

Examen de mayo de Métodos II (A-C) (12-5-23)
Hacer los problemas 1, 2 y 3. Elegir entre 4 y 4* y entre 5 y 5*.

- 1.** Sean la ecuación $u_y - u_x = \frac{3}{y}u + 2x$ y los datos: i) $u(x, -x) = 0$, ii) $u(x, x) = 0$. [1.8 pts]
 Hallar la única solución que cumple uno de ellos y precisar cuántas soluciones cumplen el otro.
- 2.** Sea $\begin{cases} u_{tt} - 2u_{tx} - 3u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$. **a)** Resolver el problema con la transformada de Fourier. [2.2 pts]
b) Hallar su solución general a partir de la forma canónica.
c) Si $f(x) = 4 - x^2$ si $x \in [-2, 2]$ y 0 en el resto, dibujar $u(x, 1)$.
- 3.** Resolver mediante separación de variables: $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \text{sen}x, x \in [0, \frac{\pi}{2}], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = \pi x, u_t(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = u_x(\frac{\pi}{2}, t) = 0 \end{cases}$. [2.4 pts]

Elegir entre 4 y 4*

- 4.** Sea $x^2 y'' + x(7 + 2x)y' + 9y = 0$. ¿Existen soluciones analíticas no triviales en $x=0$? Calcular una solución no trivial cuyo desarrollo en torno a $x=0$ tiene un número finito de términos. [1.8 pts]
- 4*.** Sea $\begin{cases} y'' + 4y' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y'(b) = 0, b > 0 \end{cases}$. **a)** Determinar si $\lambda = -5$ es o no autovalor y precisar cuántas soluciones de $y'' + 4y' - 5y = 5x - 4$ cumplen esos datos de contorno. [1.8 pts]
b) Hallar b de modo que $\lambda = 4$ sea autovalor y escribir la autofunción correspondiente.

Elegir entre 5 y 5*

- 5.** Resolver el problema en el semicírculo $\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, r < 1, 0 < \theta < \pi \\ u_r(1, \theta) = 4 \cos^3 \theta, u_\theta(r, 0) = u_\theta(r, \pi) = 0 \end{cases}$. [1.8 pts]
- 5*.** Sea $\begin{cases} u_t - (u_{rr} + \frac{2}{r}u_r) = 0, r \in (\pi, 2\pi), t > 0 \\ u(r, 0) = \frac{\text{sen}r}{r}, u(\pi, t) = u(2\pi, t) = 0 \end{cases}$. Resolverlo por separación de variables. [El problema para R es resoluble haciendo $v = rR$]. [1.8 pts]

Examen extraordinario de Métodos II (A-C) (23-6-23)

Hacer los problemas 1, 4 y 5 y ELEGIR entre 2 y 2* y entre 3 y 3* (cada problema vale 2 puntos).

- 1.** Sea $\begin{cases} u_{tt} + 2u_{xt} + u_{xx} - u_t - u_x = 0 \\ u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$. Resolver el problema (con la \mathcal{F} o a partir de la forma canónica), deducir la solución para $f(x) = x$ y comprobar esta solución. [2 pts]
- Elegir entre 2 y 2***
- 2.** Sea la ecuación $(2x - y)u_y + xu_x = -yu$ y los datos: i) $u(0, y) = e^y$, ii) $u(1, y) = e^y$. [2 pts]
 Hallar la única solución que cumple uno de ellos y 2 distintas que cumplan el otro.
- 2*.** Sea $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u_t(x, 0) = \begin{cases} \cos \frac{x}{2}, x \in [\pi, 3\pi] \\ 0, x \in [0, \pi] \cup [3\pi, \infty) \end{cases} \\ u(x, 0) = u(0, t) = 0 \end{cases}$. **a)** Dibujar y dar la expresión de g^* . [2 pts]
b) Calcular $u(2\pi, 3\pi)$, $u(2\pi, 4\pi)$ y $u(2\pi, t)$ para $t \geq 5\pi$.
- Elegir entre 3 y 3***
- 3.** Hallar el desarrollo completo de una solución no nula acotada en $x=0$ de $xy'' + 2y' - xy = 0$, a partir de la regla de recurrencia. [La ecuación es resoluble haciendo $v = xy$]. [2 pts]
- 3*.** Sea $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(\frac{\pi}{2}) = y(\pi) = 0 \end{cases}$. **a)** Determinar si $\lambda = -1$ es o no es autovalor. [2 pts]
b) Probar que $\lambda = 1$ lo es y escribir su autofunción.
c) Precisar para qué valor de a tiene infinitas soluciones $y'' + y = x - a$ con esos mismos datos de contorno.
- 4.** Resolver por separación de variables $\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) = 0, u_x(0, t) = u_x(1, t) = 1 \end{cases}$. [La $v(x)$ para el cambio es clara]. [2 pts]
- 5.** Resolver por separación de variables $\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 3 \text{sen} \theta, r < 1, 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ u(1, \theta) = 0, u(r, 0) = u_\theta(r, \frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$. [2 pts]

