Examen de mayo de Métodos II (C) (14-5-25)

ELEGIR TRES problemas entre 1, 2, 3 y 4 (de 1.8 puntos) y ELEGIR DOS entre 5, 6 y 7 (de 2.3 puntos).

1. Sea la ecuación $(x+2y)u_y+xu_x=2u$ y los datos: i) $u(2,y)=2y$, ii) $u(x,-x)=x$. [1.8 ptos]
Calcular la solución que cumple el dato para el que hay solución única. ¿Cuántas soluciones cumplen el otro?

2. Sea $\begin{cases} u_{tt}-2u_{tx}+u_{xx}-u=0 \\ u(x,0)=f(x),\, u_t(x,0)=f'(x) \end{cases}$. **a]** Resolver el problema con la transformada de Fourier. **b]** Hallar su solución general a partir de la forma canónica. [1.8 ptos]

3. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0,\ x\geq 0,\, t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=0,\, u_t(x,0)=e^{-x},\, u(0,t)=t \end{cases}$. Hallar con D'Alembert: **a]** $u(1,2)$, **b]** $u(1,t)$ $\forall t\in[0,1]$. [La v para el cambio es clara]. [1.8 ptos]

4. Sea $xy''-2y'+xy=0$. Hallar, usando la regla de recurrencia, 3 términos no nulos del desarrollo en torno a $x=0$ de la solución y_1. ¿Dónde converge esta serie? ¿Están y_1 e y_2 acotadas en $x=0$? [1.8 ptos]

Elegir DOS entre 5, 6 y 7

5. Sea $\begin{cases} x^2y''-2xy'+\lambda y=2x^3 \\ y'(1)=4y(3)-3y'(3)=0 \end{cases}$. **a]** Estudiar si $\lambda=0$ y $\lambda=2$ son o no autovalores del problema homgéneo, escribiendo su autofunción $\{y_h\}$ en caso de serlo.
b] Para ambos valores de λ precisar cuántas soluciones tiene el problema no homogéneo. [2.3 ptos]

6. Resolver por separación de variables $\begin{cases} u_t-3t^2u_{xx}=e^{-4t^3}\cos 2x,\ x\in(0,\pi),\ t>0 \\ u(x,0)=2\,\text{sen}^2 x,\ u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=0 \end{cases}$. [2.3 ptos]

7. Resolver el problema en el semicírculo $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0,\ r<1,\ 0<\theta<\pi \\ u_r(1,\theta)=\pi\theta,\ u(r,0)=u_\theta(r,\pi)=0 \end{cases}$. [2.3 ptos]

Examen extraordinario de Métodos II (C) (24-6-25)

ELEGIR TRES problemas entre 1, 2, 3 y 4 y ELEGIR entre 5 y 5* y entre 6 y 6*.

1. Sea $2xu_y+u_x=3yu$ y los datos: i) $u(1,y)=e^y$, ii) $u(x,2x-1)=0$, iii) $u\big(x,x^2\big)=1$. [1.9 ptos]
Calcular la solución que cumple un dato que no plantee problemas de unicidad, razonando la elección.

2. Sea $\begin{cases} u_{tt}+u_{xt}-2u_{xx}-u_t+u_x=0 \\ u(x,0)=f(x),\, u_t(x,0)=f'(x) \end{cases}$. **a]** Resolver el problema sólo con la transformada de Fourier. [Observar un $(1+3ik)^2$ que aparece]. **b]** Hallar la solución general a partir de la forma canónica. [1.9 ptos]

3. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0,\ x\geq 0,\, t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=\begin{cases}\cos\frac{x}{2},\ x\in[\pi,3\pi] \\ 0,\ \text{resto de } [0,\infty)\end{cases},\ u_t(x,0)=\text{sen}\, x \\ u(0,t)=0 \end{cases}$. **a]** Escribir la expresión de las extensiones necesarias. **b]** Dibujar $u(x,4\pi)$. **c]** Dar la expresión de $u\big(\frac{7\pi}{2},t\big)$ para $t>7\pi$. [1.9 ptos]

4. Hallar 4 términos no nulos del desarrollo de una solución de $x^2y''+x(1-x)y'-y=0$ que se anule en $x=0$, dando la regla de recurrencia. Comprobarlos a partir de su solución general: $y=c_1\frac{e^x}{x}+c_2\frac{1+x}{x}$. [1.9 ptos]

ELEGIR entre 5 y 5*

5. Sea $\begin{cases} y''+2y'+\lambda y=0 \\ y'(0)=y'(1)=0 \end{cases}$. **a]** Escribir la ecuación en forma autoadjunta y determinar si $\lambda=-3$ y $\lambda=2$ son o no autovalores, dando la autofunción en caso de serlo.
b] Probar que $\lambda=0$ sí lo es, dar su autofunción $\{y_0\}$ y calcular el coeficiente de $\{y_0\}$ en el desarrollo de $f(x)=e^{-x}$ en serie de sus autofunciones. [2.4 ptos]

5*. Resolver por separación de variables $\begin{cases} u_t-4u_{xx}=\cos\frac{x}{2},\ x\in(0,\pi),\ t>0 \\ u(x,0)=0,\ u_x(0,t)=0,\, u(\pi,t)=\pi \end{cases}$. [La v del cambio es muy sencilla]. [2.4 ptos]

ELEGIR entre 6 y 6* (ecuaciones de Laplace en el plano)

6. Resolver $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0,\ 0<x<1,\ 0<y<\frac{\pi}{2} \\ u(x,0)=u\big(x,\frac{\pi}{2}\big)=0,\ u_x(0,y)=u_x(1,y)=2\,\text{sen}\,2y \end{cases}$. [1.9 ptos]

6*. Resolver $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=r^2\,\text{sen}\,2\theta,\ r<1,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2} \\ u_r(1,\theta)=0,\ u(r,0)=u\big(r,\frac{\pi}{2}\big)=0 \end{cases}$. [1.9 ptos]

Examen de mayo de Métodos II (C) (16-5-24)

Elegir CUATRO problemas entre 1, 2, 3, 4 y 5. Elegir DOS entre 6, 7 y 8.

