Mayo 89 (sólo para compensables del primer parcial; 56% de aprobados)

1. Sea la ecuación de primer orden $y\,u_y + (2y-x)\,u_x = x$. **a**. Hallar la solución que satisface $u(x,1)=0$.
b. Plantear un problema de Cauchy que posea infinitas soluciones. [2 puntos]

2. Sea $u_t - u_{xx} - au = 0$, a constante real , $0<x<3\pi$, $t>0$
$u(x,0)=1$
$u(0,t)-4u_x(0,t) = u(3\pi,t) = 0$
Determinar, según los valores de a , el límite de la solución cuando t tiende a ∞ **.** [3 puntos]

3. [Las soluciones de $\Delta u = F(r)$ que sólo dependen de r satisfacen, en el plano, la ecuación $u''+r^{-1}u' = F(r)$]
Considérese el problema $u'' + r^{-1}u' = F(r)$
$u'(1)-au(1)=A$, $u'(2)+bu(2)=B$ con $a,b\geq 0$.
a. Precisar cuándo tiene solución única, cuándo no tiene solución y cuándo tiene infinitas soluciones**.**
b. Para $F(r)=r^{-2}$, $a=1$, $b=0$, $A=B=0$ calcular su solución haciendo uso de la función de Green. [3 puntos]

4. Sea $u_{tt} - \Delta u = 0$, $r\geq 0$, $t\in\mathbf{R}$
$u(r,0) = 0,\ u_t(r,0) = g(r)$, con $g(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } 3<r<4 \\ 0 & \text{si } 0\leq r\leq 3 \text{ ó si } 4\leq r\leq\infty \end{cases}$
Calcular $u(1,5)$ considerando el problema en 1, 2 y 3 dimensiones espaciales
(r representa la distancia al origen en los tres casos). [2 puntos]

Junio 89 (26% de aprobados)

1. Sea el problema $y'' + 2y' + \lambda y = e^{-t}$
$y(0)+y'(0) = y(1/2) = 0$.
¿Existe algún valor de λ para el que tenga infinitas soluciones? [3 puntos]

2. Sea $u_{tt} - u_{xx} = 0$, $x\in[0,2\pi]$, $t\in\mathbf{R}$
$u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = \begin{cases} \operatorname{sen} x , & x\in[0,\pi] \\ 0 , & x\in[\pi,2\pi] \end{cases}$
$u_x(0,t) = u_x(2\pi,t) = 0$
Calcular $u(x,2\pi)$ **i)** con la fórmula de D'Alembert, **ii)** por separación de variables. [4 puntos]

3. Resolver $t^2u_t - u_x = g(x)$
$u(x,1) = 0$
i) a través de las características, **ii)** utilizando la transformada de Fourier [3 puntos]

Septiembre 89 (37% de aprobados)

1. Hallar la solución de $ty'' - 2y' = 1$
$y(1)-y'(1) = y(2)-2y'(2) = 0$ utilizando la función de Green. [2 puntos]

2. Sea $u_{tt} - u_{xx} = 0$, $t\geq 0$, $x\geq 0$
$u(x,0) = 1 - \cos x$
$u_t(x,0) = 0$
$u(0,t) = 0$ Hallar y dibujar $u(\pi,t)$ para $t\geq 0$. [3 puntos]

3. Resolver **a)** $u_t - 2tu_{xx} = \cos t$ $0<x<\pi$, $t>0$
$u(x,0) = \cos x$
$u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$ [3 puntos]

b) $u_t - 2tu_{xx} = 0$ $x\in\mathbf{R}$, $t>0$
$u(x,0) = \delta(x-1)$ [2 puntos]

Junio 94

(41% de aprobados)

1. Sea [E] $u_y - 2yu_x = 2yu$.

Hallar la solución de [E] que satisface los datos de Cauchy: **i)** $u(x,1)=e^{-x}$, **ii)** $u(2y,y)=0$, discutiendo en cada caso la unicidad de las soluciones.

