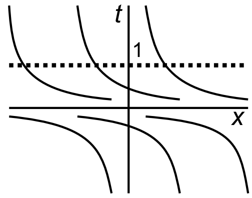
Soluciones del examen de junio de 2011 de Ecuaciones Diferenciales II (grupo residual)

Elegir 5 apartados (de cualquier problema) o problemas que sumen 10 puntos:

1. Sea $t^2u_t - u_x = tu$.
a] Hallar la o las soluciones con $u(x,1)=x$ a partir de las características. [2 puntos]
b] Resolver con $u(x,1)=f(x)$ utilizando la transformada de Fourier. [2 puntos]



a] $\frac{dt}{dx} = -t^2$, $x = \frac{1}{t} + C$ características. $\xi = x - \frac{1}{t}$. Escogiendo además:

$$\eta = t \;\to\; u_\eta = \frac{u}{\eta} \;\to\; u = p(\xi)\,\eta = p\big(x - \tfrac{1}{t}\big)\, t\,.$$

$$\eta = x \;\big[\, t = \tfrac{1}{\eta-\xi}\,\big] \to\; u_\eta = \frac{u}{\xi-\eta} \;\to\; u = \frac{p(\xi)}{\xi-\eta} = p\big(x - \tfrac{1}{t}\big)\, t\,.$$

$$u(x,1) = p(x-1) = x \;\to\; p(v) = v+1\,,\quad \boxed{u(x,t) = tx + t - 1}\,.$$

La solución es única porque la recta en que imponemos los datos no es tangente a las características, como muestra el dibujo o el hecho de que $\Delta = 1\cdot 1 - 0\cdot(-1) \neq 0$.

b] $\begin{cases} t^2\hat{u}_t + ik\hat{u} = t\hat{u} \\ \hat{u}(k,1) = \hat{f}(k) \end{cases} \to\; \hat{u}(k,t) = p(k)\,t\,e^{ik/t} \xrightarrow{c.i.} p(k)\,e^{ik} = \hat{f}(k) \;\to\; \hat{u}(k,t) = \hat{f}(k)\,t\,e^{ik(\frac{1}{t}-1)}$.

Y como $\mathcal{F}^{-1}\big[\hat{f}(k)\,e^{ika}\big] = f(x-a)$, la solución es $\boxed{u(x,t) = t\,f\big(x - \tfrac{1}{t} + 1\big)}$.

[Se llega a lo mismo imponiendo el dato en la solución general dada en **a]**: $p(x-1) = f(x) \to p(v) \overset{\uparrow}{=} f(v+1)$].

2. Sea $\begin{cases} y'' + \lambda y = \operatorname{sen} x \\ y(0) = y'(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$. Precisar, si lo hay, un valor de λ para el que el problema: [2 puntos]
i) tenga solución única, ii) tenga infinitas soluciones, iii) no tenga solución.

Los autovalores y autofunciones del problema homogéneo son $\lambda_n = (2n-1)^2$ e $y_n = \{\operatorname{sen}(2n-1)x\}$, $n = 1,2,\dots$

Para cualquier $\lambda \neq (2n-1)^2$ el homogéneo sólo tiene la solución trivial y el no homogéneo **solución única**.

[Por ejemplo para $\lambda = 0$ la solución es $y = c_1 + c_2 x - \operatorname{sen} x \overset{c.c.}{\to} y = -\operatorname{sen} x$ única solución del problema].

Para $\lambda = (2n-1)^2$ el homogéno tiene infinitas y el no homogéneo tendrá $\begin{matrix}\text{infinitas}\\ \text{ninguna}\end{matrix}$ según sea $\begin{matrix} = 0 \\ \neq 0 \end{matrix}$ la integral $I = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(2n-1)x\,dx$ [la ecuación ya está en forma autoadjunta: $[y']' + \lambda y = \operatorname{sen} x$].

Por tanto, **no hay solución** sólo si $\lambda = 1$ $\Big[\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\,dx \neq 0\Big]$, ya que para los otros autovalores $\lambda = 9, 25, \dots$ la integral es cero [sin calcularla: $\operatorname{sen} x$ es ortogonal a las otras autofunciones] y hay **infinitas soluciones**.

