

Ejercicios evaluables 1 de Métodos II (E)

- Resolver $(y+2x)u_y - xu_x = y$ con el dato $u(1, y)=1$. ¿Es única la solución? [0.3 puntos]
- Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, & x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0)=u_t(x, 0)=0 \\ u(0, t)=\sin t \end{cases}$. a) Hallar $u(\frac{\pi}{2}, \pi)$. b) Hallar $u(x, \pi)$ para $x \geq \pi$. [0.3 puntos]
[Ayuda: $v=\sin t \cos x$ cumple el dato de contorno y la ecuación].

Ejercicios evaluables 1 de Métodos II (D)

- Resolver $2yu_y - xu_x = u - x^2y$ con el dato $u(2, y)=0$. ¿Es única la solución? [0.3 puntos]
- Sea $\begin{cases} u_{tt}-9u_{xx}=0, & x \in [0, 4], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0)=\begin{cases} (x-1)(x-2), & x \in [1, 2] \\ 0, & x \in [0, 1] \cup [2, 4] \end{cases}, u_t(x, 0)=0 \\ u(0, t)=u(4, t)=0 \end{cases}$. a) Hallar $u(\frac{5}{2}, \frac{4}{3})$. b) Dibujar $u(x, 1)$. [0.3 puntos]

Ejercicios evaluables 23 de Métodos II (E)

- Sea $(\alpha+4x^2)y'' + y = 0$. a) Si $\alpha=0$ hallar la solución general de la ecuación para $x > 0$. b) Para $\alpha=1$ hallar el desarrollo en serie hasta x^4 de la solución que cumple $y(0)=2$, $y'(0)=0$. ¿Dónde converge, al menos, la serie solución anterior? [0.35 puntos]
- Sea (P) $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0)=y(1)-y'(1)=0 \end{cases}$. a) Probar que $\lambda_0=0$ es autovalor y hallar la $\{y_0\}$ asociada. Justificar gráficamente que hay infinitos $\lambda_n > 0$. [Dato: se ve que no hay $\lambda_n < 0$]. b) Hallar el coeficiente que acompaña a y_0 en el desarrollo de $f(x)=1$ en serie de autofunciones de (P). c) Precisar cuántas soluciones tiene $y'' + \pi^2 y = x$ con esas condiciones de contorno. [0.45 puntos]

Ejercicios evaluables 23 de Métodos II (D)

- Sea $x^2(1+x^2)y'' - 6y = 0$. Hallar los 3 primeros términos no nulos del desarrollo en serie de una solución acotada en $x=0$, encontrando la regla de recurrencia. ¿Cuál es el coeficiente de x^{2012} en dicho desarrollo? ¿Son analíticas todas las soluciones en $x=0$? [0.35 puntos]
- Sea $\begin{cases} y'' - 6y' + \lambda y = 0 \\ y(0)=y(1)=0 \end{cases}$. a) Hallar sus autovalores λ_n y autofunciones $\{y_n\}$, escribir la ecuación en forma autoadjunta y calcular $\langle y_n, y_n \rangle$. [0.45 puntos] b) Precisar cuántas soluciones tiene $y'' - 6y' - 7y = 7$ con esas condiciones de contorno.

Ejercicios evaluables 4 de Métodos II (E)

- Resolver $\begin{cases} u_{tt} + 2u_t - 5u_{xx} = 0, & x \in [0, \pi], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0)=0, u_t(x, 0)=g(x), u(0, t)=u(\pi, t)=0 \end{cases}$ i) para cualquier $g(x)$ ii) para $g(x)=2 \sin x$. [0.45 puntos]
- Resolver el problema plano $\begin{cases} \Delta u = r \sin \frac{5\theta}{2}, & r < 4, \theta \in (0, \pi) \\ u(4, \theta)=0, u(r, 0)=u_\theta(r, \pi)=0 \end{cases}$. [0.35 puntos]

Ejercicios evaluables 4 de Métodos II (D)

- Resolver $\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0)=0, u_x(0, t)=0, u(\pi, t)=8t \end{cases}$. [0.5 puntos]
- Resolver el problema plano $\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 2, \theta \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ u_r(2, \theta) + ku(2, \theta) = 8 \cos 2\theta, & \text{para: i) } k=1, \text{ ii) } k=0 \\ u_\theta(r, 0)=u_\theta(r, \frac{\pi}{2})=0 \end{cases}$ [0.3 puntos]