Examen de mayo de Métodos II (C) (11-5-22)

Elegir tres problemas entre 1, 2, 3, 4 (de 1.8 ptos), y dos entre 5, 6, 7 (de 2.3 ptos)

- 1.** Sea $(3y-x^2)u_y + xu_x = 3u$. **a]** Hallar su solución general y la que cumple $u(1, y) = y$, probando su unicidad. **b]** Dar dos soluciones distintas que cumplan uno de estos dos datos: i) $u(x, x^2) = 0$, ii) $u(x, x^2) = 1$.
- 2.** Sea $\begin{cases} 21u_{tt} + 2u_{tx} - 3u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = 3f'(x) \end{cases}$ Resolver el problema (con la \mathcal{F} o a partir de la forma canónica), deducir la solución para $f(x) = x$ y comprobar esta solución.
- 3.** Sea el problema para la cuerda semiacotada: $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = e^x, u_t(x, 0) = -x \\ u(0, t) = 1. \end{cases}$ **a]** Hallar $u(1, 2)$. **b]** Hallar $u(1, t)$ para $t \geq 0$.
- 4.** Sea $2x^2y'' + x(3-2x)y' - (1+2x)y = 0$. Estudiar si posee soluciones no triviales analíticas en $x=0$. Hallar 4 términos no nulos del desarrollo de una solución acotada en $x=0$ (posible ayuda: $y_2 = \frac{1}{x}$ es solución).
- 5.** Sea $\begin{cases} xy'' + 2y' + \lambda xy = 0 \\ y(\pi) + \pi y'(\pi) = y(2\pi) + 2\pi y'(2\pi) = 0 \end{cases}$ **a]** Precisar si $\lambda=0$ es o no autovalor del problema, dando la autofunción en caso afirmativo. **b]** Hallar la autofunción para $\lambda=4$ [la solución general $y = c_1 \frac{\cos 2x}{x} + c_2 \frac{\sin 2x}{x}$ se obtiene haciendo $u=xy$]. **c]** Determinar si tiene o no soluciones la ecuación $xy'' + 2y' + 4xy = 2$ con esos mismos datos de contorno.
- 6.** Resolver $\begin{cases} u_t - u_{xx} = \sin^2 x, x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = 0, u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 \end{cases}$ y estudiar si existe distribución estacionaria $[\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)]$.
- 7.** Resolver el problema en el sector circular $\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, r < 2, 0 < \theta < \frac{\pi}{4} \\ u(2, \theta) = f(\theta), u(r, 0) = u_{\theta}(r, \frac{\pi}{4}) = 0 \end{cases}$ para i) $f(\theta) = 8 \sin 6\theta$, ii) $f(\theta) = \pi$.

Examen extraordinario de Métodos II (C) (24-6-22)

Hacer los problemas 1, 2 y 3 (de 1.8 puntos cada uno) y ELEGIR DOS entre 4, 5 y 6 (de 2.3 puntos).

- 1.** Sea $(2y+x)u_y + xu_x = 2y+2x$. **a]** Hallar su solución general y la que verifica $u(1, y) = 0$. **b]** Precisar en qué puntos del plano la recta $y=x-1$ es tangente a las características.
- 2.** Sea $\begin{cases} 9u_{tt} + 12u_{tx} + 4u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$ Resolver el problema (mediante la \mathcal{F} o a partir de la forma canónica), deducir la solución para $g(x) = 3x$ y comprobar esta solución.
- 3.** Sea $x^2y'' + x(x-3)y' + 4y = 0$. Escribir 4 términos no nulos del desarrollo de una solución en torno a $x=0$ dando la regla de recurrencia. En $x=0$, ¿son todas las soluciones analíticas?, ¿están todas acotadas?
- Elegir DOS entre 4, 5 y 6**
- 4.** Sea $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) + y'(0) = y(\pi) + y'(\pi) = 0 \end{cases}$ **a]** Probar que $\lambda = -1$ es autovalor y dar su autofunción y_{-1} . **b]** Calcular los autovalores $\lambda > 0$, escribiendo sus autofunciones y_n . **c]** Precisar cuántas soluciones de $y'' - y = e^{2x}$ cumplen esos datos.
- 5.** Sea $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, x \in [0, \pi], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 1 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$ **a]** Hallar el valor exacto de $u(\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$ utilizando D'Alembert. **b]** Separar variables y comprobar que con los 2 primeros términos no nulos de la serie solución se obtiene $u(\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{2}) \approx \frac{14}{9\pi} [\approx 0,495]$.
- 6.** Resolver por separación de variables $\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 8r \cos \theta, r < 1, 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ u(1, \theta) = u_{\theta}(r, 0) = u(r, \frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$.

