Parcial de 11 de abril de 2011 de Ecuaciones Diferenciales II (grupo residual)

Hacer los problemas 1 y 2, y elegir entre el 3 y el 4.

[Puntuaciones sobre 4.5, que es lo que vale el examen].

1. a] Hallar (y simplificar) el desarrollo de $f(x)=x$ en serie de autofunciones del problema $\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=X'(\pi)=0 \end{cases}$.

b] Resolver por separación de variables $\begin{cases} u_t-(1+2t)u_{xx}=0\,,\ x\in(0,\pi),\ t>0 \\ u(x,0)=0\,,\ u(0,t)=0,\ u_x(\pi,t)=1 \end{cases}$. [2 puntos]

2. Sea $2yu_y+xu_x=4yx^2u$ y los datos iniciales: i) $u(-2,y)=1$, ii) $u(x,x^2)=0$.
Hallar la solución para el dato que proporciona solución única. ¿Por qué es única? [1.5 puntos]

3. Escribir en forma canónica la ecuación $u_{yy}-e^{2x}u_{xx}=0$. [1 punto]

4. Precisar cuántas soluciones tiene el problema $\begin{cases} xy''+2y'=f(x) \\ 2y(1)+y'(1)=y(2)=0 \end{cases}$, para i) $f(x)=0$ ii) $f(x)=3x-4$ [1 punto]

Soluciones

1. a] Las autofunciones del problema conocido son $X_n=\left\{\operatorname{sen}\frac{(2n-1)x}{2}\right\}$, $n=1,2,\dots$ y sabemos que $\langle X_n,X_n\rangle=\frac{\pi}{2}$.

Por tanto: $c_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\operatorname{sen}\frac{(2n-1)x}{2}\,dx=-\frac{4x}{\pi(2n-1)}\cos\frac{(2n-1)x}{2}\Big]_0^\pi+\frac{4}{\pi(2n-1)}\int_0^\pi\cos\frac{(2n-1)x}{2}\,dx$

$$=0+\frac{8}{\pi(2n-1)^2}\operatorname{sen}\frac{(2n-1)x}{2}\Big]_0^\pi=\frac{8(-1)^{n+1}}{\pi(2n-1)^2}.\ \text{Así pues, } \boxed{x=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^\infty\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}\operatorname{sen}\frac{(2n-1)x}{2}}.$$

b] $v=x$ cumple las condiciones de contorno $\xrightarrow{w=u-x}\begin{cases} w_t-(1+2t)w_{xx}=0 \\ w(x,0)=-x\,,\ w(0,t)=w_x(\pi,t)=0 \end{cases}$.

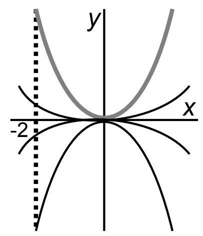
Separando variables $u=XT$ en esta ecuación desconocida:

$\frac{X''}{X}=\frac{T'}{(1+2t)T}=-\lambda\to\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=X'(\pi)=0 \end{cases}$, $X_n=\left\{\operatorname{sen}\frac{(2n-1)x}{2}\right\}$, y además $T'+\lambda(1+2t)T=0\to T_n=\left\{e^{-\lambda(t+t^2)}\right\}$.

Probamos: $w(x,t)=\sum_{n=1}^\infty c_n\,e^{-(2n-1)^2(t+t^2)/4}\operatorname{sen}\frac{(2n-1)x}{2}\ \to\ w(x,0)=\sum_{n=1}^\infty c_n\operatorname{sen}\frac{(2n-1)x}{2}=-x$, hecho en **a]**.

$$\text{Por tanto: } \boxed{u(x,t)=x+\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^\infty\frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}\,e^{-(2n-1)^2(t+t^2)/4}\operatorname{sen}\frac{(2n-1)x}{2}}.$$

2. $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x}$ (lineal) $\to y=Cx^2$, $\xi=\frac{y}{x^2}$ $\begin{array}{l}\nearrow \eta=y\to u_\eta=\frac{2\eta}{\xi}u\,,\ u=p(\xi)\,e^{\eta^2/\xi}=p\left(\frac{y}{x^2}\right)e^{x^2y} \\ \searrow \eta=x\to u_\eta=4\xi\eta^3u\,,\ u=p(\xi)\,e^{\eta^4\xi}=p\left(\frac{y}{x^2}\right)e^{x^2y}\end{array}$



Obviamente ii) es dato sobre característica y el dibujo muestra que para i) no hay tangencia [o bien, $\Delta=0\cdot2y-1\cdot(-2)=2\neq0$], con lo que la solución será única.

$$u(-2,y)=p\left(\tfrac{y}{4}\right)e^{4y}=1\ \to\ p(v)=e^{-16v},\ u(x,y)=e^{-16y/x^2}e^{x^2y}=\boxed{e^{y\left(x^2-\frac{16}{x^2}\right)}}.$$

[Para el dato ii) hay infinitas soluciones, una para cada $p\in C^1$ que cumpla $p(1)=0$].

3. $B^2-4AC=4e^{2x}>0$ hiperbólica. $\frac{dx}{dy}=\pm e^x$, $\pm\int e^{-x}dx=\int dy+K\to y\pm e^{-x}=K$, características.

$$\begin{cases}\xi=y+e^{-x}\\ \eta=y-e^{-x}\end{cases}\to\begin{cases}u_y=u_\xi+u_\eta\\ u_x=e^{-x}[u_\eta-u_\xi]\end{cases},\ \begin{cases}u_{yy}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\\ u_{xx}=e^{-2x}[u_{\xi\xi}-2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}]-e^{-x}[u_\eta-u_\xi]\end{cases}$$

$\to 4u_{\xi\eta}+e^x[u_\eta-u_\xi]=0$. $\xi-\eta=2e^{-x}\to e^x=\frac{2}{\xi-\eta}\ \to\ \boxed{u_{\xi\eta}+\frac{u_\eta-u_\xi}{2(\xi-\eta)}=0}$ (no resoluble).

4. i) $\begin{array}{c}\text{Euler o}\\ y'=v\end{array}$ $y=c_1+\frac{c_2}{x}$, $y'=-\frac{c_2}{x^2}\to\begin{cases}2c_1+c_2=0\\ c_1+\frac{c_2}{2}=0\end{cases}$. El **homogéneo tiene infinitas soluciones** $\left\{1-\frac{2}{x}\right\}$.

ii) En forma S-L: $[x^2y']'=3x^2-4x$. $\int_1^2(3x^2-4x)(1-\frac{2}{x})dx=\int_1^2(3x^2-10x+8)dx=x^3\big]_1^2-5x^2\big]_1^2+8=0$

$\Rightarrow$ el problema **no homogéneo** tiene **infinitas soluciones**.

[Directamente, hallando la solución general de la no homogénea (por 3 caminos posibles distintos):

$y=c_1+\frac{c_2}{x}+\frac{x^2}{2}-2x$, $y'=-\frac{c_2}{x^2}+x-2\ \to\begin{cases}2y(1)+y'(1)=2c_1+2c_2-3-c_2-1=0\\ y(2)=c_1+\frac{c_2}{2}-2=0\end{cases}\ \to c_2=4-2c_1$, c_1 cualquiera].