Soluciones de los ejercicios evaluables 1 de Métodos II

1. Resolver $(y+2x)u_y - xu_x = y$ con el dato $u(1, y)=1$. ¿Es única la solución?

[0.3 puntos]

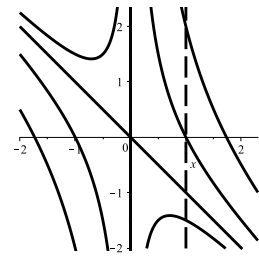
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} - 2 \xrightarrow{\text{lineal}} y = \frac{C}{x} - \frac{1}{x} \int 2x dx = \frac{C}{x} - x, \quad x(y+x) = C \text{ características.}$$

$$\begin{cases} \xi = xy + x^2 \\ \eta = x \text{ [mejor]} \end{cases} \rightarrow u_\eta = -\frac{y}{x} = 1 - \frac{\xi}{\eta^2} \rightarrow u = p(\xi) + \eta + \frac{\xi}{\eta} = p(xy+x^2) + 2x + y.$$

$$u(1, y) = p(y+1) + 2y - 1 = 1 \rightarrow p(v) = -v \rightarrow \boxed{u(x, y) = 2x + y - xy - x^2}.$$

Solución única pues $x=1$ no es tangente a las características, como prueba el dibujo o $\Delta = 0 \cdot (y+2) - 1 \cdot (-1) = 1 \neq 0$.

[Más largo sería: $\begin{cases} \xi = xy + x^2 \\ \eta = y \end{cases}, 4\xi + \eta^2 = (2x+y)^2 \rightarrow u_\eta = \frac{y}{y+2x} = \frac{\eta}{\sqrt{4\xi + \eta^2}} \rightarrow u = p(\xi) + \sqrt{4\xi + \eta^2} = p(xy+x^2) + 2x + y$].



2. Sea $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = \sin t \end{cases}$. a) Hallar $u(\frac{\pi}{2}, \pi)$. b) Hallar $u(x, \pi)$ para $x \geq \pi$.

[0.3 puntos]

[Ayuda: $v = \sin t \cos x$ cumple el dato de contorno y la ecuación].

Primero hay que hacer las condiciones de contorno homogéneas. Con la $v = \sin t \cos x$ dada:

$$w = u - v \rightarrow \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0, & x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ w(x, 0) = 0, & w_t(x, 0) = -\cos x \\ w(0, t) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0, & x, t \in \mathbf{R} \\ w(x, 0) = 0, & w_t(x, 0) = g^* \end{cases}$$

con g^* extensión impar a todo $\mathbf{R}$ de $-\cos x$, es decir:

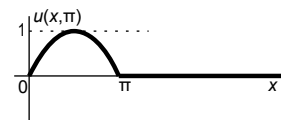
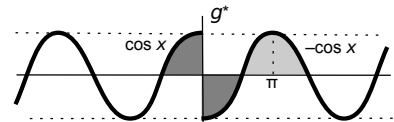
Entonces la solución viene dada por $u(x, t) = \sin t \cos x + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g^*(s) ds$.

En particular: **a)** $u(\frac{\pi}{2}, \pi) = 0 + \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} g^*_{\text{impar}} = -\frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos s ds = \boxed{1}$.

[No hemos necesitado utilizar la expresión de g^* que en $x < 0$ sería $\cos x$].

b) Si $x \geq \pi$, sólo se integra la g inicial: $u(x, \pi) = 0 + \frac{1}{2} \int_{x-\pi}^{x+\pi} g = \frac{1}{2} [\sin(x-\pi) - \sin(x+\pi)] = \boxed{0}$.

[Como las ondas viajan a velocidad 1 a esos puntos todavía no ha llegado la perturbación del origen].