1. Sea $u_y+xu_x=u-2e^{-y}$. Calcular la solución que cumple $u(-1,y)=0$ probando su unicidad. [1.6 ptos]

2. Sea $\begin{cases} u_{tt}+4u_{tx}+4u_{xx}+u_t+2u_x=0 \\ u(x,0)=0\,,\ u_t(x,0)=g(x) \end{cases}$. **a]** Resolver el problema con la transformada de Fourier. **b]** Hallar su solución general a partir de la forma canónica. [1.6 ptos]

3. Sea $x^2y''+x\big(1-4x^2\big)y'+\big(12x^2-1\big)y=0$. Hallar una solución no trivial cuyo desarrollo en torno a $x=0$ es un polinomio, dando la regla de recurrencia. ¿Posee soluciones no acotadas en $x=0$? [1.6 ptos]

4. Si $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\in[0,1]\,,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=x(1-x),\ u_t(x,0)=u(0,t)=u(1,t)=0 \end{cases}$, hallar con D'Alembert: **a]** El valor de $u\big(\frac{3}{4},\frac{9}{4}\big)$. **b]** $u\big(x,\frac{1}{4}\big)$ $\forall x\in[3/4,1]$. [1.6 ptos]

5. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\in[0,1]\,,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=x-x^2, u_t(x,0)=u(0,t)=u(1,t)=0 \end{cases}$. Resolverlo separando variables y ver que el primer término de la serie da $u\big(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\big)\approx\frac{4}{\pi^3}\approx 0.13$. [1.6 ptos]

Elegir DOS entre 6, 7 y 8

6. Sea $\begin{cases} x^2y''+xy'+\lambda y=0 \\ 2y(1)-y'(1)=y(2)-y'(2)=0 \end{cases}$. **a]** Determinar si $\lambda=-4$ y $\lambda=-1$ son o no autovalores, escribiendo su autofunción en caso de serlo.
b] Para uno de esos dos valores de λ hallar la constante a tal que $x^2y''+xy'+\lambda y=15x^3-a$ tenga infintas soluciones con esos mismos datos. [1.8 ptos]

7. Resolver el problema en el semicírculo $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=4\,,\ r<1\,,0<\theta<\pi \\ u(1,\theta)=\cos 2\theta,\ u_\theta(r,0)=u_\theta(r,\pi)=0 \end{cases}$. [1.8 ptos]

8. Sea $\begin{cases} u_t-2(u_{xx}+u_{yy})=0,\ (x,y)\in\big(0,\frac{\pi}{2}\big)\times\big(0,\frac{\pi}{2}\big), t>0 \\ u(x,y,0)=f(x,y) \\ u_y(x,0,t)=u\big(x,\frac{\pi}{2},t\big)=u(0,y,t)=u_x\big(\frac{\pi}{2},y,t\big)=0 \end{cases}$. Resolver este problema en 3 variables para una f general y dar su solución si $f(x,y)=\operatorname{sen}3x\cos y$. [1.8 ptos]

Examen extraordinario de Métodos II (C) (25-6-24)

ELEGIR TRES problemas entre 1, 2, 3 y 4 (de 1.8 puntos) y ELEGIR DOS entre 5, 6 y 7 (de valor 2.3 puntos).

1. Sea $3x^2u_y+u_x=4yu$. **a]** Calcular la solución que cumple $u(1,y)=e^{3y-2}$ probando su unicidad. [1.8 ptos]
b] Dar un dato de Cauchy para el que la EDP tenga: i) infinitas soluciones, ii) ninguna solución.

2. Resolver usando exclusivamente la transformada de Fourier los dos problemas:
a] $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0,\ x,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=2e^{-x^2},\ u_t(x,0)=0 \end{cases}$ **b]** $\begin{cases} u_t-u_{xx}=0,\ x\in\mathbf{R},\ t>0 \\ u(x,0)=2e^{-x^2},\ u \text{ acotada} \end{cases}$ [1.8 ptos]

3. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0,\ x\geq 0\,,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=0\,,u_t(x,0)=\begin{cases} 1-x, x\in[0,1] \\ 0\,,\ x\in[1,\infty) \end{cases} \\ u(0,t)=t \end{cases}$. **a]** Hacer el dato de contorno 0 usando una v clara y dar la expresión de la g^* del problema para w. **b]** Calcular $u(1,2)$, $u(2,2)$ y $u(x,2)$ para $x\geq 3$. [1.8 ptos]

4. Hallar 4 términos del desarrollo de una solución no trivial de $xy''-(2+x)y=0$ que se anule en $x=0$, dando la regla de recurrencia. ¿Qué función elemental podría ser? Comprobarla. [1.8 ptos]

ELEGIR DOS entre 5, 6 y 7

5. Sea $\begin{cases} y''+2y'+\lambda y=0 \\ y(0)=y'\big(\frac{\pi}{4}\big)=0 \end{cases}$. **a]** Justificar que $\lambda=-3$ no es autovalor.
b] Probar que $\lambda_1=2$ lo es, dar su autofunción $\{y_1\}$ y calcular $\langle y_1,y_1\rangle$.
c] Basándose en una gráfica probar que siguiente autovalor λ_2 es menor que 37.
[2.3 ptos]

6. Resolver por separación de variables $\begin{cases} u_t-\frac{2}{t}u_{xx}=3\operatorname{sen}x,\ x\in(0,\pi),\ t>1 \\ u(x,1)=\operatorname{sen}2x,\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$. [2.3 ptos]

7. Sea $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0\,,\ r<2\,,0<\theta<\frac{\pi}{2} \\ u(2,\theta)=f(\theta),\ u_\theta(r,0)=u\big(r,\frac{\pi}{2}\big)=0 \end{cases}$. Calcular su solución para i) $f(\theta)=\cos 3\theta$ y dos términos de su serie solución para ii) $f(\theta)=\pi$. [2.3 ptos]

Examen de mayo de Métodos II (A-C) (12-5-23)

Hacer los problemas 1, 2 y 3. Elegir entre 4 y 4* y entre 5 y 5*.

1. Sean la ecuación $u_y-u_x=\frac{3}{y}u+2x$ y los datos: i) $u(x,-x)=0$, ii) $u(x,x)=0$. [1.8 ptos]
Hallar la única solución que cumple uno de ellos y precisar cuántas soluciones cumplen el otro.