[La integral no es difícil de calcular: $I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\big[\cos 2(n-1)x - \cos 2nx\big]dx \overset{n\neq 1}{=} \frac{\operatorname{sen}(n-1)\pi}{4(n-1)} - \frac{\operatorname{sen} n\pi}{4n} = 0$,
y para $n=1$: $I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\big[1 - \cos 2x\big]dx = \frac{\pi}{4} \neq 0$].

[Por ejemplo, si $\lambda = 9$ la solución de la no homogénea es $y = c_1\cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x + \frac{\operatorname{sen} x}{8} \overset{c.c.}{\to} y = c_2 \operatorname{sen} 3x + \frac{\operatorname{sen} x}{8}$ $\forall c_2$.
En cambio, para $\lambda = 1$, $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x - \frac{x}{2}\cos x \overset{c.c.}{\to} \begin{cases} c_1 = 0 \\ \frac{\pi}{4} - c_1 = 0 \end{cases}$ imposible; no hay solución].

3. Resolver $\begin{cases} u_t - u_{xx} + 2u = 0\,,\ x\in(0,1)\,,\ t>0 \\ u(x,0) = 2\cos^2\frac{\pi x}{4}\,,\ u_x(0,t) = 0\,,\ u(1,t) = e^{-2t} \end{cases}$. [2 puntos]

Una v clara que cumple las condiciones de contorno (y que no estropea la ecuación) es $v = e^{-2t}$.

$$w = u - v \;\to\; \begin{cases} w_t - w_{xx} + 2w = 0\,,\ x\in(0,1)\,,\ t>0 \\ w(x,0) = 2\cos^2\frac{\pi x}{4} - 1 = \cos\frac{\pi x}{2}\,,\ w_x(0,t) = w(1,t) = 0 \end{cases}.\quad w = XT \;\to\; \frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} + 2 = -\lambda$$

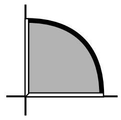
$$\to \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X(1) = 0 \end{cases},\ \lambda_n = \frac{(2n-1)^2\pi^2}{4}\,,\ X_n = \Big\{\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}\Big\}\,,\ \text{y además } T' = -(\lambda+2)T \;\to\; T_n = \Big\{e^{-(\lambda_n+2)t}\Big\}.$$

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(\lambda_n+2)t}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}\,,\quad w(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{(2n-1)\pi x}{2} = \cos\frac{\pi x}{2} \;\to\; c_1 = 1 \text{ y los demás } c_n = 0\,.$$

La solución es, por tanto, $\boxed{u(x,t) = e^{-2t} + e^{-2t}e^{-\pi^2 t/4}\cos\frac{\pi x}{2}}$.

4. Hallar la solución del problema plano $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=r^4\cos 2\theta\,,\ r<1\,,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2} \\ u(1,\theta)=3,\ u_\theta(r,0)=u_\theta(r,\frac{\pi}{2})=0 \end{cases}$. [2 puntos]

Las autofunciones del homogéneo las da $\begin{cases}\Theta''+\lambda\Theta=0\\ \Theta'(0)=\Theta'(\frac{\pi}{2})=0\end{cases}$, $\lambda_n=4n^2\,,\ \Theta_n=\{\cos 2n\theta\}\,,$ $n=0,1,2,\dots$



Probamos, pues, en la ecuación: $u(r,\theta)=R_0(r)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}R_n(r)\cos 2n\theta\ \rightarrow$

$R_0''+\frac{1}{r}R_0'+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\big[R_n''+\frac{1}{r}R_n'-\frac{4n^2}{r^2}R_n\big]\cos 2n\theta=r^4\cos 2\theta$. Y del dato inicial: $R_0(0)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}R_n(0)\cos 2n\theta=3$.

Los únicos R_n no nulos (para los demás el término no homogéneo y los datos son cero) son las soluciones de:

$\begin{cases} rR_0''+R_0'=0 \\ \text{acot. en } 0,\, R_0(1)=3\end{cases} \rightarrow R_0=3$ y $\begin{cases} r^2R_1''+rR_1'-4R_1=r^6 \\ \text{acot. en } 0,\, R_1(1)=0\end{cases} \rightarrow R_1=c_1r^2+c_2r^{-2}+\frac{1}{32}r^6 \overset{c.c.}{\rightarrow} R_1=\frac{1}{32}(r^6-r^2)$.