[2 puntos]

2. Sea el problema de contorno: $\begin{array}{c} x''+\lambda x = 1 \\ x'(0)=x'(1)-2x(1)=0 \end{array}$.

Determinar los autovalores y autofunciones del problema homogéneo.
Precisar si el no homogéneo posee infinitas soluciones para algún valor de λ .
Calcular la solución para $\lambda=0$, haciendo uso de la fórmula de Green.

[2.5 puntos]

3. Resolver el problema para la ecuación de Laplace en el plano: $\begin{array}{c} \Delta u = \pi \text{ , } r<1, \ \theta\in(0,\pi) \\ u(r,0)=u(r,\pi)=u(1,\theta)=0 \end{array}$

Justificar si $u\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ es mayor o menor que cero.

[2.5 puntos]

4. Dado el problema: $\begin{array}{l} u_{tt}-u_{xx}=0 \ , \quad x\geq 0 \ , \quad t\in R \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=t^2 \end{array}$

a) Calcular u(1,2) a través de la fórmula de D'Alembert.

b) Obtener ese valor a partir de la solución por transformada seno de Fourier

[utilizando: $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} k}{k} = \frac{\pi}{2}$ y $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^3 k}{k^3} = \frac{3\pi}{8}$]

[3 puntos]

Septiembre 94

(52% de aprobados)

1. Sea el problema de Cauchy: $\begin{cases} u_y + xu_x = -x^2 e^{-y} \\ u(-1,y)=0 \end{cases}$. Hallar su solución y estudiar su unicidad.

[2 puntos]

2. Hallar **u(2,3)** , si u(r,t) es la solución de $\begin{cases} u_{tt}-\left[u_{rr}+\frac{2}{r}u_r\right]=0 \ , \ r\geq 0, t\in R \\ u(r,0)=6 \\ u_t(r,0)=5r^3 \end{cases}$ [2 puntos]

3. Estudiar según los valores de **b** cuántas soluciones posee el problema:

$$\begin{cases} ty''+2y' = 1 \\ y'(1)=2y'(2)+by(2)=0 \end{cases}$$

Para **b=1** hallar la solución mediante la función de Green. [2 puntos]

4. Resolver $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 \ , \ (x,y)\in(0,1)x(0,\pi) \\ u(x,0)=u_y(x,\pi)=0 \\ u(0,y)=0, u(1,y)=1 \end{cases}$ [2.5 puntos]

5. Resolver $\begin{cases} u_t - 2tu_{xx} = 0 \ , \ t>0, x\in R \\ u(x,0)=\delta(x) \end{cases}$ [1.5 puntos]

Junio 97

(32% de aprobados)

1. Sea (E) $4y\,u_{yy} - u_{xx} + 2u_y = 0$. **a)** Escribirla en forma canónica para $y>0$ y para $y<0$.
b) Resolver (E) con los datos iniciales: $u(x,1) = 2x$, $u_y(x,1) = x$.

[2.5 puntos]

2. Discutir, según los valores de λ , cuántas soluciones posee el problema $\begin{cases} y'' + \lambda y = t \\ y(0) = y'(1) - y(1) = 0 \end{cases}$

[2.5 puntos]

3. Dado $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = x, \ x\in[0,\pi], t\in \mathbf{R} \\ u(x,0) = x, \ u_t(x,0) = 0 \\ u(0,t) = 0, \ u(\pi,t) = \pi \end{cases}$, hallar $u(\frac{\pi}{2},\pi)$, **a]** utilizando la fórmula de D'Alembert
b] por separación de variables

[Indicación: sumar la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$ utilizando el desarrollo de $\pi x - x^2$ en $\operatorname{sen} nx$ en $[0,\pi]$]

[3.5 puntos]

4. Dado $\begin{cases} u_t - u_{xx} = \delta(x) \ , x\in \mathbf{R} \ , t>0 \\ u(x,0) = 0 \ , \ u \text{ acotada} \end{cases}$, hallar $u(0,t)$ sin que aparezcan integrales en el resultado.