2. Sea $\begin{cases} u_{tt}-2u_{tx}-3u_{xx}=0 \\ u(x,0)=f(x),\, u_t(x,0)=0 \end{cases}$. [2.2 ptos]
a] Resolver el problema con la transformada de Fourier.
b] Hallar su solución general a partir de la forma canónica.
c] Si $f(x)=4-x^2$ si $x\in[-2,2]$ y 0 en el resto, dibujar $u(x,1)$.

3. Resolver mediante separación de variables: $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=\operatorname{sen}x,\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\, t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=\pi x,\ u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=u_x\left(\frac{\pi}{2},t\right)=0 \end{cases}$. [2.4 ptos]

Elegir entre 4 y 4*

4. Sea $x^2y''+x(7+2x)y'+9y=0$. ¿Existen soluciones analíticas no triviales en $x=0$? Calcular una solución no trivial cuyo desarrollo en torno a $x=0$ tiene un número finito de términos. [1.8 ptos]

4*. Sea $\begin{cases} y''+4y'+\lambda y=0 \\ y(0)=y'(b)=0,\ b>0 \end{cases}$. **a]** Determinar si $\lambda=-5$ es o no autovalor y precisar cuántas soluciones de $y''+4y'-5y=5x-4$ cumplen esos datos de contorno.
b] Hallar b de modo que $\lambda=4$ sea autovalor y escribir la autofunción correspondiente. [1.8 ptos]

Elegir entre 5 y 5*

5. Resolver el problema en el semicírculo $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0,\ r<1,\ 0<\theta<\pi \\ u_r(1,\theta)=4\cos^3\theta,\ u_\theta(r,0)=u_\theta(r,\pi)=0 \end{cases}$. [1.8 ptos]

5*. Sea $\begin{cases} u_t-\left(u_{rr}+\frac{2}{r}u_r\right)=0,\ r\in(\pi,2\pi),\ t>0 \\ u(r,0)=\frac{\operatorname{sen}r}{r},\ u(\pi,t)=u(2\pi,t)=0 \end{cases}$. Resolverlo por separación de variables. [1.8 ptos]
[El problema para R es resoluble haciendo $v=rR$].

Examen extraordinario de Métodos II (A-C) (23-6-23)

Hacer los problemas 1, 4 y 5 y ELEGIR entre 2 y 2* y entre 3 y 3* (cada problema vale 2 puntos).

1. Sea $\begin{cases} u_{tt}+2u_{xt}+u_{xx}-u_t-u_x=0 \\ u(x,0)=f(x),\ u_t(x,0)=0 \end{cases}$. Resolver el problema (con la $\mathcal{F}$ o a partir de la forma canónica), deducir la solución para $f(x)=x$ y comprobar esta solución. [2 ptos]

Elegir entre 2 y 2*

2. Sea la ecuación $(2x-y)u_y+xu_x=-yu$ y los datos: i) $u(0,y)=e^y$, ii) $u(1,y)=e^y$. [2 ptos]
Hallar la única solución que cumple uno de ellos y 2 distintas que cumplan el otro.

2*. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0,\ x\geq 0,\, t\in\mathbf{R} \\ u_t(x,0)=\begin{cases} \cos\frac{x}{2},\ x\in[\pi,3\pi] \\ 0,\ x\in[0,\pi]\cup[3\pi,\infty) \end{cases} \\ u(x,0)=u(0,t)=0 \end{cases}$. **a]** Dibujar y dar la expresión de g^*. [2 ptos]
b] Calcular $u(2\pi,3\pi)$, $u(2\pi,4\pi)$ y $u(2\pi,t)$ para $t\geq 5\pi$.

Elegir entre 3 y 3*

3. Hallar el desarrollo completo de una solución no nula acotada en $x=0$ de $xy''+2y'-xy=0$, a partir de la regla de recurrencia. [La ecuación es resoluble haciendo $v=xy$]. [2 ptos]

3*. Sea $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=y(\pi)=0 \end{cases}$. **a]** Determinar si $\lambda=-1$ es o no es autovalor. [2 ptos]
b] Probar que $\lambda=1$ lo es y escribir su autofunción.
c] Precisar para qué valor de a tiene infinitas soluciones $y''+y=x-a$ con esos mismos datos de contorno.

4. Resolver por separación de variables $\begin{cases} u_t-u_{xx}=0,\ x\in(0,1),\ t>0 \\ u(x,0)=0,\ u_x(0,t)=u_x(1,t)=1 \end{cases}$. [La $v(x)$ para el cambio es clara]. [2 ptos]

5. Resolver por separación de variables $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=3\operatorname{sen}\theta,\ r<1,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2} \\ u(1,\theta)=0,\ u(r,0)=u_\theta\left(r,\frac{\pi}{2}\right)=0 \end{cases}$. [2 ptos]

Examen de mayo de Métodos II (C) (11-5-22)

Elegir tres problemas entre 1, 2, 3, 4 (de 1.8 ptos), y dos entre 5, 6, 7 (de 2.3 ptos)

1. Sea $(3y-x^2)u_y+xu_x=3u$. **a]** Hallar su solución general y la que cumple $u(1,y)=y$, probando su unicidad. **b]** Dar dos soluciones distintas que cumplan uno de estos dos datos: i) $u(x,x^2)=0$, ii) $u(x,x^2)=1$.

2. Sea $\begin{cases} 21u_{tt}+2u_{tx}-3u_{xx}=0 \\ u(x,0)=f(x)\,,\, u_t(x,0)=3f'(x) \end{cases}$. Resolver el problema (con la $\mathcal{F}$ o a partir de la forma canónica), deducir la solución para $f(x)=x$ y comprobar esta solución.

3. Sea el problema para la cuerda semiacotada: $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\geq 0, t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=e^x, u_t(x,0)=-x \\ u(0,t)=1. \end{cases}$. **a]** Hallar $u(1,2)$. **b]** Hallar $u(1,t)$ para $t\geq 0$.

4. Sea $2x^2y''+x(3-2x)y'-(1+2x)y=0$. Estudiar si posee soluciones no triviales analíticas en $x=0$. Hallar 4 términos no nulos del desarrollo de una solución acotada en $x=0$ (posible ayuda: $y_2=\frac{1}{x}$ es solución).