Para hallar la R_{1p} anterior lo más corto es probar $Ar^6 \rightarrow 30A+6A-4A=1$ $[\,h(\mathrm{e}^s)=\mathrm{e}^{6s}$ y 6 no autovalor$]$.

$\Big[$Más largo con la fvc: $\begin{vmatrix} r^2 & r^{-2} \\ 2r & -2r^{-3}\end{vmatrix}=-\frac{4}{r}$, $R_{1p}=r^{-2}\int\frac{r^2r^4}{-4/r}-r^2\int\frac{r^{-2}r^4}{-4/r}=-\frac{r^6}{32}+\frac{r^6}{16}=\frac{r^6}{32}\Big]$.

La solución es, pues, $\boxed{u(r,\theta)=3+\frac{1}{32}(r^6-r^2)\cos 2\theta}$.

5. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\in[0,3]\,,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=3x-x^2 \\ u(0,t)=u(3,t)=0 \end{cases}$.

a] Hallar $u(1,2)$ utilizando la fórmula de D'Alembert. [2 puntos]

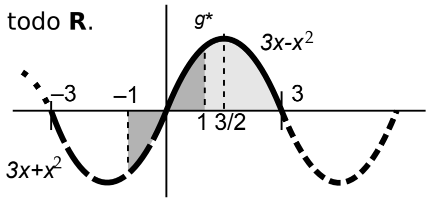
b] Resolver por separación de variables y aproximar $u(1,2)$ con el primer término de la serie solución. [2 puntos]

a] Para aplicar D'Alembert extendemos g de forma impar y 6-periódica a todo $\mathbf{R}$.

La solución viene dada entonces por $u(x,t)=\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}g^*(s)\,ds$.

En particular: $u(1,2)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{3}g^* \underset{g^*\text{ impar}}{=} \frac{1}{2}\int_1^3(3s-s^2)\,ds=\boxed{\frac{5}{3}}\approx 1.667$.

[No hemos necesitado utilizar la expresión de g^* en $[-3,0]$].



b] $\begin{cases}X''+\lambda X=0\\ X(0)=X(3)=0\end{cases}$, $\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{9}$, $X_n=\left\{\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{3}\right\}$, $n=1,2,\dots$; $T''+\lambda_nT=0$, $T(0)=0 \rightarrow T_n=\left\{\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{3}\right\}$.

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{3}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{3}\,,\ u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{3}c_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{3}=3x-x^2\ \rightarrow$$

$$\frac{n\pi}{3}c_n=\frac{2}{3}\int_0^3(3x-x^2)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{3}\,dx=-\frac{2}{n\pi}(3x-x^2)\cos\frac{n\pi x}{3}\Big]_0^3+\frac{2}{n\pi}\int_0^3(3-2x)\cos\frac{n\pi x}{3}\,dx$$

$$=0+\frac{6}{n^2\pi^2}(3-2x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{3}\Big]_0^3+\frac{12}{n^2\pi^2}\int_0^3\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{3}\,dx=0+\frac{36}{n^3\pi^3}\big[1-\cos n\pi\big].$$

Por tanto, $\boxed{u(x,t)=\frac{216}{\pi^4}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^4}\operatorname{sen}\frac{(2m-1)\pi t}{3}\operatorname{sen}\frac{(2m-1)\pi x}{3}}$.

Aproximando con el primer término: $u(1,2)\approx\frac{216}{\pi^4}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}=\frac{216}{\pi^4}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{162}{\pi^4}\approx 1.663$ [ya bastante parecido al valor exacto 5/3].

Soluciones del examen de septiembre de 2011 de Ecuaciones Diferenciales II (grupo r)

Elegir 4 apartados o problemas que sumen 10 puntos.