1. Resolver $2yu_y - xu_x = u - x^2y$ con el dato $u(2, y)=0$. ¿Es única la solución?

[0.3 puntos]

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{x} \rightarrow y = C e^{-2 \log x} = \frac{C}{x^2}, \quad x^2 y = C \text{ características.}$$

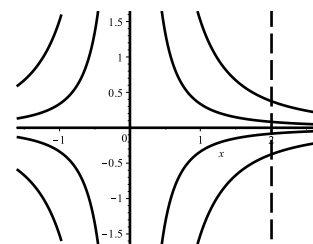
$$\begin{cases} \xi = x^2 y \\ \eta = x \end{cases} \rightarrow u_\eta = -\frac{u-\xi}{\eta} \rightarrow u = \frac{p(\xi)}{\eta} + \frac{1}{\eta} \int \xi d\eta = \frac{p(\xi)}{\eta} + \xi \quad \text{[o } u_p \text{ a ojo]} = \frac{p(x^2 y)}{x} + x^2 y.$$

$$u(2, y) = \frac{p(4y)}{2} + 4y = 0 \rightarrow p(v) = -2v \rightarrow \boxed{u(x, y) = x^2 y - 2xy}.$$

O $\begin{cases} \xi = x^2 y \\ \eta = y \end{cases} \rightarrow u_\eta = \frac{u-\xi}{2\eta} \rightarrow u = p(\xi) \eta^{1/2} + \xi = p^*(x^2 y) \sqrt{y} + x^2 y \quad (y \geq 0).$

$$u(2, y) = p^*(4y) \sqrt{y} + 4y = 0 \rightarrow p(v) = -2\sqrt{v} \rightarrow \boxed{u(x, y) = x^2 y - 2xy}.$$

Solución única pues $x=2$ no es tangente a las características. Se ve en el dibujo o $\Delta = 0 \cdot 2y - 1 \cdot (-2) = 2 \neq 0$.



2. Sea $\begin{cases} u_{tt} - 9u_{xx} = 0, & x \in [0, 4], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = \begin{cases} (x-1)(x-2), & x \in [1, 2] \\ 0, & x \in [0, 1] \cup [2, 4] \end{cases}, & u_t(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = u(4, t) = 0 \end{cases}$. a) Hallar $u(\frac{5}{2}, \frac{4}{3})$. b) Dibujar $u(x, 1)$.

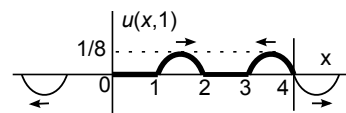
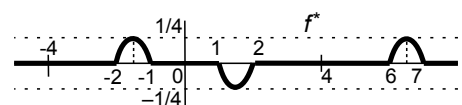
[0.3 puntos]

Para utilizar D'Alembert hay que extender la f dada de forma impar y 8-periódica a una f^* definida en todo $\mathbf{R}$. La solución viene entonces dada por $u(x, t) = \frac{1}{2} [f^*(x+3t) + f^*(x-3t)]$.

a) $u(\frac{5}{2}, \frac{4}{3}) = \frac{1}{2} [f^*(\frac{13}{2}) + f^*(-\frac{3}{2})] = \frac{1}{2} [f^*(-\frac{3}{2}) + f^*(-\frac{3}{2})] = -f(\frac{3}{2}) = \boxed{\frac{1}{4}}$.

b) Para hacer el dibujo basta trasladar la gráfica de $\frac{1}{2} f^*$ a izquierda y derecha 3 unidades y sumar ambas gráficas en $[0, 4]$.

[A ambas ondas les ha dado tiempo de reflejarse en el extremo e invertirse].



Soluciones de los ejercicios evaluables 23 de Métodos II (E)

- 1.** Sea $(a+4x^2)y'' + y = 0$. **a)** Si $a=0$ hallar la solución general de la ecuación para $x > 0$.
b) Para $a=1$ hallar el desarrollo en serie hasta x^4 de la solución que cumple $y(0)=2$, $y'(0)=0$.
 ¿Dónde converge, al menos, la serie solución anterior? [0.35 puntos]

a) $x^2 y'' + \frac{1}{4}y = 0$ es de Euler con $\lambda(\lambda-1) + \frac{1}{4} = (\lambda - \frac{1}{2})^2 = 0 \rightarrow y = (c_1 + c_2 \ln x)x^{1/2}$, $x > 0$.

[Una solución válida también para $x < 0$ sería $y = (c_1 + c_2 \ln |x|)|x|^{1/2}$].

b) $x=0$ es punto regular de $(1+4x^2)y'' + y = 0$ y los datos iniciales nos dicen que $c_0=2$ y $c_1=0$.