Examen de junio de Métodos II (A) (8-6-21)

Hacer 3 de los 4 primeros problemas (de 1.7 pts), el 5 es obligatorio (2.5 pts) y elegir 1 entre 6 y 7 (2.4 pts).

1. Sea $(y-2e^x)u_y - u_x = u$. **a]** Calcular su solución general y la única que satisface $u(0, y) = y$.
b] Dar 2 soluciones distintas que cumplan uno de estos datos: i) $u(x, e^x) = 0$, ii) $u(x, e^x) = 1$. [1.7 pts]

2. Resolver $\begin{cases} u_{tt} - u_{xt} + \frac{1}{4}u_{xx} + u_t - \frac{1}{2}u_x = 0 \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$. [A partir de la forma canónica o mediante la \mathcal{F}] [1.7 pts]

3. Sea $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, x \in [0, 2], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = \begin{cases} x - x^2, x \in [0, 1] \\ 0, x \in [1, 2] \end{cases} \\ u_t(x, 0) = u(0, t) = u(2, t) = 0 \end{cases}$. Utilizando D'Alembert: **a]** Hallar el valor de $u(1, \frac{3}{2})$.
b] Dibujar $u(x, \frac{3}{2})$. **c]** Dar la expresión de $u(x, \frac{3}{2})$. [1.7 pts]

4. Sea $x(x+1)y'' + (x-1)y' = 0$. Escribir 3 términos no nulos del desarrollo de una solución que se anule en $x=0$, utilizando la regla de recurrencia. Estudiar si hay soluciones no acotadas cuando $x \rightarrow \infty$. [1.7 pts]

5. Resolver por separación de variables $\begin{cases} u_t - 2tu_{xx} = e^{-t^2} \cos x, x \in (0, \frac{\pi}{2}), t > 0 \\ u(x, 0) = \cos 3x, u_x(0, t) = u(\frac{\pi}{2}, t) = 0 \end{cases}$. [2.5 pts]

6. Sea $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(\frac{3\pi}{4}) + y'(\frac{3\pi}{4}) = 0 \end{cases}$. **a]** Probar que $\lambda_1 = 1$ es autovalor, dar su autofunción $\{y_1\}$ y escribir el término con y_1 del desarrollo de $f(x) = 1$ en autofunciones del problema.
b] Hallar la constante a para la que $y'' + y = 3 \sin 2x - a$ tiene infinitas soluciones con esos mismos datos.
c] Comprobar a partir de una gráfica que el segundo autovalor $\lambda_2 > 4$. [2.4 pts]

7. Sea $\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, r < 1, 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ u(1, \theta) = f(\theta), u(r, 0) = u(r, \frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$. Hallar su solución si **a]** $f(\theta) = \sin 2\theta$ y el primer término de la serie solución para **b]** $f(\theta) = \cos \theta$. [2.4 pts]

Examen de julio de Métodos II (A) (12-7-21)

Elegir TRES problema entre 1, 2, 3 y 4 (1.8 puntos cada uno) y hacer los problemas 5 y 6 (de 2.3 puntos).

1. Sea $yu_y + xu_x = 2xyu$. **a]** Calcular su solución general. **b]** Hallar la que cumple $u(-1, y) = 1$, probando su unicidad. **c]** Dar $f(x)$ para que el dato $u(x, x) = f(x)$ lo cumplan i) infinitas soluciones, ii) ninguna solución.

2. Resolver $\begin{cases} 4u_{tt} - 12u_{xt} + 9u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$. **a]** A partir de la forma canónica. **b]** Mediante la \mathcal{F} .

3. **a]** Calcular una solución no trivial de $2x^2y'' - x(3-4x)y' + 2(1-3x)y = 0$ que no sea analítica en $x=0$, dando la regla de recurrencia. **b]** Hallar el desarrollo hasta $(x-\frac{1}{4})^2$ de la solución que cumple $y(\frac{1}{4}) = 0, y'(\frac{1}{4}) = -2$.

