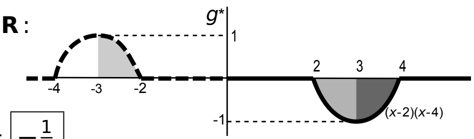
Solución única porque la recta $x=-1$ no es tangente a las características como se ve en el dibujo. O porque en el proceso de cálculo ha quedado $p(v)$ determinada de forma única $\forall v$. O porque $T=0\cdot 3y-1\cdot(-1)=1\neq 0$.

$u(x,x^3)=p(1)x^3+1=x$ $\left[\text{o } p^*(1)x^3+1=x\right]$ nos dice que el problema **no tiene ninguna solución**.

[El dato propuesto inicialmente $u(x,0)=x\to p(0)\cdot 0+1=x$, penalizaba a quienes (resolviendo como separable) eligiesen como características $x^3y^{-1}=C$ y, por eso, propuse como alternativa este nuevo dato más neutral].
Que ambas eran características lo decían: $T=3x^3-3x^2x\equiv 0$ (en la nueva) y $T=1\cdot 3\cdot 0-0\cdot x\equiv 0$ (en la inicial).

2. $\underset{\text{elíptica}}{B^2-4AC=-4}$ $\begin{cases}\xi=x-2y\\ \eta=y\end{cases}$, $\begin{cases}u_y=-2u_\xi+u_\eta\\ u_x=u_\xi\end{cases}$, $\begin{cases}u_{yy}=4u_{\xi\xi}-4u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\\ u_{xy}=-2u_{\xi\xi}+u_{\xi\eta}\\ u_{xx}=u_{\xi\xi}\end{cases}\to \boxed{u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+u_\eta=\xi+2\eta}$ (no resoluble).

3. Para aplicar D'Alembert extendemos a g^* impar definida en todo $\mathbf{R}$:



Entonces $u(x,t)=\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}g^*(s)\,ds$ será la solución del problema.

$u(3,6)=\frac{1}{2}\int_{-3}^{9}g^*\underset{\text{impar}}{=}\frac{1}{2}\int_3^4(s^2-6s+8)\,ds=\left[\frac{s^3}{6}-\frac{3s^2}{2}\right]_3^4+4=-\frac{13}{3}+4=\boxed{-\frac{1}{3}}$.

Para $t\geq 7$ es $3-t\geq -4$ y $3+t\geq 10$. Por tanto $u(3,t)=\frac{1}{2}\int_{3-t}^{3+t}g^*=\boxed{0}$, pues las áreas se cancelan.

Para $1\leq t\leq 5$ es $-2\leq 3-t\leq 2$ y $3+t\geq 4$, con lo que $u(3,t)=\frac{1}{2}\int_2^4(s^2-6s+8)\,ds=\boxed{-\frac{2}{3}}$ [el doble de la de arriba].

4. $\begin{cases}\hat u_t+k^2\hat u+2u=0\\ \hat u(k,0)=\sqrt{2}\,e^{-k^2}\end{cases}\to \hat u=p(k)\,e^{-k^2t-2t}\xrightarrow{c.i.}p(k)=\sqrt{2}\,e^{-k^2},\ \hat u=\sqrt{2}\,e^{-2t}e^{-(t+1)k^2}\to\boxed{u(x,t)=\frac{e^{-2t}}{\sqrt{t+1}}e^{-x^2/(4t+4)}}$.

Sólo hemos necesitado la $\mathcal{F}[f'']$ y las de las gausianas: $\mathcal{F}\left[e^{-ax^2}\right]=\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-k^2/4a}$ y la similar.