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} [k(k-1)c_k x^{k-2} + 4k(k-1)c_k x^k] + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0 \rightarrow$$

$$x^0: 2c_2 + c_0 = 0 \rightarrow c_2 = -\frac{1}{2}c_0 \stackrel{\text{d.i.}}{=} -1; \quad x^1: 6c_3 + c_1 = 0 \rightarrow c_3 = -\frac{1}{6}c_1 \stackrel{\text{d.i.}}{=} 0;$$

$$x^2: 12c_4 + 8c_2 + c_2 = 0 \rightarrow c_4 = -\frac{3}{4}c_2 = \frac{3}{4}; \dots \rightarrow y = 2 - x^2 + \frac{3}{4}x^4 + \dots$$

O bien: $y''(0) + y(0) = 0 \rightarrow y''(0) = -2$. Derivando: $(1+4x^2)y''' + 8xy'' + y' = 0 \rightarrow y'''(0) = -y'(0) = 0$.

Derivando otra vez: $(1+4x^2)y^{iv} + 16xy''' + 9y'' = 0 \rightarrow y^{iv}(0) = -9y''(0) = 18$.

Por tanto: $y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2}x^2 + \frac{y'''(0)}{6}x^3 + \frac{y^{iv}(0)}{24}x^4 + \dots = 2 - x^2 + \frac{3}{4}x^4 + \dots$

Como el desarrollo de $b(x) = \frac{1}{1+4x^2}$ converge si $|x| < \frac{1}{2}$, porque el denominador se anula en $x = \pm \frac{1}{2}$ i o porque esta serie geométrica converge si $4x^2 < 1$, la serie solución al menos lo hará en $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

[Se puede comprobar que converge ahí utilizando el cociente y la regla de recurrencia $c_{k+2} = -\frac{(2k-1)^2}{(k+2)(k+1)}c_k$].

- 2.** Sea (P) $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(1) - y'(1) = 0 \end{cases}$ **a)** Probar que $\lambda_0 = 0$ es autovalor y hallar la $\{y_0\}$ asociada. Justificar gráficamente que hay infinitos $\lambda_n > 0$. [Dato: se ve que no hay $\lambda_n < 0$].
b) Hallar el coeficiente que acompaña a y_0 en el desarrollo de $f(x) = 1$ en serie de autofunciones de (P).
c) Precisar cuántas soluciones tiene $y'' + \pi^2 y = x$ con esas condiciones de contorno. [0.45 puntos]

a) $\lambda = 0$: $y = c_1 + c_2 x$, $y' = c_2 \rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_1 + c_2 - c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow c_1 = 0, c_2 \text{ cualquiera} \rightarrow \lambda_0 = 0$ autovalor con $y_0 = \{x\}$.

$\lambda > 0$: $y = c_1 \cos wx + c_2 \sin wx$, $y' = -wc_1 \sin wx + wc_2 \cos wx$, $w = \sqrt{\lambda} \rightarrow$
 $\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2(\sin w - w \cos w) = 0 \end{cases} \rightarrow c_2$ queda indeterminado si $\sin w = w \cos w$.

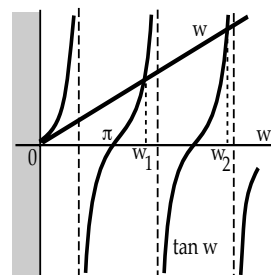
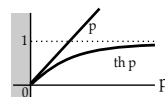
Hay infinitos w_n con $w_n = \tan w_n \rightarrow \lambda_n = w_n^2$, $y_n = \{\sin w_n x\}$.

[Con algún método numérico se irían calculando: $w_1 \approx 4.493$, $w_2 \approx 7.725$, ...].

Como $\beta\beta' < 0$ podría haber $\lambda < 0$. El dato nos dice que no, pero lo comprobamos:

$$y = c_1 e^{px} + c_2 e^{-px} \rightarrow \begin{cases} c_1 = -c_2 \\ c_2(p[e^p + e^{-p}] - [e^p - e^{-p}]) = 0 \end{cases} \rightarrow y \equiv 0$$

[no existe $p > 0$ con $p = \tanh p$, pues $(\tanh p)'(0) = 1$].



b) Los coeficientes del desarrollo $1 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n y_n(x) = c_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} \sin w_n x$ vienen dados por $c_n = \frac{\langle 1, y_n \rangle}{\langle y_n, y_n \rangle}$.