5. Sea $\begin{cases} xy''+2y'+\lambda xy=0 \\ y(\pi)+\pi y'(\pi)=y(2\pi)+2\pi y'(2\pi)=0 \end{cases}$. **a]** Precisar si $\lambda=0$ es o no autovalor del problema, dando la autofunción en caso afirmativo.
b] Hallar la autofunción para $\lambda=4$ $\left[\text{la solución general } y=c_1\frac{\cos 2x}{x}+c_2\frac{\operatorname{sen} 2x}{x} \text{ se obtiene haciendo } u=xy\right]$.
c] Determinar si tiene o no soluciones la ecuación $xy''+2y'+4xy=2$ con esos mismos datos de contorno.

6. Resolver $\begin{cases} u_t-u_{xx}=\operatorname{sen}^2 x\,,\ x\in(0,\pi)\,, t>0 \\ u(x,0)=0,\ u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=0 \end{cases}$ y estudiar si existe distribución estacionaria $\left[\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t)\right]$.

7. Resolver el problema en el sector circular $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0\,,\ r<2\,,\ 0<\theta<\frac{\pi}{4} \\ u(2,\theta)=f(\theta)\,,\ u(r,0)=u_\theta\left(r,\frac{\pi}{4}\right)=0 \end{cases}$ para i) $f(\theta)=8\operatorname{sen}6\theta$, ii) $f(\theta)=\pi$.

Examen extraordinario de Métodos II (C) (24-6-22)

Hacer los problemas 1, 2 y 3 (de 1.8 puntos cada uno) y ELEGIR DOS entre 4, 5 y 6 (de 2.3 puntos).

1. Sea $(2y+x)u_y+xu_x=2y+2x$. **a]** Hallar su solución general y la que verifica $u(1,y)=0$. **b]** Precisar en qué puntos del plano la recta $y=x-1$ es tangente a las características.

2. Sea $\begin{cases} 9u_{tt}+12u_{tx}+4u_{xx}=0 \\ u(x,0)=0\,,\, u_t(x,0)=g(x) \end{cases}$. Resolver el problema (mediante la $\mathcal{F}$ o a partir de la forma canónica), deducir la solución para $g(x)=3x$ y comprobar esta solución.

3. Sea $x^2y''+x(x-3)y'+4y=0$. Escribir 4 términos no nulos del desarrollo de una solución en torno a $x=0$ dando la regla de recurrencia. En $x=0$, ¿son todas las soluciones analíticas?, ¿están todas acotadas?

Elegir DOS entre 4, 5 y 6

4. Sea $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y(0)+y'(0)=y(\pi)+y'(\pi)=0 \end{cases}$. **a]** Probar que $\lambda=-1$ es autovalor y dar su autofunción y_{-1}. **b]** Calcular los autovalores $\lambda>0$, escribiendo sus autofunciones y_n. **c]** Precisar cuántas soluciones de $y''-y=e^{2x}$ cumplen esos datos.

5. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\in[0,\pi]\,, t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=0\,,\ u_t(x,0)=1 \\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$. **a]** Hallar el valor exacto de $u\left(\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$ utilizando D'Alembert. **b]** Separar variables y comprobar que con los 2 primeros términos no nulos de la serie solución se obtiene $u\left(\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)\approx\frac{14}{9\pi}$ $[\approx 0{,}495]$.

6. Resolver por separación de variables $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=8r\cos\theta\,,\ r<1\,,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2} \\ u(1,\theta)=u_\theta(r,0)=u\left(r,\frac{\pi}{2}\right)=0 \end{cases}$.

Examen de junio de Métodos II (A) (8-6-21)

Hacer 3 de los 4 primeros problemas (de 1.7 pts), **el 5 es obligatorio** (2.5 pts) **y elegir 1 entre 6 y 7** (2.4 pts).

1. Sea $(y-2e^x)u_y-u_x=u$. **a]** Calcular su solución general y la única que satisface $u(0,y)=y$.
b] Dar 2 soluciones distintas que cumplan uno de estos datos: i) $u(x,e^x)=0$, ii) $u(x,e^x)=1$. [1.7 pts]

2. Resolver $\begin{cases} u_{tt}-u_{xt}+\frac{1}{4}u_{xx}+u_t-\frac{1}{2}u_x=0 \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=g(x) \end{cases}$. [A partir de la forma canónica o mediante la $\mathcal{F}$] [1.7 pts]

3. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0,\ x\in[0,2],\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=\begin{cases} x-x^2,\ x\in[0,1] \\ 0,\ x\in[1,2] \end{cases} \\ u_t(x,0)=u(0,t)=u(2,t)=0 \end{cases}$. Utilizando D'Alembert: **a]** Hallar el valor de $u\left(1,\frac{3}{2}\right)$. **b]** Dibujar $u\left(x,\frac{3}{2}\right)$. **c]** Dar la expresión de $u\left(x,\frac{3}{2}\right)$. [1.7 pts]

4. Sea $x(x+1)y''+(x-1)y'=0$. Escribir 3 términos no nulos del desarrollo de una solución que se anule en $x=0$, utilizando la regla de recurrencia. Estudiar si hay soluciones no acotadas cuando $x\to\infty$. [1.7 pts]

5. Resolver por separación de variables $\begin{cases} u_t-2tu_{xx}=e^{-t^2}\cos x,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\ t>0 \\ u(x,0)=\cos 3x,\ u_x(0,t)=u\left(\frac{\pi}{2},t\right)=0 \end{cases}$. [2.5 pts]

6. Sea $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y(0)=y\left(\frac{3\pi}{4}\right)+y'\left(\frac{3\pi}{4}\right)=0 \end{cases}$. **a]** Probar que $\lambda_1=1$ es autovalor, dar su autofunción $\{y_1\}$ y escribir el término con y_1 del desarrollo de $f(x)=1$ en autofunciones del problema.
b] Hallar la constante a para la que $y''+y=3\,\text{sen}\,2x-a$ tiene infinitas soluciones con esos mismos datos.
c] Comprobar a partir de una gráfica que el segundo autovalor $\lambda_2>4$. [2.4 pts]

7. Sea $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0,\ r<1,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2} \\ u(1,\theta)=f(\theta),\ u(r,0)=u\left(r,\frac{\pi}{2}\right)=0 \end{cases}$. Hallar su solución si **a]** $f(\theta)=\text{sen}\,2\theta$ y el primer término de la serie solución para **b]** $f(\theta)=\cos\theta$. [2.4 pts]

Examen de julio de Métodos II (A) (12-7-21)

Elegir TRES problema entre 1, 2, 3 y 4 (1.8 puntos cada uno) y hacer los problemas 5 y 6 (de 2.3 puntos).