Soluciones de los controles 2 y 2* de Métodos II (E) (14-5-14)

1. Sea $3xy''-2y'-3x^2y=0$. Hallar 2 términos no nulos del desarrollo de una solución que se anule en $x=0$ dando la regla de recurrencia. ¿En $x=0$ son todas las soluciones analíticas? ¿Son derivables? [0.6 puntos]

$x=0$ es singular regular con $r(r-1)-\frac{2}{3}\cdot r+0=0$, $r_1=\frac{5}{3}$ y $r_2=0$. Se anula en $x=0$: $y_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+5/3}$ →

$$\sum_{k=0}^{\infty}\big[3(k+\tfrac{5}{3})(k+\tfrac{2}{3})c_kx^{k+2/3}-2(k+\tfrac{5}{3})c_kx^{k+2/3}-3c_kx^{k+11/3}\big]=\sum_{k=0}^{\infty}\big[k(3k+5)c_kx^{k+2/3}-3c_kx^{k+11/3}\big]=0$$

$\rightarrow$ $x^{2/3}: 0c_0=0$, c_0 indeterminado; $x^{5/3}: 8c_1=0$, $c_1=0$; $x^{8/3}: 22c_2=0$, $c_2=0$;

$x^{k+2/3}: k(3k+5)c_k-3c_{k-3}=0 \rightarrow c_k=\frac{3}{k(3k+5)}c_{k-3} \rightarrow c_3=\frac{1}{14}c_0$. $\big[c_{3k}=\frac{c_{3k-3}}{k(9k+5)}$ y $c_{3k+1}=c_{3k+2}=0\big]$.

Los dos términos pedidos son, pues: $\boxed{y_1=x^{5/3}\big[1+\frac{1}{14}x^3+\cdots\big]=x^{5/3}+\frac{1}{14}x^{14/3}+\cdots}$.

La otra solución $y_2=\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k$ es analítica, pero la y_1 de arriba no lo es. Todas son derivables. Claramente lo es y_2. Y también y_1, producto de funciones derivables ($x^{5/3}$ lo es, aunque no tiene derivada segunda).

1*. Sea $3xy''-y'-3x^2y=0$. Hallar 2 términos no nulos del desarrollo de una solución que se anule en $x=0$ dando la regla de recurrencia. ¿En $x=0$ son todas las soluciones analíticas? ¿Son derivables? [0.6 puntos]

$x=0$ es singular regular con $r(r-1)-\frac{1}{3}\cdot r+0=0$, $r_1=\frac{4}{3}$ y $r_2=0$. Se anula en $x=0$: $y_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+4/3}$ →

$$\sum_{k=0}^{\infty}\big[3(k+\tfrac{4}{3})(k+\tfrac{1}{3})c_kx^{k+1/3}-(k+\tfrac{4}{3})c_kx^{k+1/3}-3c_kx^{k+10/3}\big]=\sum_{k=0}^{\infty}\big[k(3k+4)c_kx^{k+1/3}-3c_kx^{k+10/3}\big]=0$$

$\rightarrow$ $x^{1/3}: 0c_0=0$, c_0 indeterminado; $x^{4/3}: 7c_1=0$, $c_1=0$; $x^{7/3}: 20c_2=0$, $c_2=0$;

$x^{k+1/3}: k(3k+4)c_k-3c_{k-3}=0 \rightarrow c_k=\frac{3}{k(3k+4)}c_{k-3} \rightarrow c_3=\frac{1}{13}c_0$. $\big[c_{3k}=\frac{c_{3k-3}}{k(9k+4)}$ y $c_{3k+1}=c_{3k+2}=0\big]$.

Los dos términos pedidos son, pues: $\boxed{y_1=x^{4/3}\big[1+\frac{1}{13}x^3+\cdots\big]=x^{4/3}+\frac{1}{13}x^{13/3}+\cdots}$.

La otra solución $y_2=\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k$ es analítica, pero la y_1 de arriba no lo es. Todas son derivables. Claramente lo es y_2. Y también y_1, producto de funciones derivables ($x^{4/3}$ lo es, aunque no tiene derivada segunda).

2. Sea $\begin{cases}x^2y''+\lambda y=5x^2-3x^3\\ y(1)=y(2)-y'(2)=0\end{cases}$. **a]** Estudiar si $\lambda=0$ y $\lambda=\frac{1}{2}$ son o no autovalores del problema homogéneo, escribiendo la autofunción cuando lo sea. $\big[\tan\frac{\ln 2}{2}\approx 0.36\big]$.
b] Precisar ambos casos cuántas soluciones tiene el problema no homogéneo. [0.6 puntos]

a] Euler. $\mu(\mu-1)+\lambda=0$, $\mu=\frac{1\pm\sqrt{1-4\lambda}}{2}$ → $\mu=1,0$, si $\lambda=0$ (o directamente $y''=0$); $\mu=\frac{1}{2}\pm\frac{i}{2}$, si $\lambda=\frac{1}{2}$.