En particular, $\langle 1, x \rangle = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$ y $\langle x, x \rangle = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$. Por tanto, $c_0 = \frac{1/2}{1/3} = \frac{3}{2}$, $1 = \frac{3}{2}x + \dots$

Calculemos, aunque no se pida, el resto de coeficientes: $\langle 1, \sin w_n x \rangle = \int_0^1 \sin w_n x dx = \frac{1}{w_n} [1 - \cos w_n]$;

$$\langle \sin w_n x, \sin w_n x \rangle = \int_0^1 \frac{1 - \cos 2w_n x}{2} dx = \frac{1}{2} - \frac{\sin 2w_n}{4w_n} = \frac{1}{2} - \frac{\sin w_n \cos w_n}{2w_n} = \frac{1 - \cos^2 w_n}{2} = \frac{\sin^2 w_n}{2}. \quad c_n = \frac{2}{w_n(1 + \cos w_n)}.$$

c) El problema homogéneo tiene sólo la solución trivial, puesto que $\lambda = \pi^2$ no es autovalor de (P).

[Es inmediato que $\sin \pi \neq \pi \cos \pi$ ($0 \neq -\pi$), o está claro viendo el dibujo de arriba].

Por tanto, el problema no homogéneo **tendrá solución única**.

[No se pide, pero sería fácil hallarla. Una y_p se ve casi a ojo: $y = c_1 \cos \pi x + c_2 \sin \pi x + \frac{x}{\pi^2} \xrightarrow{\text{c.c.}} y = \frac{x}{\pi^2}$].

Soluciones de los ejercicios evaluables 23 de Métodos II (D)

- 1.** Sea $x^2(1+x^2)y'' - 6y = 0$. Hallar los 3 primeros términos no nulos del desarrollo en serie de una solución acotada en $x=0$, encontrando la regla de recurrencia. ¿Cuál es el coeficiente de x^{2012} en dicho desarrollo? ¿Son analíticas todas las soluciones en $x=0$? [0.35 puntos]

$x=0$ es punto singular regular de $x^2y'' - \frac{6}{1+x^2}y = 0$ con $\lambda(\lambda-1) - 6 = (\lambda-3)(\lambda+2) = 0 \rightarrow \lambda_1=3, \lambda_2=-2$.

Está acotada en $x=0$ la $y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+3}$, $c_0 \neq 0$ [la serie convergerá al menos en $(-1, 1)$, donde lo hace $b^*(x)$].

$$\rightarrow \sum_0 \left[(k+3)(k+2)c_k x^{k+3} + (k+3)(k+2)c_k x^{k+5} - 6c_k x^{k+3} \right] = 0 \rightarrow x^3: 6c_0 - 6c_0 = 0, c_0 \text{ indeterminado};$$

$$x^4: 12c_1 - 6c_1 = 0, c_1 = 0; \quad x^5: 20c_2 + 6c_0 - 6c_2 = 0, c_2 = -\frac{3}{7}c_0;$$

$$x^{k+3}: (k+5)kc_k + (k+1)kc_{k-2} = 0, c_k = -\frac{k+1}{k+5}c_{k-2} \rightarrow c_3 = c_5 = \dots = 0, c_4 = -\frac{5}{9}c_2 = \frac{5}{21}c_0 \rightarrow$$

$$y_1 = x^3 - \frac{3}{7}x^5 + \frac{5}{21}x^7 - \dots$$

El coeficiente de x^{2012} , como el de todas las potencias pares de la serie solución, es 0.

La otra solución $y_2 = \frac{1}{x^2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k + dy_1 \ln x$ es obviamente **no analítica** tanto si $d \neq 0$ como si $d=0$.

[Haciendo cálculos se comprueba que y_2 es la sencilla función no analítica $y_2 = \frac{1}{x^2} + 1$].

- 2.** Sea $\begin{cases} y'' - 6y' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$. **a)** Hallar sus autovalores λ_n y autofunciones $\{y_n\}$, escribir la ecuación en forma autoadjunta y calcular $\langle y_n, y_n \rangle$. [0.45 puntos]
b) Precisar cuántas soluciones tiene $y'' - 6y' - 7y = 7$ con esas condiciones de contorno.

a) Las soluciones de la lineal con coeficientes constantes dependen de $\mu^2 - 6\mu + \lambda = 0$, $\mu = 3 \pm \sqrt{9 - \lambda}$.