[1.5 puntos]

Septiembre 97

(42% de aprobados)

1. Sea (E) $t^2 u_t + u_x = 2xu$.

a) Hallar la solución de (E) que cumple $u(x,1) = f(x)$, estudiando su unicidad.
En el caso de que sea $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ en $[0,\pi]$ y cero en el resto de $\mathbf{R}$, hallar $u(3,1/2)$.
b) Plantear un problema de Cauchy para (E) que tenga infinitas soluciones.

[3 puntos]

2. Discutir, según las constantes c y a , cuántas soluciones tiene el problema [P] $\begin{cases} y'' + \frac{2y'}{t} = 1 + \frac{c}{t} \\ y'(1) + a y(1) = y'(2) = 0 \end{cases}$

Para **c=0** y **a=1** , hallar la solución de [P] haciendo uso de la función de Green.

[3 puntos]

3. Resolver $\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, \ x\in(0,\pi), t>0 \\ u(x,0) = 1 \\ u_x(0,t) = 0, \ u(\pi,t) = e^{-t} \end{cases}$.

[2.5 puntos]

4. Probar que $\frac{2}{3} \le u(\frac{1}{2},\frac{\pi}{2}) \le 1$, si $u(r,\theta)$ es la solución del problema para la ecuación de Laplace en el plano:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \ , \ r<1 \\ u(1,\theta) = f(\theta) \end{cases} \quad \text{con} \quad f(\theta) = \begin{cases} 1 \ , \ 0\le\theta\le\pi \\ 0 \ , \ \pi<\theta<2\pi \end{cases}$$

[1.5 puntos]

Junio 1998 (51% de aprobados)

(elegir 4 de los 5 problemas)

1. Resolver $\begin{cases} y^3u_y - 2u_x = 2y^2u \\ u(x,1) = x \end{cases}$, precisando si la solución es única o no.

2. Sea $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \,,\; x\geq 0 \,,\; t\in \mathbf{R} \\ u(x,0) = \cos x \\ u_t(x,0) = 0 \\ u(0,t) = 1 \end{cases}$. Dibujar y hallar la expresión analítica de $u(x,2\pi)$.

3. Sea $\begin{cases} y'' - y' = e^t - K \\ y'(0) + \alpha y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$.

Hallar los valores de las constantes reales K y α para los que el problema posee infinitas soluciones.

4. Resolver por separación de variables: $\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = \pi \,,\; r<1 \,,\; \theta\in(0,\pi/2) \\ u_r(1,\theta) = \cos\theta \\ u_\theta(r,0) = u(r,\pi/2) = 0 \end{cases}$.

5. Deducir una fórmula para la solución de $\begin{cases} u_t - u_{xx} + u = 0 \,,\; x\in \mathbf{R} \,,\; t>0 \\ u(x,0) = f(x) \,,\; u \text{ acotada} \end{cases}$.

Hallar la solución explícita en el caso de que sea $f(x)\equiv 1$.

Septiembre 1998 (40% de aprobados)

(elegir 4 de los 5 problemas)

1. Resolver $\begin{cases} u_t + 4t^3u_x = 4t^3u \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$, **a)** a traves de las características, **b)** utilizando transformadas de Fourier.

2. Sea $yu_{yy} + 2y^2u_{xy} + y^3u_{xx} - u_y = 0$. Escribirla en forma canónica, hallar su solución general y hallar la o las soluciones que satisfacen $u(x,2) = x$, $u_y(x,2) = 0$.

3. Sea $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \,,\; x\in[0,2] \,,\; t\in \mathbf{R} \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \\ u(0,t) = u(2,t) = t^2 \end{cases}$. Hallar $u(1,3)$.

4. Sea $\begin{cases} t^2y'' - 2ty' + 2y = 2 \\ y(1) = 0 \,,\; y'(2) - y(2) = 0 \end{cases}$. Hallar su función de Green y resolverlo.

5. Resolver por separación de variables: $\begin{cases} u_t - u_{xx} + u = 0 \,,\; x\in(0,\pi) \,,\; t>0 \\ u(x,0) = \cos x \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 \end{cases}$.