$\lambda=0$: $y=c_1x+c_2$, $y'=c_1$ → $\left.\begin{matrix}c_1+c_2=0\\ c_1+c_2=0\end{matrix}\right\}$ → $c_1=-c_2$. Es **autovalor** con autofunción $\boxed{y_0=\{1-x\}}$.

$\lambda=\frac{1}{2}$: $y=x^{1/2}\big[c_1\cos\frac{\ln x}{2}+c_2\,\mathrm{sen}\,\frac{\ln x}{2}\big]\xrightarrow{y(1)=0} c_1=0$, $y'=\frac{1}{2}c_2x^{-1/2}\big[\mathrm{sen}\,\frac{\ln x}{2}+\cos\frac{\ln x}{2}\big]$ →

$y(2)-y'(2)=c_2\frac{\sqrt{2}}{4}\big[3\,\mathrm{sen}\frac{\ln 2}{2}-\cos\frac{\ln 2}{2}\big]$. El $[\cdot]=0$ si $\tan\frac{\ln 2}{2}=\frac{1}{3}$ y no lo es. $c_1=c_2=0$. **No es autovalor**.

b] Para $\lambda=\frac{1}{2}$ el homogéneo tiene sólo la solución trivial y el no homogégeo **tiene solución única**.

Si $\lambda=0$: $[y']'=5-3x$. $\int_1^2(5-3x)(1-x)\,dx=\int_1^2(5-8x+3x^2)\,dx=5-4[x^2]_1^2+[x^3]_1^2=0 \Rightarrow$ **infinitas soluciones**.

$\Big[$O bien, $y=c_1x+c_2+\frac{5x^2}{2}-\frac{x^2}{2}\xrightarrow{c.c.}\left.\begin{matrix}c_1+c_2+2=0\\ c_1+c_2+2=0\end{matrix}\right\}$ → una de las dos constantes queda indeterminada$\Big]$.

2*. Sea $\begin{cases}x^2y''+\lambda y=7x^2-3x^3\\ y(1)=y(3)-2y'(3)=0\end{cases}$. **a]** Estudiar si $\lambda=0$ y $\lambda=\frac{1}{2}$ son o no autovalores del problema homogéneo, escribiendo la autofunción cuando lo sea. $\big[\tan\frac{\ln 3}{2}\approx 0.61\big]$.
b] Precisar ambos casos cuántas soluciones tiene el problema no homogéneo. [0.6 puntos]

a] $\lambda=0$: $y=c_1x+c_2$, $y'=c_1$ → $\left.\begin{matrix}c_1+c_2=0\\ c_1+c_2=0\end{matrix}\right\}$ → $c_1=-c_2$. Es **autovalor** con autofunción $\boxed{y_0=\{1-x\}}$.

$\lambda=\frac{1}{2}$, $\mu=\frac{1}{2}\pm\frac{i}{2}$: $y=x^{1/2}\big[c_1\cos\frac{\ln x}{2}+c_2\,\mathrm{sen}\,\frac{\ln x}{2}\big]\xrightarrow{y(1)=0} c_1=0$, $y'=\frac{1}{2}c_2x^{-1/2}\big[\mathrm{sen}\,\frac{\ln x}{2}+\cos\frac{\ln x}{2}\big]$ →

$y(3)-2y'(3)=c_2\frac{\sqrt{3}}{3}\big[2\,\mathrm{sen}\frac{\ln 3}{2}-\cos\frac{\ln 3}{2}\big]$. El $[\cdot]=0$ si $\tan\frac{\ln 3}{2}=\frac{1}{2}$ y no lo es. $c_1=c_2=0$. **No es autovalor**.

b] Para $\lambda=\frac{1}{2}$ el homogéneo tiene sólo la solución trivial y el no homogéneo **tiene solución única**.

Si $\lambda=0$: $[y']'=7-3x$. $\int_1^3(7-3x)(1-x)\,dx=\int_1^3(7-10x+3x^2)\,dx=14-40+26=0 \Rightarrow$ **infinitas soluciones**.