1. Resolver $\begin{cases} u_{tt}+u_{tx}-2u_{xx}=0 \\ u(x,0)=f(x),\, u_t(x,0)=0 \end{cases}$. **a]** A partir de las características. [2.5 puntos] **b]** Utilizando la transformada de Fourier. [2.5 puntos]

a] $B^2-4AC=9$ hiperbólica de coeficientes constantes $\begin{cases} \xi=x+t \\ \eta=x-2t \end{cases}$ $\begin{cases} u_{xx}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta} \\ u_{xt}=u_{\xi\xi}-u_{\xi\eta}-2u_{\eta\eta} \\ u_{tt}=u_{\xi\xi}-4u_{\xi\eta}+4u_{\eta\eta} \end{cases} \to u_{\xi\eta}=0 \to u=p(\xi)+q(\eta)=p(x+t)+q(x-2t)$.

$$\begin{cases} u(x,0)=p(x)+q(x)=f(x) \\ u_t(x,0)=p'(x)-2q'(x)=0,\ p(x)=2q(x)+C \end{cases} \quad q(x)=\tfrac{1}{3}f(x)-\tfrac{C}{3} \downarrow \ p(x)=\tfrac{2}{3}f(x)+\tfrac{C}{3} \ \to \ \boxed{u(x,t)=\tfrac{2}{3}f(x+t)+\tfrac{1}{3}f(x-2t)}\,.$$

b] $\begin{cases} \hat{u}_{tt}-ik\hat{u}_t+2k^2\hat{u}=0 \\ \hat{u}(k,0)=\hat{f}(k),\, \hat{u}_t(k,0)=0 \end{cases}$ $\mu^2-ik\mu+2k^2=0 \to \mu=2ik,-ik$ $\to \hat{u}(k,t)=p(k)\,e^{2ikt}+q(k)\,e^{-ikt} \xrightarrow{c.i.} \begin{matrix} p(k)=\frac{1}{3}\hat{f}(k) \\ q(k)=\frac{2}{3}\hat{f}(k) \end{matrix} \to$

$\hat{u}(k,t)=\frac{2}{3}\hat{f}(k)\,e^{-ikt}+\frac{1}{3}\hat{f}(k)\,e^{2ikt}$. Como $\mathcal{F}^{-1}\big[\hat{f}(k)\,e^{ika}\big]=f(x-a)$, es $\boxed{u(x,t)=\frac{2}{3}f(x+t)+\frac{1}{3}f(x-2t)}$.

2. Precisar cuántas soluciones tiene el problema $\begin{cases} y''+y'=f(x) \\ y'(0)=y'(1)=0 \end{cases}$, para i) $f(x)=0$ ii) $f(x)=2x-1$ [2.5 puntos]

i) $y=c_1+c_2e^{-x}$, $y'=-c_2e^{-x} \to \begin{cases} -c_2=0 \\ -c_1+c_2e^{-1}=0 \end{cases}$. El homogéneo tiene **infinitas soluciones** $\{1\}$.

ii) En forma S-L: $\big[e^xy'\big]'=e^x(2x-1)$. $\int_0^1 e^x(2x-1)\,dx=e^x(2x-3)\big]_0^1=3-e\neq 0$

$\Rightarrow$ el problema no homogéneo **no tiene solución**.

[Directamente, hallando la solución general de la no homogénea (mejor usando coeficientes indeterminados):

$y=c_1+c_2e^{-x}+x^2-3x$, $y'=-c_2e^{-x}+2x-3 \to \begin{cases} y'(0)=-c_2-3=0, & c_2=-3 \\ y'(1)=-c_2e^{-1}-1=0, & c_2=-e \end{cases}$, imposible].

3. Resolver por separación de variables $\begin{cases} u_t-(2+\cos t)\,u_{xx}=0,\ x\in(0,\frac{\pi}{2}),\ t>0 \\ u(x,0)=1,\ u_x(0,t)=u(\frac{\pi}{2},t)=0 \end{cases}$. [2.5 puntos]

Como la ecuación es desconocida debemos empezar separando variables: $u=XT \to$

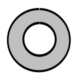
$$\frac{X''}{X}=\frac{T'}{(2+\cos t)T}=-\lambda \to \begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X'(0)=X(\frac{\pi}{2})=0 \end{cases},\ X_n=\big\{\cos(2n-1)x\big\};\ T'+\lambda(2+\cos t)T=0 \to T_n=\big\{e^{-\lambda(2t+\operatorname{sen}t)}\big\}.$$

Probamos: $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\,e^{-\lambda_n(2t+\operatorname{sen}t)}\cos(2n-1)x \ \to \ w(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos(2n-1)x=1 \to$

$$c_n=\frac{2}{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\cos(2n-1)x=\frac{4\operatorname{sen}(2n-1)\frac{\pi}{2}}{\pi(2n-1)} \ \to \ \boxed{u(x,t)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\,e^{-(2n-1)^2(2t+\operatorname{sen}t)}\cos(2n-1)x}\,.$$