4. Sea $\begin{cases} y'' - y' + \lambda y = 0 \\ y'(-2) = y(0) = 0 \end{cases}$. **a]** Estudiar si i) $\lambda = -2$, ii) $\lambda = \frac{1}{4}$, son o no autovalores, dando la autofunción si lo es. **b]** Precisar cuántas soluciones tiene $y'' - y' + \frac{1}{4}y = e^x - 1$ con esos datos.

5. **a]** Desarrollar $g(x) = \begin{cases} 1, 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 0, \pi/2 < x \leq \pi \end{cases}$ en serie de $\{\sin nx\}$ en $[0, \pi]$. ¿Cuánto suma la serie para $x = \frac{\pi}{2}$?
 Sea $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, x \in [0, \pi], t \in \mathbf{R} \\ u_t(x, 0) = g(x), u(x, 0) = u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$. **b]** Hallar $u(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$ exactamente utilizando D'Alembert.
c] Resolver separando variables y aproximar el valor con 2 términos no nulos de la serie solución [$24\sqrt{3}/25\pi \approx 0,53$].

6. Resolver por separación de variables $\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = \frac{5}{r^2} \cos \theta, 1 < r < 2, 0 < \theta < \pi \\ u_r(1, \theta) = 1, u(2, \theta) = u_\theta(r, 0) = u_\theta(r, \pi) = 0 \end{cases}$.

Examen de septiembre de Métodos II (E) (11-9-20)

**Hacer 4 de los 6 problemas (cada uno vale 2.5 puntos),
eligiendo al menos uno entre 1 y 2, otro entre 3 y 4 y otro entre 5 y 6.**

1. Sea $2xy^2u_y - u_x = 2xyu$. **a]** Calcular su solución general. **b]** Hallar la que cumple $u(0, y) = 1$ probando su unicidad. **c]** Estudiar cuántas soluciones de la ecuación satisfacen $u(x, \frac{1}{x^2}) = 1$.

2. Hallar la solución general de $3u_{tt} - 2u_{xt} - u_{xx} + 8u_t - 8u_x = 0$ [A partir de la forma canónica o mediante la \mathcal{F}].

3. Sea $2x^2y'' + x(3-x)y' - y = 0$. **a]** Estudiar si la ecuación posee soluciones no triviales analíticas en $x=0$. **b]** Calcular una solución no acotada en $x=0$, escribiendo la regla de recurrencia.

4. Sea $\begin{cases} x^2y'' - xy' + \lambda y = 0 \\ y'(1) = y(3) = 0 \end{cases}$. Escribir la ecuación en forma autoadjunta. Estudiar si i) $\lambda = -3$ y ii) $\lambda = \frac{3}{4}$ son o no autovalores, dando la autofunción en caso afirmativo.

5. Resolver por separación de variables $\begin{cases} u_t - u_{xx} = t \operatorname{sen} x, & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = \operatorname{sen} 2x, & u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$.

6. Resolver por separación de variables $\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, & r < 1, 0 < \theta < \pi \\ u(1, \theta) = \theta^2, & u_\theta(r, 0) = u_\theta(r, \pi) = 0 \end{cases}$.

(Por el covid no hubo final de junio, se substituyó por entregables y un control 2 con muchas versiones).

Examen de junio de 2017 de Métodos Matemáticos II (C)

Hacer 1 y 2 (de 1.5 puntos) y 3 y 4 (de 2 puntos). Elegir entre 5 y 5* y entre 6 y 6* (de 1.5 puntos)

- | | |
|---|--------------|
| 1. Hallar la solución de $yu_y + u_x = u - ye^{-x}$ que cumple el dato inicial $u(x, -1) = 1$. | [1.5 puntos] |
| 2. Hallar una corta solución no trivial de $x(2+x^2)y'' + 2y' - 2xy = 0$ que sea analítica en $x=0$, escribiendo la regla de recurrencia. | [1.5 puntos] |
| 3. a] Escribir el desarrollo de la función $f(x) = \frac{\pi}{4}$ en serie de autofunciones del problema $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}$. Precisar cuánto suma la serie si: i) $x = \frac{\pi}{2}$, ii) $x = 0$. [Para ii) hablar de extensiones o identificar la suma]. | |
| b] Resolver $\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & u_x(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$ para: i) $f(x) = \frac{\pi}{4}$, ii) $f(x) = \cos \frac{x}{2}$. | [2 puntos] |
| 4. Resolver el problema plano $\begin{cases} \Delta u = -\frac{1}{r}, & 1 < r < 3, 0 < \theta < \pi \\ u(1, \theta) = 2 + \cos \theta, & u(3, \theta) = u_\theta(r, 0) = u_\theta(r, \pi) = 0 \end{cases}$ | [2 puntos] |