$\Big[$O bien, $y=c_1x+c_2+\frac{7x^2}{2}-\frac{x^2}{2}\xrightarrow{c.c.}\left.\begin{matrix}c_1+c_2+3=0\\ c_1+c_2+3=0\end{matrix}\right\}$ → una de las dos constantes queda indeterminada$\Big]$.

3. Sea $\begin{cases} u_t - \frac{1}{4}u_{xx} = 0\,,\ x\in(0,\pi)\,,\ t>0 \\ u(x,0)=1\,,\, u(0,t)=u(\pi,t)=\mathrm{e}^{-t} \end{cases}$. Resolverlo por separación de variables utilizando la $v=\mathrm{e}^{-t}$ que proporciona el formulario. [0.8 puntos]

$w=u-v \to \begin{cases} w_t - \frac{1}{4}w_{xx} = \mathrm{e}^{-t}\,,\ x\in(0,\pi)\,,\ t>0 \\ w(x,0)=0\,,\, w(0,t)=w(\pi,t)=0 \end{cases}$. Al ser problema no homogéneo debemos hallar las X_n del homogéneo. Sabemos que al separar variables en él: $X''+\lambda X=0\,,\ X(0)=X(\pi)=0 \to X_n=\{\operatorname{sen} nx\}\,,\ n=1,2,\dots$

Llevamos a la ecuación $w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\operatorname{sen} nx \to \sum_{n=1}^{\infty}\big[T_n'+\frac{n^2}{4}T_n\big]\operatorname{sen} nx = \mathrm{e}^{-t} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\,\mathrm{e}^{-t}\operatorname{sen} nx\,,$

siendo $B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sen} nx\,dx = \frac{2}{n\pi}[1-\cos n\pi] = \frac{2}{n\pi}\big[1-(-1)^n\big]$ (que se anula para n par).

Del dato inicial: $w(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)\operatorname{sen} nx=0$, deducimos que debe ser $T_n(0)=0\ \forall n$.

Debemos pues resolver los infinitos problemas (con n impar):

$$\begin{cases} T_n'+\frac{n^2}{4}T_n=B_n\,\mathrm{e}^{-t} \\ T_n(0)=0 \end{cases} \xrightarrow[y_p=A\mathrm{e}^{-t}\text{ o fórmula}]{} T_n=C\,\mathrm{e}^{-n^2t/4}+\frac{4B_n\mathrm{e}^{-t}}{n^2-4} \xrightarrow{\text{d.i.}} T_n(t)=\frac{4B_n}{n^2-4}\left(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-n^2t/4}\right).$$

La solución es, por tanto: $\boxed{u(x,t)=\mathrm{e}^{-t}+\frac{16}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)[(2m-1)^2-4]}\big[\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-(2m-1)^2t/4}\big]\operatorname{sen}(2m-1)x}$.

3*. Sea $\begin{cases} u_t - \frac{1}{4}u_{xx} = 0\,,\ x\in(0,\pi)\,,\ t>0 \\ u(x,0)=1\,,\, u(0,t)=u(\pi,t)=\mathrm{e}^{-t} \end{cases}$. Resolverlo por separación de variables utilizando $v=\mathrm{e}^{-t}\cos 2x$, que cumple también la ecuación. [0.8 puntos]

$w=u-v \to \begin{cases} w_t - \frac{1}{4}w_{xx} = 0\,,\ x\in(0,\pi)\,,\ t>0 \\ w(x,0)=1-\cos 2x\,,\, w(0,t)=w(\pi,t)=0 \end{cases}$. Problema homogéneo (el primero de los apuntes).

Sabemos (formulario) que al separar variables salen $X''+\lambda X=0$ y $T'+\frac{1}{4}T=0$.
Y de los datos de contorno del problema salen los datos de contorno para la X: $X(0)=X(\pi)=0$.
Por tanto, son $\lambda_n=n^2$, $X_n=\{\operatorname{sen} nx\}$, $n=1,2,\dots$, y para esos λ_n obtenemos $T_n=\big\{\mathrm{e}^{-n^2t/4}\big\}$.