1. Sea $yu_y+xu_x=2xyu$. **a]** Calcular su solución general. **b]** Hallar la que cumple $u(-1,y)=1$, probando su unicidad. **c]** Dar $f(x)$ para que el dato $u(x,x)=f(x)$ lo cumplan i) infinitas soluciones, ii) ninguna solución.

2. Resolver $\begin{cases} 4u_{tt}-12u_{xt}+9u_{xx}=0 \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=g(x) \end{cases}$. **a]** A partir de la forma canónica . **b]** Mediante la $\mathcal{F}$.

3. **a]** Calcular una solución no trivial de $2x^2y''-x(3-4x)y'+2(1-3x)y=0$ que no sea analítica en $x=0$, dando la regla de recurrencia. **b]** Hallar el desarrollo hasta $\left(x-\frac{1}{4}\right)^2$ de la solución que cumple $y\left(\frac{1}{4}\right)=0,\ y'\left(\frac{1}{4}\right)=-2$.

4. Sea $\begin{cases} y''-y'+\lambda y=0 \\ y'(-2)=y(0)=0 \end{cases}$. **a]** Estudiar si i) $\lambda=-2$, ii) $\lambda=\frac{1}{4}$, son o no autovalores, dando la autofunción si lo es. **b]** Precisar cuántas soluciones tiene $y''-y'+\frac{1}{4}y=e^x-1$ con esos datos.

5. **a]** Desarrollar $g(x)=\begin{cases} 1,\ 0\le x\le\pi/2 \\ 0,\ \pi/2<x\le\pi \end{cases}$ en serie de $\{\text{sen}\,nx\}$ en $[0,\pi]$. ¿Cuánto suma la serie para $x=\frac{\pi}{2}$?

Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0,\ x\in[0,\pi],\ t\in\mathbf{R} \\ u_t(x,0)=g(x),\ u(x,0)=u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$. **b]** Hallar $u\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$ exactamente utilizando D'Alembert. **c]** Resolver separando variables y aproximar el valor con 2 términos no nulos de la serie solución $\left[24\sqrt{3}/25\pi\approx 0{,}53\right]$.

6. Resolver por separación de variables $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=\frac{5}{r^2}\cos\theta,\ 1<r<2,\ 0<\theta<\pi \\ u_r(1,\theta)=1,\ u(2,\theta)=u_\theta(r,0)=u_\theta(r,\pi)=0 \end{cases}$.

Examen de septiembre de Métodos II (E) (11-9-20)

Hacer 4 de los 6 problemas (cada uno vale 2.5 puntos), eligiendo al menos uno entre 1 y 2, otro entre 3 y 4 y otro entre 5 y 6.

1. Sea $2xy^2u_y - u_x = 2xyu$. **a]** Calcular su solución general. **b]** Hallar la que cumple $u(0,y)=1$ probando su unicidad. **c]** Estudiar cuántas soluciones de la ecuación satisfacen $u\left(x,\frac{1}{x^2}\right)=1$.

2. Hallar la solución general de $3u_{tt}-2u_{xt}-u_{xx}+8u_t-8u_x=0$ $\left[\text{A partir de la forma canónica o mediante la } \mathcal{F}\right]$.

3. Sea $2x^2y''+x(3-x)y'-y=0$. **a]** Estudiar si la ecuación posee soluciones no triviales analíticas en $x=0$. **b]** Calcular una solución no acotada en $x=0$, escribiendo la regla de recurrencia.

4. Sea $\begin{cases} x^2y''-xy'+\lambda y=0 \\ y'(1)=y(3)=0 \end{cases}$. Escribir la ecuación en forma autoadjunta. Estudiar si i) $\lambda=-3$ y ii) $\lambda=\frac{3}{4}$ son o no autovalores, dando la autofunción en caso afirmativo.

5. Resolver por separación de variables $\begin{cases} u_t-u_{xx}=t\operatorname{sen}x\,,\ x\in(0,\pi)\,,\ t>0 \\ u(x,0)=\operatorname{sen}2x\,,\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$.

6. Resolver por separación de variables $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0\,,\ r<1\,,\ 0<\theta<\pi \\ u(1,\theta)=\theta^2,\ u_\theta(r,0)=u_\theta(r,\pi)=0 \end{cases}$.

(Por el covid no hubo final de junio, se sustituyó por entregables y un control 2 con muchas versiones).

Examen de junio de 2017 de Métodos Matemáticos II (C)

Hacer 1 y 2 (de 1.5 puntos) y 3 y 4 (de 2 puntos). Elegir entre 5 y 5* y entre 6 y 6* (de 1.5 puntos)

1. Hallar la solución de $yu_y + u_x = u - ye^{-x}$ que cumple el dato inicial $u(x,-1)=1$. [1.5 puntos]

2. Hallar una corta solución no trivial de $x\left(2+x^2\right)y''+2y'-2xy=0$ que sea analítica en $x=0$, escribiendo la regla de recurrencia. [1.5 puntos]

3. **a]** Escribir el desarrollo de la función $f(x)=\frac{\pi}{4}$ en serie de autofunciones del problema $\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X'(0)=X(\pi)=0 \end{cases}$.