Elegir entre 5 y 5* (de 1.5 puntos)

- | | |
|---|---|
| 5. Sea $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = e^{-x}, & u_t(x, 0) = 0, u(0, t) = 1 \end{cases}$ | Hallar y simplificar: i) $u(1, \ln 3)$, ii) $u(x, \ln 3)$ para todo x . [Usar una \vee sencilla y dar la expresión de las extensiones]. |
| 5*. Resolver utilizando la transformada de Fourier: $\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = 2f'(x) \end{cases}$ | |

Elegir entre 6 y 6* (de 1.5 puntos)

- | | |
|--|---|
| 6. Sea $\begin{cases} x^2 y'' + xy' + \lambda y = 0 \\ y(1) = 5y(2) - 6y'(2) = 0 \end{cases}$ | a] Escribir la ecuación en forma autoadjunta y precisar si $\lambda = -1$ y $\lambda = 0$ son o no autovalores, dando la autofunción en el caso que lo sea. b] Determinar cuántas soluciones de $x^2 y'' + xy' - y = x^2$ cumplen esas mismas condiciones de contorno. |
| 6*. Resolver el problema para la ecuación de Laplace en el espacio $\begin{cases} u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r^2}[u_{\theta\theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta}u_\theta] = 0, & r < 2 \\ u(2, \theta) = 6 \cos 2\theta, & \theta \in [0, \pi] \end{cases}$ | |

Examen de septiembre de 2017 de Métodos Matemáticos II (C)

Hacer 1, 2 y 3 (de 1.6 puntos). Elegir entre 4 y 5 (1.4 puntos) y entre 6 y 7 (2 puntos). Hacer 8 (1.8 puntos).

- | | |
|---|--|
| 1. Resolver $\begin{cases} 2yu_y + xu_x = 2u - 2y^2 \\ u(-2, y) = 4 - y^2 \end{cases}$. ¿Cuántas soluciones de la ecuación cumplen $u(x, x^2) = 0$? | [1.6pt] |
| 2. Hallar 3 términos no nulos del desarrollo en torno a $x=0$ de una solución de $x^2 y'' - 4xy' + (6-x^2)y = 0$, dando la regla de recurrencia. | [1.6pt] |
| 3. Sea $\begin{cases} y'' + 2y' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$ | a] Hallar sus autovalores y sus autofunciones $\{y_n\}$. [Ayuda: todos los $\lambda_n > 1$]. b] Calcular $\langle y_n, y_n \rangle$. |
| 4. Utilizando la \mathcal{F} resolver $\begin{cases} u_t - 2tu_{xx} - u_x = 0 \\ u(x, 1) = e^{-x^2/4} \end{cases}$ | [1.4pt] |
| 5. Sea $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in [0, 4\pi], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = 0, & u_t(x, 0) = g(x) = \begin{cases} \pi, & x \in [\pi, 3\pi] \\ 0, & \text{resto de } [0, 4\pi] \end{cases} \\ u(0, t) = u(4\pi, t) = 0 \end{cases}$ [el mismo que 6.] | Dibujar la extensión adecuada de $g(x)$ y calcular utilizando D'Alembert el valor de: i) $u(\pi, 4\pi)$, ii) $u(3\pi, 3\pi)$. |
| 6. Sea $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in [0, 4\pi], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = 0, & u_t(x, 0) = g(x) = \begin{cases} \pi, & x \in [\pi, 3\pi] \\ 0, & \text{resto de } [0, 4\pi] \end{cases} \\ u(0, t) = u(4\pi, t) = 0 \end{cases}$ [el mismo que 5.] | Resolverlo por separación de variables. Hallar $u(\pi, 4\pi)$ usando la serie solución. Aproximar $u(3\pi, 3\pi)$ con los dos primeros términos no nulos de la serie $[32\sqrt{2}/9 \approx 5.03]$. |
| 7. Resolver separando variables $\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in [0, 1], t > 0 \\ u(x, 0) = 2 - x^2 \equiv f(x) \\ u_x(0, t) = u_x(1, t) + 2u(1, t) = 0 \end{cases}$ | [Probar gráficamente que el problema de contorno que aparece tiene infinitos autovalores positivos y simplificar el resultado de $\langle y_n, f \rangle$]. |
| 8. Resolver por separación de variables $\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = \sin \frac{\theta}{2}, & r < 1, 0 < \theta < \pi \\ u(1, \theta) = u(r, 0) = u_\theta(r, \pi) = 0 \end{cases}$ | [1.8pt] |

Examen de junio de 2014 de Métodos Matemáticos II

Elegir 3 problemas entre 1, 2, 3 y 4 (de 1.8 puntos) y elegir 2 problemas entre 5, 6 y 7 (de 2.3 puntos).