La ecuación en forma autoadjunta queda: $[e^{-6x}y']' + \lambda e^{-6x}y = 0$. $r(x) = e^{-6x}$.

Como $\alpha\alpha' = \beta\beta' = 0$ sabemos que los $\lambda \geq 0$, pero esto no ahorra cálculos, pues hay que mirar $\lambda <, =, > 9$:

$$\lambda < 9: y = c_1 e^{(3+p)x} + c_2 e^{(3-p)x}, p = \sqrt{9-\lambda} \rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0, c_2 = -c_1 \\ c_1 e^{3+p} + c_2 e^{3-p} = 0 \end{cases} \rightarrow c_1 e^3 [e^p - e^{-p}] = 0 \rightarrow c_1 = c_2 = 0.$$

$$\lambda = 9: y = [c_1 + c_2 x] e^{3x} \rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ [c_1 + c_2] e^3 = 0 \end{cases} \rightarrow y \equiv 0. \lambda = 9 \text{ tampoco es autovalor.}$$

$$\lambda > 9: y = [c_1 \cos wx + c_2 \sin wx] e^{3x}, w = \sqrt{\lambda - 9} \rightarrow \begin{cases} y(0) = c_1 = 0 \\ y(1) = c_2 e^3 \sin w = 0 \end{cases} \rightarrow w = n\pi, n = 1, 2, \dots \rightarrow$$

$$\lambda_n = 9 + n^2 \pi^2, \quad y_n = \{e^{3x} \sin n\pi x\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\langle y_n, y_n \rangle = \int_0^1 \underset{\text{peso}}{e^{-6x}} e^{6x} \sin^2 n\pi x dx = \int_0^1 \frac{1 - \cos 2n\pi x}{2} dx = \frac{1}{2} - \left[\frac{\sin 2n\pi x}{4n\pi} \right]_0^1 = \left[\frac{1}{2} \right].$$

- b)** El problema homogéneo tiene sólo la solución trivial $y \equiv 0$, puesto que $\lambda = -7$ no es autovalor de (P) [cosa que se sabía desde que vimos que los $\lambda \geq 0$].

Por tanto, el problema no homogéneo **tendrá solución única**.

[Solución que se podría calcular imponiendo los datos a la solución $y = c_1 e^{7x} + c_2 e^{-x} - 1$, con y_p que se ve a ojo].

Soluciones de los ejercicios evaluables 4 de Métodos II (E)

- 1. Resolver** $\begin{cases} u_{tt} + 2u_t - 5u_{xx} = 0, & x \in [0, \pi], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = g(x), & u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$ [0.45 puntos]
- i) para cualquier $g(x)$
ii) para $g(x) = 2 \sin x$

Separando variables $u(x, t) = X(x)T(t)$ se tiene: $\frac{T'' + 2T'}{5T} = \frac{X''}{X} = -\lambda \rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ T'' + 2T' + 5\lambda T = 0 \end{cases}$

De los datos de contorno se deduce $x(0) = X(\pi) = 0$, y por tanto: $\lambda_n = n^2$, $X_n = \{\sin nx\}$, $n = 1, 2, \dots$

Para esos λ es: $T = e^{-t} [c_1 \cos(\sqrt{5n^2 - 1}t) + c_2 \sin(\sqrt{5n^2 - 1}t)]$, pues $\mu^2 + 2\mu + 5n^2 = 0 \rightarrow \mu = -1 \pm i\sqrt{5n^2 - 1}$.

Imponiendo ya el dato inicial homogéneo: $T(0) = 0 \rightarrow c_1 = 0$, $T_n = \{e^{-t} \sin(\sqrt{5n^2 - 1}t)\}$.