Precisar cuánto suma la serie si: i) $x=\frac{\pi}{2}$, ii) $x=0$. [Para ii) hablar de extensiones o identificar la suma].

b] Resolver $\begin{cases} u_t-4u_{xx}=0,\ x\in(0,\pi),\ t>0 \\ u(x,0)=f(x),\ u_x(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$ para: i) $f(x)=\frac{\pi}{4}$, ii) $f(x)=\cos\frac{x}{2}$. [2 puntos]

4. Resolver el problema plano $\begin{cases} \Delta u=-\frac{1}{r},\ 1<r<3,\ 0<\theta<\pi \\ u(1,\theta)=2+\cos\theta,\ u(3,\theta)=u_\theta(r,0)=u_\theta(r,\pi)=0 \end{cases}$ [2 puntos]

Elegir entre 5 y 5* (de 1.5 puntos)

5. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0,\ x\geq 0,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=e^{-x},\ u_t(x,0)=0,\ u(0,t)=1 \end{cases}$. Hallar y simplificar: i) $u(1,\ln 3)$, ii) $u(x,\ln 3)$ para todo x. [Usar una v sencilla y dar la expresión de las extensiones].

5*. Resolver utilizando la transformada de Fourier: $\begin{cases} u_{tt}-4u_{xx}=0 \\ u(x,0)=f(x),\ u_t(x,0)=2f'(x) \end{cases}$.

Elegir entre 6 y 6* (de 1.5 puntos)

6. Sea $\begin{cases} x^2y''+xy'+\lambda y=0 \\ y(1)=5y(2)-6y'(2)=0 \end{cases}$. **a]** Escribir la ecuación en forma autoadjunta y precisar si $\lambda=-1$ y $\lambda=0$ son o no autovalores, dando la autofunción en el caso que lo sea.

b] Determinar cuántas soluciones de $x^2y''+xy'-y=x^2$ cumplen esas mismas condiciones de contorno.

6*. Resolver el problema para la ecuación de Laplace en el espacio $\begin{cases} u_{rr}+\frac{2}{r}u_r+\frac{1}{r^2}\left[u_{\theta\theta}+\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}u_\theta\right]=0,\ r<2 \\ u(2,\theta)=6\cos 2\theta,\ \theta\in[0,\pi] \end{cases}$.

Examen de septiembre de 2017 de Métodos Matemáticos II (C)

Hacer 1, 2 y 3 (de 1.6 puntos). Elegir entre 4 y 5 (1.4 puntos) y entre 6 y 7 (2 puntos). Hacer 8 (1.8 puntos).

1. Resolver $\begin{cases} 2yu_y+xu_x=2u-2y^2 \\ u(-2,y)=4-y^2 \end{cases}$. ¿Cuántas soluciones de la ecuación cumplen $u(x,x^2)=0$? [1.6pt]

2. Hallar 3 términos no nulos del desarrollo en torno a $x=0$ de **una** solución de $x^2y''-4xy'+(6-x^2)y=0$, dando la regla de recurrencia. [1.6pt]

3. Sea $\begin{cases} y''+2y'+\lambda y=0 \\ y(0)=y(\pi)=0 \end{cases}$. **a]** Hallar sus autovalores y sus autofunciones $\{y_n\}$. [Ayuda: todos los $\lambda_n>1$].
b] Calcular $\langle y_n,y_n\rangle$. [1.6pt]

Elegir entre 4 y 5 (de 1.4 puntos)

4. Utilizando la $\mathcal{F}$ resolver $\begin{cases} u_t-2tu_{xx}-u_x=0 \\ u(x,1)=e^{-x^2/4} \end{cases}$. [1.4pt]

5. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0,\ x\in[0,4\pi],\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=g(x)=\begin{cases} \pi,\ x\in[\pi,3\pi] \\ 0,\ \text{resto de } [0,4\pi] \end{cases} \\ u(0,t)=u(4\pi,t)=0 \end{cases}$ [el mismo que **6.**]

Dibujar la extensión adecuada de $g(x)$ y calcular utilizando D'Alembert el valor de: i) $u(\pi,4\pi)$, ii) $u(3\pi,3\pi)$. [1.4pt]

Elegir entre 6 y 7 (de 2 puntos)

6. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0,\ x\in[0,4\pi],\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=g(x)=\begin{cases} \pi,\ x\in[\pi,3\pi] \\ 0,\ \text{resto de } [0,4\pi] \end{cases} \\ u(0,t)=u(4\pi,t)=0 \end{cases}$ [el mismo que **5.**]

Resolverlo por separación de variables. Hallar $u(\pi,4\pi)$ usando la serie solución. Aproximar $u(3\pi,3\pi)$ con los dos primeros términos no nulos de la serie $\left[32\sqrt{2}/9\approx 5.03\right]$. [2pt]

7. Resolver separando variables $\begin{cases} u_t-u_{xx}=0,\ x\in[0,1],\ t>0 \\ u(x,0)=2-x^2\equiv f(x) \\ u_x(0,t)=u_x(1,t)+2u(1,t)=0 \end{cases}$. [Probar gráficamente que el problema de contorno que aparece tiene infinitos autovalores positivos y simplificar el resultado de $\langle y_n,f\rangle$]. [2pt]

8. Resolver por separación de variables $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=\operatorname{sen}\frac{\theta}{2},\ r<1,\ 0<\theta<\pi \\ u(1,\theta)=u(r,0)=u_\theta(r,\pi)=0 \end{cases}$. [1.8pt]

Examen de junio de 2014 de Métodos Matemáticos II

Elegir 3 problemas entre 1, 2, 3 y 4 (de 1.8 puntos) y elegir 2 problemas entre 5, 6 y 7 (de 2.3 puntos).

1. Resolver $\begin{cases} 3x^2u_y - u_x = 4yu \\ u(1,y)=1 \end{cases}$. ¿Es única la solución?

2. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\in[0,\pi],\, t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=\operatorname{sen}^2 x\,,\, u_t(x,0)=u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$. Dibujar la extensión f^*, hallar el valor de $u\big(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\big)$ y hallar $u\big(x,\frac{3\pi}{4}\big)$ para $\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{3\pi}{4}$.

3. Resolver utilizando la transformada de Fourier: $\begin{cases} u_{tt}+4u_{tx}+4u_{xx}=0 \\ u(x,0)=0,\, u_t(x,0)=g(x) \end{cases}$.

4. Hallar una (corta) solución no analítica de $2xy''-(1-2x)y'-5y=0$, $x\ge 0$, dando la regla de recurrencia.

5. Sea $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y(0)-2y'(0)=y(1)-2y'(1)=0 \end{cases}$. Hallar autovalores λ_n y autofunciones $\{y_n\}$, y calcular $\langle y_n,y_n\rangle\ \forall n$. [Son calculables exactamente todos los λ_n, y hay uno negativo].