Construimos la serie $w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\mathrm{e}^{-n^2t/4}\operatorname{sen} nx$, a la que sólo le falta cumplir el dato inicial:

$w(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\operatorname{sen} nx = 1-\cos 2x \to$ sus coeficientes vienen datos por la integral:

$$c_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)\operatorname{sen} nx\,dx=\frac{2[1-(-1)^n]}{n\pi}-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\big[\operatorname{sen}(n+2)x+\operatorname{sen}(n-2)x\big]dx \quad \Big(\text{si } n=2\,,\ \int_0^{\pi}\operatorname{sen} 4x\,dx=0\Big).$$
$$=\frac{2[1-(-1)^n]}{n\pi}+\Big[\frac{\cos(n+2)\pi-1}{(n+2)\pi}+\frac{\cos(n-2)\pi-1}{(n-2)\pi}\Big]=\frac{1-(-1)^n}{\pi}\Big[\frac{2}{n}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n-2}\Big]=\frac{-8[1-(-1)^n]}{\pi n(n^2-4)}\,.$$

La solución es, por tanto: $\boxed{u(x,t)=\mathrm{e}^{-t}\cos 2x-\frac{16}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)[(2m-1)^2-4]}\,\mathrm{e}^{-(2m-1)^2t/4}\operatorname{sen}(2m-1)x}$.

[Las expresiones obtenidas en 3 y 3* definen, desde luego, la misma solución única del problema].

Soluciones del control 2 de Métodos II (C) (14-5-14)

1. Sea $x^2y''+x(1-x^2)y'+(3x^2-1)y=0$. Hallar una solución no trivial que sea analítica en $x=0$, dando la regla de recurrencia. ¿Están acotadas todas las soluciones en $x=0$? [0.6 puntos]

$x=0$ es singular regular con $r(r-1)+1\cdot r+0=0$, $r_1=1$ y $r_2=-1$. Es analítica en $x=0$: $y_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+1}$ $\to$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+1)kc_kx^{k+1}+(k+1)c_kx^{k+1}-(k+1)c_kx^{k+3}+3c_kx^{k+3}-c_kx^{k+1}\right]\to$$

$$x^1: c_0-c_0=0,\ c_0 \text{ indeterminado};\quad x^2: 2c_1+2c_1-c_1=0,\ c_1=0;\quad x^3: 8c_2+2c_0=0,\ c_2=-\tfrac{1}{4}c_0;$$

$$x^{k+1}: (k+2)c_k-(k-1-3)c_{k-2}=0 \to c_k=\tfrac{k-4}{k(k+2)}c_{k-2}\to c_3=c_5=c_7=\cdots=0 \text{ y } c_4=0=c_6=c_8=\cdots.$$

La solución pedida es, por tanto, el polinomio $\boxed{y_1=x\left[1-\tfrac{1}{4}x^2\right]=x-\tfrac{1}{4}x^3}$.

Esta y_1 claramente está acotada en $x=0$, pero la otra solución $y_2=\frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k+dy_1\ln x$ no lo está. El primer sumando se va a $\pm\infty$ y el otro (caso de existir), tiende a 0.

2. Sea $\begin{cases}x^2y''+xy'+\lambda y=0\\ y(1)-y'(1)=y(2)-2y'(2)=0\end{cases}$. **a]** Escribir la ecuación en forma autoadjunta. [0.6 puntos] **b]** Precisar si $\lambda=-1$ y $\lambda=0$ son o no autovalores del problema.

c] Discutir cuántas soluciones tiene $\begin{cases}x^2y''+xy'+\lambda y=x^2-a,\ a\in\mathbf{R}\\ y(1)-y'(1)=y(2)-2y'(2)=0\end{cases}$ para ambos valores de λ.

a] $y''+\frac{1}{x}y'+\frac{1}{x^2}\lambda y=0$, $e^{\int 1/x}=x$, $\boxed{\left[xy'\right]'+\frac{1}{x}\lambda y=0}$ forma autoadjunta.

b] Euler. $\mu(\mu-1)+\mu+\lambda=0$, $\mu=\pm\sqrt{-\lambda}$ $\to$ $\mu=\pm1$, si $\lambda=-1$; $\mu=0$, doble $\lambda=0$.