Junio 1999 (27% de aprobados)

(elegir 3 de los 4 problemas)

5. Resolver $\begin{cases} 2yu_y + x\,u_x = x^2 y \\ u(2,y) = 2y \end{cases}$. ¿Es única la solución?

6. Dado $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \operatorname{sen} x\,, \quad x\in[0,\pi]\,,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = 1 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{cases}$, hallar $u(x,\pi)$.

7. Dado el problema: $\begin{cases} y'' + c^2 y = 1 \\ y'(0) - y(0) = y'(1) = 0 \end{cases}$,

determinar si existe algún valorde la constante c para el que tenga infinitas soluciones.

8. Resolver $\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + 6u_y = 0 \text{ en } (0,\pi)\times(0,\pi) \\ u\big|_{y=0} = 0\ ,\ u\big|_{y=\pi} = \cos 4x \\ u_x\big|_{x=0} = 0\ ,\ u_x\big|_{x=\pi} = 0 \end{cases}$.

Septiembre 1999 (26% de aprobados)

(elegir 3 de los 4 problemas)

5. Sean la ecuación de primer orden $x^2 u_y + y^2 u_x = 6\,x^2 y^2 u$ y los datos de Cauchy: $\begin{cases} \text{i] } u(x,x) = 0 \\ \text{ii] } u(x,-x) = 1 \end{cases}$. Hallar la solución única que satisface uno de esos datos y dos soluciones que cumplan el otro.

6. Dado $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0\ , \quad x\in[0,\pi]\,,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = t \end{cases}$, hallar $u(x,\pi/2)$.

7. Hallar la función de Green del problema: $\begin{cases} t^2 y'' - 2y = 2t \\ y'(1) - 2y(1) = y(2) = 0 \end{cases}$, y utilizarla para hallar su solución.

8. Resolver por separación de variables: $\begin{cases} u_t - u_{xx} + \frac{u}{t} = 2\ ,\ x\in(0,\pi)\,,\ t>0 \\ u(x,1) = \cos x \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 \end{cases}$.

Junio 2000 (40% de aprobados)

(elegir 2 de los 4 problemas; entregando 3, se toman las dos mejores notas)

5. Resolver $\begin{cases} y\,u_{yy} - x u_{xy} = 0 \\ u(x,2)=x\,,\ u_y(x,2)=1 \end{cases}$.

6. Dado $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ \ x\geq 0\,,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=0 \\ u_t(x,0)=3x^2 \\ u(0,t)=0 \end{cases}$, hallar $u(1,t)$ para $t\geq 0$.

7. Precisar, si existe, un valor de $\lambda>0$ para el que tenga solución única el problema $\begin{cases} y''+\lambda y = 1 \\ y(0)=y'(0)\,,\ y(1)=2 \end{cases}$.

8. Resolver el problema para la ecuación de Laplace en el plano: $\begin{cases} \Delta u = r\,\mathrm{sen}\,6\theta\ ,\ r<1,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2} \\ u(r,0)=u(r,\pi/2)=0 \\ u_r(1,\theta)=0 \end{cases}$.

Septiembre 2000 (30% de aprobados)

(elegir 2 de los 4 problemas; entregando 3, se toman las dos mejores notas)

5. Resolver $\begin{cases} 2y u_y + x u_x = 2x^2 \\ u(x,1)=0 \end{cases}$.

6. Dado $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=3x^2,\ \ x\geq 0\,,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=0 \end{cases}$, hallar $u(1,3)$.

7. Precisar, si existe, un valor de b para el que $\begin{cases} t^2y''-2y = t \\ 2y'(1)+5y(1)=0 \\ y'(2)+b\,y(2)=0 \end{cases}$ tenga infinitas soluciones.

8. Resolver por separación de variables: $\begin{cases} u_t - u_{xx} + 2tu = 0\ ,\ \ x\in(0,\pi)\,,\ t>0 \\ u(x,0)=\mathrm{sen}\,x \\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$.