6. Resolver separando variables $\begin{cases} u_t-4u_{xx}=0\,,\ x\in(0,\pi),\, t>0 \\ u(x,0)=0\,,\ u(0,t)=t\,,\, u_x(\pi,t)=0 \end{cases}$. [Hay una v muy sencilla, pero se puede hallar otra que no estropea la ecuación].

7. Sea $\begin{cases} \Delta u=0\,,\ r<2\,,\ 0<\theta<\frac{\pi}{3} \\ u_r(2,\theta)=a+\cos 3\theta\,,\ u_\theta(r,0)=u_\theta\big(r,\frac{\pi}{3}\big)=0 \end{cases}$. Resolver este problema plano por separación de variables para la única constante a para la que tiene solución.

Examen de septiembre de 2014 de Métodos Matemáticos II

Elegir problemas que sumen 10 puntos (2+2+2+4 puntos ó 2+2+2+2+2 puntos).

1. Hallar la solución de $\begin{cases} yu_y+xu_x=2u \\ u(x,1-x)=2x-1 \end{cases}$. ¿Cuántas soluciones de la ecuación cumplen $u(x,x)=0$? [2pt]

2. **a]** Utilizando la $\mathcal{F}$ resolver $\begin{cases} 2u_{tt}+5u_{tx}+2u_{xx}=0 \\ u(x,0)=f(x)\,,\, u_t(x,0)=0 \end{cases}$. **b]** Escribir la solución para $f(x)=x^2$. [2pt]

3. Hallar una solución analítica no trivial de $x^2y''+x^3y'-2(1+x^2)y=0$, escribiendo la regla de recurrencia. ¿Son todas las soluciones analíticas en $x=0$? [2pt]

4a. Resolver $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=t\operatorname{sen}x\,,\ x\in[0,\pi],\, t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$ [el mismo que **4b.**] por separación de variables. [2pt]

4b. Resolver $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=t\operatorname{sen}x\,,\ x\in[0,\pi],\, t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$ [el mismo que **4a.**] mediante D'Alembert (hablando de extensiones): i) directamente, ii) haciendo $w=u-t\operatorname{sen}x$. [2pt]

5. **a]** Sea $\begin{cases} \Theta''+\lambda\Theta=0 \\ \Theta\big(-\frac{\pi}{4}\big)=\Theta\big(\frac{\pi}{4}\big)=0 \end{cases}$. i) Probar directamente que $\lambda=4$ es autovalor y hallar la autofunción asociada. ii) Haciendo $s=\theta+\frac{\pi}{4}$, escribir (usando el formulario) todos los λ_n y $\{\Theta_n\}$.

b] Sea $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0\,,\ r<1\,,-\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{4} \\ u_r(1,\theta)=f(\theta)\,,\ u\big(r,-\frac{\pi}{4}\big)=u\big(r,\frac{\pi}{4}\big)=0 \end{cases}$. Hallar, por separación de variables, la solución con: i) $f(\theta)=2\cos 2\theta$, ii) $f(\theta)=1$. [4pt]

Examen final de junio de 2013 de Métodos Matemáticos II (grupos C y E)

1. Resolver $(2x-y)u_y + xu_x = yu$ con el dato $u(-1,y)=1$. [2 puntos]

Elegir entre 2, 2*

2. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\geq 0\,, t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=0, u_t(x,0)=\begin{cases} 2x-x^2\,,\ x\in[0,2] \\ 0\,,\ x\in[2,\infty) \end{cases} \\ u(0,t)=0 \end{cases}$. **a]** Dibujar la extensión g^* y dar su expresión. **b]** Hallar: i) $u(3,2)$, ii) $u(1,2)$. [1.5 puntos]

2*. Utilizando sólo la transformada de Fourier, resolver: $\begin{cases} u_{tt}-4u_{xx}=0\,, x\in\mathbf{R}\,,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=2\,e^{-x^2/2},\ u_t(x,0)=0 \end{cases}$. [1.5 puntos]

Elegir entre 3 y 3*

3. Sea $x^2y''-x(x+5)y'+9y=0$. Hallar los 3 primeros términos no nulos del desarrollo de una solución analítica en $x=0$, dando la regla de recurrencia. ¿Tienden a 0 todas las soluciones cuando $x\to 0$? [2 puntos]

3*. Sea (P) $\begin{cases} y''-y'+\lambda y=0 \\ y(0)=y(\pi)=0 \end{cases}$. **a]** Escribir la ecuación en forma autoadjunta y hallar el peso. **b]** Determinar si $\lambda=-2$ y $\lambda=\frac{5}{4}$, son o no autovalores de (P). [2 puntos]
c] Precisar cuántas soluciones tiene $y''-y'+\lambda y=e^{x/2}$ con esos datos de contorno para $\lambda=-2$ y $\lambda=\frac{5}{4}$.

4. Sea $\begin{cases} u_t-u_{xx}=0\,,\ x\in(0,1)\,,\ t>0 \\ u(x,0)=0\,,\ u_x(0,t)=0\,, u(1,t)=1 \end{cases}$. **a]** Resolverla por separación de variables. **b]** Hallar la distribución estacionaria hacia la que tiende la solución cuando $t\to\infty$. [2 puntos]

5. Resolver el problema en el plano $\begin{cases} \Delta u=4\,\mathrm{sen}\,2\theta\,,\ \theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\ r<1 \\ u(1,\theta)=\mathrm{sen}\,4\theta\,,\ u(r,0)=u\left(r,\frac{\pi}{2}\right)=0 \end{cases}$. [2.5 puntos]

Examen de septiembre de 2013 de Métodos Matemáticos II (grupos C y E)

1. Resolver $(3y+3)u_y - xu_x = 2xy$ con el dato $u(x,0)=0$. ¿Con $u(0,y)=0$ habría solución única? [2 puntos]

Elegir entre 2, 2*

2. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\geq 0\,, t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=\begin{cases} 1-\cos x\,,\ x\in[0,2\pi] \\ 0\,,\ x\in[2\pi,\infty) \end{cases} \\ u_t(x,0)=0\,,\ u(0,t)=0 \end{cases}$. **a]** Dibujar la extensión f^* y dar su expresión. **b]** Hallar $u(2\pi,3\pi)$. **c]** Dibujar $u(x,3\pi)$. [1.8 puntos]