- | |
|---|
| 1. Resolver $\begin{cases} 3x^2 u_y - u_x = 4yu \\ u(1, y) = 1 \end{cases}$. ¿Es única la solución? |
| 2. Sea $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, x \in [0, \pi], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = \sin^2 x, u_t(x, 0) = u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$ Dibujar la extensión f^* , hallar el valor de $u(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$ y hallar $u(x, \frac{3\pi}{4})$ para $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$. |
| 3. Resolver utilizando la transformada de Fourier: $\begin{cases} u_{tt} + 4u_{tx} + 4u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$. |
| 4. Hallar una (corta) solución no analítica de $2xy'' - (1-2x)y' - 5y = 0, x \geq 0$, dando la regla de recurrencia. |
| 5. Sea $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) - 2y'(0) = y(1) - 2y'(1) = 0 \end{cases}$ Hallar autovalores λ_n y autofunciones $\{y_n\}$, y calcular $\langle y_n, y_n \rangle \forall n$. [Son calculables exactamente todos los λ_n , y hay uno negativo]. |
| 6. Resolver separando variables $\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = 0, x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = 0, u(0, t) = t, u_x(\pi, t) = 0 \end{cases}$ [Hay una v muy sencilla, pero se puede hallar otra que no estropea la ecuación]. |
| 7. Sea $\begin{cases} \Delta u = 0, r < 2, 0 < \theta < \frac{\pi}{3} \\ u_r(2, \theta) = a + \cos 3\theta, u_\theta(r, 0) = u_\theta(r, \frac{\pi}{3}) = 0 \end{cases}$ Resolver este problema plano por separación de variables para la única constante a para la que tiene solución. |

Examen de septiembre de 2014 de Métodos Matemáticos II

Elegir problemas que sumen 10 puntos (2+2+2+4 puntos ó 2+2+2+2+2 puntos).

- | |
|---|
| 1. Hallar la solución de $\begin{cases} yu_y + xu_x = 2u \\ u(x, 1-x) = 2x-1 \end{cases}$. ¿Cuántas soluciones de la ecuación cumplen $u(x, x) = 0$? [2pt] |
| 2. a) Utilizando la \mathcal{F} resolver $\begin{cases} 2u_{tt} + 5u_{tx} + 2u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$. b) Escribir la solución para $f(x) = x^2$. [2pt] |
| 3. Hallar una solución analítica no trivial de $x^2 y'' + x^3 y' - 2(1+x^2)y = 0$, escribiendo la regla de recurrencia. ¿Son todas las soluciones analíticas en $x=0$? [2pt] |
| 4a. Resolver $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = t \sin x, x \in [0, \pi], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$ por separación de variables. [el mismo que 4b.] [2pt] |
| 4b. Resolver $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = t \sin x, x \in [0, \pi], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$ [el mismo que 4a.] mediante D'Alembert (hablando de extensiones): i) directamente, ii) haciendo $w = u - t \sin x$. [2pt] |
| 5. a) Sea $\begin{cases} \Theta'' + \lambda \Theta = 0 \\ \Theta(-\frac{\pi}{4}) = \Theta(\frac{\pi}{4}) = 0 \end{cases}$ i) Probar directamente que $\lambda = 4$ es autovalor y hallar la autofunción asociada. ii) Haciendo $s = \theta + \frac{\pi}{4}$, escribir (usando el formulario) todos los λ_n y $\{\Theta_n\}$. |
| b) Sea $\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, r < 1, -\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4} \\ u_r(1, \theta) = f(\theta), u(r, -\frac{\pi}{4}) = u(r, \frac{\pi}{4}) = 0 \end{cases}$ Hallar, por separación de variables, la solución con: i) $f(\theta) = 2 \cos 2\theta$, ii) $f(\theta) = 1$. [4pt] |

Examen final de junio de 2013 de Métodos Matemáticos II (grupos C y E)