La solución será de la forma $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-t} \sin(\sqrt{5n^2 - 1}t) \sin nx$. Imponemos el dato que falta:

$$u_t(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-t} [\sqrt{5n^2 - 1} \cos(\sqrt{5n^2 - 1}t) - \sin(\sqrt{5n^2 - 1}t)] \sin nx \rightarrow$$

$$i) u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{5n^2 - 1} \sin nx = g(x) \rightarrow c_n = \frac{2}{\pi \sqrt{5n^2 - 1}} \int_0^{\pi} g(x) \sin nx dx.$$

$$ii) \text{ En el caso de ser } g(x) = 2 \sin x, \text{ todos los } c_n = 0 \text{ excepto } c_1 \sqrt{4} = 2 \rightarrow u(x, t) = e^{-t} \sin 2t \sin x.$$

- 2. Resolver el problema plano** $\begin{cases} \Delta u = r \sin \frac{5\theta}{2}, & r < 4, \theta \in (0, \pi) \\ u(4, \theta) = 0, u(r, 0) = u_\theta(r, \pi) = 0 \end{cases}$ [0.35 puntos]

Las autofunciones del homogéneo las da: $\begin{cases} \Theta'' + \lambda \Theta = 0 \\ \Theta(0) = \Theta(\pi) = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = \left(\frac{2n-1}{2}\right)^2, \Theta_n = \left\{ \sin \frac{2n-1}{2} \theta \right\}_{n=1, 2, \dots}$



Probamos, pues: $u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r) \sin \frac{2n-1}{2} \theta \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^2 R_n'' + r R_n' - \lambda_n R_n}{r^2} \sin \frac{2n-1}{2} \theta = r \sin \frac{5\theta}{2}$.

Del otro dato de contorno se deduce que $R_n(4) = 0$, y además la solución ha de estar acotada para $r = 0$.

Como si $n \neq 3$ es $R_n \equiv 0$ solución (la única, pues sabemos que el problema la tiene), sólo hay que resolver:

$$\begin{cases} r^2 R_3'' + r R_3' - \frac{25}{4} R_3 = r^3 \\ R_3 \text{ acotada}, R_3(4) = 0 \end{cases} \rightarrow R_3 = c_1 r^{5/2} + c_2 r^{-5/2} + R_{3p}, \text{ con } R_{3p} = A r^3 \text{ (por no ser 3 autovalor)} \\ \rightarrow 6A + 3A - \frac{25}{4} A = 1, A = \frac{4}{11}.$$

$$[\text{Más largo es utilizar la [fvc]: } \begin{vmatrix} r^{5/2} & r^{-5/2} \\ \frac{5}{2} r^{3/2} & -\frac{5}{2} r^{-7/2} \end{vmatrix} = -\frac{5}{r}, R_{3p} = r^{-5/2} \int \frac{r^{5/2} r}{-5/r} - r^{5/2} \int \frac{r^{-5/2} r}{-5/r} = \dots = \frac{4}{11} r^3].$$

$$\text{Imponiendo los datos: } \begin{matrix} c_2 = 0 \\ 32c_1 + \frac{4}{11} 64 = 0, c_1 = -\frac{8}{11} \end{matrix} \rightarrow u(r, \theta) = \frac{4}{11} (r^3 - 2r^{-5/2}) \sin \frac{5\theta}{2}.$$

Soluciones de los ejercicios evaluables 4 de Métodos II (D)

1. Resolver $\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & u_x(0, t) = 0, u(\pi, t) = 8t \end{cases}$ [0.5 puntos]

Lo primero es hacer cero las condiciones de contorno: $v = 8t \xrightarrow{w=u-v} \begin{cases} w_t - 4w_{xx} = -8 \\ w(x, 0) = 0, w_x(0, t) = w(\pi, t) = 0 \end{cases}$

Separando variables en el homogéneo $u(x, t) = X(x)T(t)$, el formulario dice que resulta:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X(\pi) = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = \left(\frac{2n-1}{2}\right)^2, X_n = \left\{ \cos \frac{(2n-1)x}{2} \right\}, n = 1, 2, \dots \quad [\text{y además } T' + 4\lambda T = 0].$$

Probamos como siempre en problemas homogéneos una serie con las autofunciones del homogéneo:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cos \frac{(2n-1)x}{2} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} [T'_n + 4\lambda_n T_n] \cos \frac{(2n-1)x}{2} = -8 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \frac{(2n-1)x}{2},$$

$$\text{siendo } B_n = -\frac{16}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \frac{(2n-1)x}{2} dx = -\frac{32}{(2n-1)\pi} \left[\sin \frac{(2n-1)x}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{32(-1)^n}{(2n-1)\pi}.$$

$$\text{Como } w(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \cos \frac{(2n-1)x}{2} = 0, \text{ debemos resolver: } \begin{cases} T'_n + (2n-1)^2 T_n = B_n \\ T_n(0) = 0 \end{cases}.$$

$$\text{A simple vista se ve una } T_{np} \text{ así que } T_n(t) = Ce^{-(2n-1)^2 t} + \frac{B_n}{(2n-1)^2} \xrightarrow{T_n(0)=0} C = \frac{-B_n}{(2n-1)^2}.$$