2*. Utilizando la transformada de Fourier, resolver: $\begin{cases} u_t-\frac{1}{4}u_{xx}+u_x=0\,, x\in\mathbf{R}\,,\ t>0 \\ u(x,0)=e^{-x^2},\ u \text{ acotada} \end{cases}$. [1.8 puntos]

Elegir entre 3 y 3*

3. Sea $y''+2xy'+2y=0$. Calcular 3 términos no nulos del desarrollo en serie de la solución de que cumple $y(0)=1, y'(0)=0$. Hallar el término general de la serie e identificarla con una función elemental. [1.8 puntos]

3*. Sea (P) $\begin{cases} x^2y''+3xy'+y+\lambda y=0 \\ y(1)=y(e)=0 \end{cases}$. **a]** Escribir la ecuación en forma autoadjunta y hallar el peso. **b]** Para $\lambda=\pi^2$, hallar la autofunción $\{y_1\}$ asociada y calcular $\langle y_1\,,y_1\rangle$.
c] Precisar si $\lambda=0$ es autovalor de (P) y cuántas soluciones tiene $\begin{cases} x^2y''+3xy'+y=1 \\ y(1)=y(e)=0 \end{cases}$. [1.8 puntos]

4. Resolver el problema en el plano $\begin{cases} \Delta u=0\,,\ 1<r<2 \\ u(1,\theta)=1+\mathrm{sen}\,2\theta\,,\ u_r(2,\theta)=0 \end{cases}$. [2 puntos]

5. Resolver el problema no homogéneo $\begin{cases} u_t-u_{xx}=e^{-2t}\,,\ x\in(0,\pi)\,,\ t>0 \\ u(x,0)=u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$. [2.4 puntos]

Examen final de junio de 2012 de Métodos Matemáticos II (grupos D y E)

1. Hallar la solución de $u_y - 2yu_x = 4xy$ que cumple $u(x,-1) = 2x+1$. ¿Es única? [2 puntos]

2. Sea $3xy'' + y' + xy = 0$. Hallar los 3 primeros términos no nulos del desarrollo en serie de una solución que no sea analítica en $x=0$, encontrando la regla de recurrencia. [2 puntos]

3. Sean $g(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1/2 \\ 0, & 1/2 < x \le 1 \end{cases}$, (P) $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, \ x \in [0,1], \ t \in \mathbf{R} \\ u(x,0) = 0, u_t(x,0) = g(x), \ u(0,t) = u(1,t) = 0 \end{cases}$ y $u(x,t)$ la solución de (P).

a] Desarrollar g en serie de $\{\operatorname{sen} n\pi x\}$ y precisar el valor de la suma de la serie para: i) $x = \frac{1}{4}$, ii) $x = \frac{1}{2}$.

Elegir **b$_1$]** o **b$_2$]**: **b$_1$]** Hallar el valor de $u\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ utilizando D'Alembert.
b$_2$] Resolver (P) mediante separación de variables. [2.5 puntos]

Para 4 y 5, elegir o las dos versiones A o las dos versiones B.

4A. Resolver $\begin{cases} u_t - u_{xx} + u = 4t\cos x, \ x \in (0,\pi), \ t > 0 \\ u(x,0) = 1, u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 \end{cases}$. [2 puntos]

4B. Resolver el problema plano $\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = \cos\theta, \ r < 2 \\ u(2,\theta) = \operatorname{sen} 2\theta \end{cases}$. [2 puntos]

5A. Resolver el problema espacial $\begin{cases} u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r^2}\left[u_{\theta\theta} + \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}u_\theta\right] = 0, \ 1 < r < 2 \\ u(1,\theta) = \cos\theta, u(2,\theta) = 0, \ \theta \in [0,\pi] \end{cases}$ [1.5 puntos]

5B. Resolver $\begin{cases} u_t - 2u_{xx} + tu = 0, \ x \in \mathbf{R}, \ t > 0 \\ u(x,0) = e^{-x^2/8}, \ u \text{ acotada} \end{cases}$, utilizando la transformada de Fourier. [1.5 puntos]

Examen de septiembre de 2012 de Métodos Matemáticos II (grupos D y E)

Elegir 2 problemas entre 1A, 1B y 1C:

1A. Sea $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, \ x \ge 0, t \in \mathbf{R} \\ u(x,0) = \begin{cases} \cos\frac{\pi x}{2}, & x \in [1,3] \\ 0, & x \in [0,1] \cup [3,\infty) \end{cases}, \ u_t(x,0) = u(0,t) = 0 \end{cases}$. **a]** Hallar $u(1,3)$. **b]** Dibujar $u(x,2)$. [1.5 puntos]

1B. Sea $y'' + xy' + y = 0$. Hallar los 3 primeros términos no nulos del desarrollo en serie de una solución no trivial que se anule en $x=0$, encontrando la regla de recurrencia. [1.5 puntos]

1C. Sea $\begin{cases} xy'' - 2y' = 2 \\ y(1) + y'(1) = y(2) = 0 \end{cases}$. Escribir la ecuación en forma autoadjunta. Determinar cuántas soluciones tienen el problema homogéneo y el no homogéneo. [1.5 puntos]

2. Resolver por separación de variables: $\begin{cases} u_t - \frac{1}{t}u_{xx} = 2\cos x, \ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \ t > 1 \\ u(x,1) = \cos 3x, \ u_x(0,t) = u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0 \end{cases}$. [2 puntos]

3. **a]** Desarrollar $f(\theta) = \cos\theta$ en $\{\operatorname{sen} n\theta\}$ (simplificar el resultado). ¿Converge la serie hacia f en todo $[0,\pi]$?

b] Resolver por separación de variables $\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, \ r < 1, \ 0 < \theta < \pi \\ u_r(1,\theta) = \cos\theta, \ u(r,0) = u(r,\pi) = 0 \end{cases}$. [2.5 puntos]

4. Hallar la solución de $\begin{cases} tu_t - u_x = u \\ u(x,1) = f(x) \end{cases}$. **a]** A partir de las características.
b] Utilizando la transformada de Fourier. [2.5 puntos]