$\lambda=-1$: $y=c_1x+c_2x^{-1}$, $y'=c_1-c_2x^{-2}$ $\to$ $\left.\begin{array}{l}2c_2=0\\ \frac{1}{2}c_2+\frac{1}{2}c_2=0\end{array}\right\}\to c_2=0$ y cualquier c_1. Es **autovalor** con autofunción $\{x\}$.

$\lambda=0$: $y=c_1+c_2\ln x$, $y'=c_2x^{-1}$ $\to$ $\left.\begin{array}{l}c_1-c_2=0\\ c_1+c_2\ln 2-c_2=0\end{array}\right\}\to c_1=c_2=0$. **No es autovalor**.

c] Para $\lambda=0$ el homogéneo tiene sólo la solución trivial y el no homogéneo **tiene solución única** $\forall a$.

Para $\lambda=-1$: $\left[y'\right]'-\frac{1}{x}y=x-\frac{a}{x}$. Tendrá infinitas o ninguna solución dependiendo del valor de:

$\int_1^2(x-\frac{a}{x})\,x\,dx=\int_1^2(x^2-a)\,dx=\frac{7}{3}-a$. **Tiene infinitas soluciones si** $a=\frac{7}{3}$**. Ninguna si** $a\neq\frac{7}{3}$.

[Bastante más largo sería hallar la solución particular de la no homogénea e imponer los datos].

3. Resolver por separación de variables $\begin{cases}u_t-u_{xx}=\pi^2t\cos\pi x,\ x\in(0,1),\ t>0\\ u(x,0)=x,\ u_x(0,t)=u_x(1,t)=0\end{cases}$. [0.8 puntos]

Como es no homogéneo debemos hallar las X_n del homogéneo. Sabemos que al separar variables en él:

$$X''+\lambda X=0,\ X'(0)=X'(1)=0\to X_n=\{\cos n\pi x\},\ n=0,1,2,\ldots\ \left[X_0=\{1\}\right].$$

Llevamos a la ecuación $u(x,t)=T_0(t)+\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\cos n\pi x\to T_0'+\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n'+n^2\pi^2T_n\right]\cos n\pi x=\pi^2t\cos\pi x$.

La función de la derecha ya está desarrollada en esa familia de autofunciones.

Del dato inicial: $u(x,0)=T_0(0)+\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\cos n\pi x=x$, deducimos que debe ser $T_n(0)=a_n$, siendo:

$$a_0=\int_0^1x\,dx=\tfrac{1}{2},\ a_n\overset{n\geq1}{=}2\int_0^1x\cos n\pi x\,dx=\tfrac{2}{n\pi}\left[x\operatorname{sen}n\pi x\right]_0^1-\tfrac{2}{n\pi}\int_0^1\operatorname{sen}n\pi x\,dx=\tfrac{2[(-1)^n-1]}{n^2\pi^2}$$ (se anula si n par).

Debemos pues resolver infinitos problemas de tres tipos:

$$\begin{cases}T_0'=0\\ T_0(0)=\frac{1}{2}\end{cases}\to T_0=\tfrac{1}{2},\quad \begin{cases}T_1'+\pi^2T_1=\pi^2t\\ T_1(0)=-\frac{4}{\pi^2}\end{cases}\xrightarrow[y_p=At+B]{}T_1=Ce^{-\pi^2t}+t-\tfrac{1}{\pi^2}\xrightarrow{\text{d.i.}}T_1=t-\tfrac{1}{\pi^2}-\tfrac{3}{\pi^2}e^{-\pi^2t}.$$

$$\begin{cases}T_n'+n^2\pi^2T_n=0\\ T_n(0)=a_n\end{cases}\to T_n=Ce^{-n^2\pi^2t}\xrightarrow{\text{d.i.}}T_n=a_ne^{-n^2\pi^2t}$$ ($n\geq2$, nulas si n par).

La solución es, pues: $\boxed{u(x,t)=\frac{1}{2}+\left(t-\frac{1}{\pi^2}-\frac{3}{\pi^2}e^{-\pi^2t}\right)\cos\pi x-\frac{4}{\pi^2}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}e^{-(2m-1)^2\pi^2t}\cos(2m-1)x}$.