1. Resolver $(2x-y)u_y + xu_x = yu$ con el dato $u(-1,y) = 1$. [2 puntos]
- Elegir entre 2, 2***
2. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(x,0)=0, u_t(x,0)=\begin{cases} 2x-x^2, x \in [0,2] \\ 0, x \in [2,\infty) \end{cases} \\ u(0,t)=0 \end{cases}$. **a)** Dibujar la extensión g^* y dar su expresión. [1.5 puntos]
b) Hallar: i) $u(3,2)$, ii) $u(1,2)$.
- 2*. Utilizando sólo la transformada de Fourier, resolver: $\begin{cases} u_{tt}-4u_{xx}=0, x \in \mathbf{R}, t \in \mathbf{R} \\ u(x,0)=2e^{-x^2/2}, u_t(x,0)=0 \end{cases}$. [1.5 puntos]
- Elegir entre 3 y 3***
3. Sea $x^2y'' - x(x+5)y' + 9y = 0$. Hallar los 3 primeros términos no nulos del desarrollo de una solución analítica en $x=0$, dando la regla de recurrencia. ¿Tienden a 0 todas las soluciones cuando $x \rightarrow 0$? [2 puntos]
- 3*. Sea (P) $\begin{cases} y''-y'+\lambda y=0 \\ y(0)=y(\pi)=0 \end{cases}$. **a)** Escribir la ecuación en forma autoadjunta y hallar el peso. [2 puntos]
b) Determinar si $\lambda=-2$ y $\lambda=\frac{5}{4}$, son o no autovalores de (P).
c) Precisar cuántas soluciones tiene $y''-y'+\lambda y = e^{x/2}$ con esos datos de contorno para $\lambda=-2$ y $\lambda=\frac{5}{4}$.
4. Sea $\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, x \in (0,1), t > 0 \\ u(x,0)=0, u_x(0,t)=0, u(1,t)=1 \end{cases}$. **a)** Resolverla por separación de variables. [2 puntos]
b) Hallar la distribución estacionaria hacia la que tiende la solución cuando $t \rightarrow \infty$.
5. Resolver el problema en el plano $\begin{cases} \Delta u = 4 \sin 2\theta, \theta \in (0, \frac{\pi}{2}), r < 1 \\ u(1,\theta) = \sin 4\theta, u(r,0) = u(r, \frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$. [2.5 puntos]

Examen de septiembre de 2013 de Métodos Matemáticos II (grupos C y E)

1. Resolver $(3y+3)u_y - xu_x = 2xy$ con el dato $u(x,0)=0$. ¿Con $u(0,y)=0$ habría solución única? [2 puntos]
- Elegir entre 2, 2***
2. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(x,0)=\begin{cases} 1-\cos x, x \in [0,2\pi] \\ 0, x \in [2\pi,\infty) \end{cases} \\ u_t(x,0)=0, u(0,t)=0 \end{cases}$. **a)** Dibujar la extensión f^* y dar su expresión. [1.8 puntos]
b) Hallar $u(2\pi,3\pi)$. **c)** Dibujar $u(x,3\pi)$.
- 2*. Utilizando la transformada de Fourier, resolver: $\begin{cases} u_t - \frac{1}{4}u_{xx} + u_x = 0, x \in \mathbf{R}, t > 0 \\ u(x,0) = e^{-x^2}, u \text{ acotada} \end{cases}$. [1.8 puntos]
- Elegir entre 3 y 3***
3. Sea $y'' + 2xy' + 2y = 0$. Calcular 3 términos no nulos del desarrollo en serie de la solución de que cumple $y(0)=1, y'(0)=0$. Hallar el término general de la serie e identificarla con una función elemental. [1.8 puntos]
- 3*. Sea (P) $\begin{cases} x^2y'' + 3xy' + y + \lambda y = 0 \\ y(1)=y(e)=0 \end{cases}$. **a)** Escribir la ecuación en forma autoadjunta y hallar el peso. [1.8 puntos]
b) Para $\lambda = \pi^2$, hallar la autofunción $\{y_1\}$ asociada y calcular $\langle y_1, y_1 \rangle$.
c) Precisar si $\lambda=0$ es autovalor de (P) y cuántas soluciones tiene $\begin{cases} x^2y'' + 3xy' + y = 1 \\ y(1)=y(e)=0 \end{cases}$. [1.8 puntos]
4. Resolver el problema en el plano $\begin{cases} \Delta u = 0, 1 < r < 2 \\ u(1,\theta) = 1 + \sin 2\theta, u_r(2,\theta) = 0 \end{cases}$. [2 puntos]
5. Resolver el problema no homogéneo $\begin{cases} u_t - u_{xx} = e^{-2t}, x \in (0,\pi), t > 0 \\ u(x,0) = u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{cases}$. [2.4 puntos]