Por tanto:

$$u(x, t) = 8t + \frac{32}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^3} \left[1 - e^{-(2n-1)^2 t} \right] \cos \frac{(2n-1)x}{2}.$$

[Se podría buscar una v que, además de las condiciones de contorno, satisficiera la ecuación; tanteando un poco, se encuentra $v = 8t + x^2 - \pi^2$. Con ella pasaríamos a resolver el siguiente problema homogéneo:

$$\begin{cases} w_t - 4w_{xx} = 0 \\ w(x, 0) = \pi^2 - x^2, w_x(0, t) = w(\pi, t) = 0 \end{cases} \rightarrow w = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(2n-1)^2 t} \cos \frac{(2n-1)x}{2}, \text{ e imponiendo el dato inicial:}$$

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi^2 - x^2) \cos \frac{(2n-1)x}{2} dx = \frac{4(\pi^2 - x^2)}{\pi(2n-1)} \left[\sin \frac{(2n-1)x}{2} \right]_0^{\pi} + \frac{8}{\pi(2n-1)} \int_0^{\pi} x \sin \frac{(2n-1)x}{2} dx = \dots = \frac{32(-1)^{n+1}}{\pi(2n-1)^3},$$

$$\text{con lo que otra forma de la solución es: } u = 8t + x^2 - \pi^2 - \frac{32}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^3} e^{-(2n-1)^2 t} \cos \frac{(2n-1)x}{2}.$$

2. Resolver el problema plano $\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 2, \theta \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ u_r(2, \theta) + k u(2, \theta) = 8 \cos 2\theta, & \text{para: i) } k=1, \text{ ii) } k=0 \\ u_{\theta}(r, 0) = u_{\theta}(r, \frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$ [0.3 puntos]

Separando variables se tiene: $\begin{cases} \Theta'' + \lambda \Theta = 0 \\ \Theta'(0) = \Theta'(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}, \lambda_n = 4n^2, \Theta_n = \{\cos 2n\theta\}, n = 0, 1, 2, \dots$



Y además: $r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0 \rightarrow \begin{matrix} R_0 = c_1 + c_2 \ln r \\ R_{2n} = c_1 r^{2n} + c_2 r^{-2n} \end{matrix} \xrightarrow{R \text{ acotado}} \begin{matrix} R_0 = \{1\} \\ R_{2n} = \{r^{2n}\} \end{matrix} \rightarrow u = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n} \cos 2n\theta.$

Imponiendo el último dato de contorno: $k \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} [2n2^{2n-1} + k2^{2n}] \cos 2n\theta = 8 \cos 2\theta.$

i) Para $k=1$, todos los $a_{2n}=0$, excepto $a_2[4+4]=8$, y la solución (única) es: $u(r, \theta) = r^2 \cos 2\theta$.

ii) Para $k=0$ (es problema de Neumann), a_0 queda libre, $a_2[4+0]=8$, y los demás $a_{2n}=0$.

En este caso existen las infinitas soluciones: $u(r, \theta) = C + 2r^2 \cos 2\theta$.

Si el dato hubiese sido $u_r(2, \theta) = 8 \sin 2\theta$ (perdón otra vez), para ii) no habría solución, pues debería ser:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n2^{2n} a_{2n} \cos 2n\theta = 8 \sin 2\theta = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos 2n\theta, \text{ y esto es imposible, pues } A_0 = \frac{16}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta d\theta = \frac{16}{\pi} \neq 0.$$

A la misma conclusión llegaríamos observando que debería ser: $0 = \iint_D 0 = \int_{\partial D} f ds = 0 + \int_0^{\pi/2} 8 \sin 2\theta 2d\theta \neq 0.$

[En cambio, sí se cumple que: $0 = \int_0^{\pi/2} 8 \cos 2\theta 2d\theta = 0$].