Examen final de junio de 2012 de Métodos Matemáticos II (grupos D y E)

- | | |
|---|--------------|
| 1. Hallar la solución de $u_y - 2yu_x = 4xy$ que cumple $u(x, -1) = 2x + 1$. ¿Es única? | [2 puntos] |
| 2. Sea $3xy'' + y' + xy = 0$. Hallar los 3 primeros términos no nulos del desarrollo en serie de una solución que no sea analítica en $x=0$, encontrando la regla de recurrencia. | [2 puntos] |
| 3. Sean $g(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 0, & 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$, (P) $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in [0, 1], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = g(x), & u(0, t) = u(1, t) = 0 \end{cases}$ y $u(x, t)$ la solución de (P). a] Desarrollar g en serie de $\{\sin n\pi x\}$ y precisar el valor de la suma de la serie para: i) $x = \frac{1}{4}$, ii) $x = \frac{1}{2}$. Elegir b₁] o b₂]: b₁] Hallar el valor de $u(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ utilizando D'Alembert. b₂] Resolver (P) mediante separación de variables. | [2.5 puntos] |

Para 4 y 5, elegir o las dos versiones A o las dos versiones B.

- | | |
|--|--------------|
| 4A. Resolver $\begin{cases} u_t - u_{xx} + u = 4t \cos x, & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = 1, u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 \end{cases}$. | [2 puntos] |
| 4B. Resolver el problema plano $\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = \cos \theta, & r < 2 \\ u(2, \theta) = \sin 2\theta \end{cases}$. | [2 puntos] |
| 5A. Resolver el problema espacial $\begin{cases} u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r^2}[u_{\theta\theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta}u_\theta] = 0, & 1 < r < 2 \\ u(1, \theta) = \cos \theta, u(2, \theta) = 0, & \theta \in [0, \pi] \end{cases}$ | [1.5 puntos] |
| 5B. Resolver $\begin{cases} u_t - 2u_{xx} + tu = 0, & x \in \mathbf{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = e^{-x^2/8}, & u \text{ acotada} \end{cases}$, utilizando la transformada de Fourier. | [1.5 puntos] |

Examen de septiembre de 2012 de Métodos Matemáticos II (grupos D y E)

Elegir 2 problemas entre 1A, 1B y 1C:

- | | |
|--|--------------|
| 1A. Sea $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2}, & x \in [1, 3] \\ 0, & x \in [0, 1] \cup [3, \infty) \end{cases}, & u_t(x, 0) = u(0, t) = 0 \end{cases}$. a] Hallar $u(1, 3)$. b] Dibujar $u(x, 2)$. | [1.5 puntos] |
| 1B. Sea $y'' + xy' + y = 0$. Hallar los 3 primeros términos no nulos del desarrollo en serie de una solución no trivial que se anule en $x=0$, encontrando la regla de recurrencia. | [1.5 puntos] |
| 1C. Sea $\begin{cases} xy'' - 2y' = 2 \\ y(1) + y'(1) = y(2) = 0 \end{cases}$. Escribir la ecuación en forma autoadjunta. Determinar cuántas soluciones tienen el problema homogéneo y el no homogéneo. | [1.5 puntos] |
| 2. Resolver por separación de variables: $\begin{cases} u_t - \frac{1}{t}u_{xx} = 2 \cos x, & x \in (0, \frac{\pi}{2}), t > 1 \\ u(x, 1) = \cos 3x, u_x(0, t) = u(\frac{\pi}{2}, t) = 0 \end{cases}$. | [2 puntos] |
| 3. a] Desarrollar $f(\theta) = \cos \theta$ en $\{\sin n\theta\}$ (simplificar el resultado). ¿Converge la serie hacia f en todo $[0, \pi]$? b] Resolver por separación de variables $\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, & r < 1, 0 < \theta < \pi \\ u_r(1, \theta) = \cos \theta, u(r, 0) = u(r, \pi) = 0 \end{cases}$. | [2.5 puntos] |
| 4. Hallar la solución de $\begin{cases} tu_t - u_x = u \\ u(x, 1) = f(x) \end{cases}$. a] A partir de las características. b] Utilizando la transformada de Fourier. | [2.5 puntos] |