4. Resolver por separación de variables $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0,\ 1<r<2 \\ u(1,\theta)=0,\ u(2,\theta)=1+\operatorname{sen}\theta \end{cases}$. [2.5 puntos]

Sabemos que al separar variables: $\begin{cases} \Theta''+\lambda\Theta=0 \\ \Theta\ 2\pi\text{-per.} \end{cases} \to \lambda_n=n^2,\ \Theta_n=\{\cos n\theta,\operatorname{sen}n\theta\} \to$ $n=0,1,2,\dots$



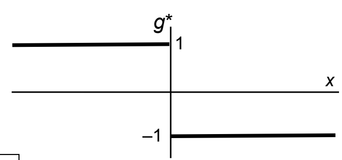
$$r^2R''+rR'-n^2R=0 \to \begin{matrix} R_0=c_1+c_2\ln r \xrightarrow[R(1)=0]{} R_0=\{\ln r\} \\ R_n=c_1r^n+c_2r^{-n} \longrightarrow R_n=\{r^n-r^{-n}\} \end{matrix} \to u=a_0\ln r+\sum_{n=1}^{\infty}(r^n-r^{-n})[a_n\cos n\theta+b_n\operatorname{sen}n\theta]$$

$$u(2,\theta)=a_0\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}(2^n-2^{-n})[a_n\cos n\theta+b_n\operatorname{sen}n\theta]=1+\operatorname{sen}\theta \to a_0=\frac{1}{\ln 2},\ (2-\tfrac{1}{2})b_1=1$$

y los demás son cero $\to \boxed{u(r,\theta)=\frac{\ln r}{\ln 2}+\frac{2}{3}(r-r^{-1})\operatorname{sen}\theta}$.

5. Sea $\begin{cases} u_{tt}-4u_{xx}=0,\ x\geq 0,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0,\ u(0,t)=t \end{cases}$. Hallar $u(2,4)$. [2.5 puntos]

5. Una v clara que cumple la condición de contorno es $v=t$.



$w=u-v \to \begin{cases} w_{tt}-w_{xx}=0,\ x\geq 0 \\ w(x,0)=0,\ w_t(x,0)=-1,\ w(0,t)=0 \end{cases}$. Extendiendo impar:

$\begin{cases} w_{tt}-w_{xx}=0,\ x\in\mathbf{R} \\ w(x,0)=0,\ w_t(x,0)=\begin{cases} 1, & x>0 \\ -1, & x<0 \end{cases} \end{cases} \to w(2,4)=\frac{1}{4}\int_{-6}^{10}g^*=-1 \to \boxed{u(2,4)=3}$.

Soluciones del examen de septiembre (adelantado a julio) de 2011 de EDII (grupo r)

1. Resolver $\begin{cases} u_{tt}-6u_{tx}+9u_{xx}=0 \\ u(x,0)=f(x),\, u_t(x,0)=0 \end{cases}$. **a]** A partir de las características. [2.5 puntos] **b]** Utilizando la transformada de Fourier. [2.5 puntos]

a] $B^2-4AC=0$ parabólica de coeficientes constantes $\begin{cases} \xi=x+3t \\ \eta=t \end{cases}$ $\begin{cases} u_{xx}=u_{\xi\xi} \\ u_{xt}=3u_{\xi\xi}+u_{\xi\eta} \\ u_{tt}=9u_{\xi\xi}+6u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta} \end{cases}$ $\to u_{\eta\eta}=0 \to u=p(\xi)+\eta q(\xi)=p(x+3t)+t\,q(x+3t)$.

$\begin{cases} u(x,0)=p(x)=f(x) \\ u_t(x,0)=3p'(x)+q(x)=0\,,\ q(x)=-3f'(x) \end{cases} \to \boxed{u(x,t)=f(x+3t)-3tf'(x+3t)}$.

b] $\begin{cases} \hat{u}_{tt}+6ik\hat{u}_t-9k^2\hat{u}=0 \\ \hat{u}(k,0)=\hat{f}(k),\, \hat{u}_t(k,0)=0 \end{cases}$ $\begin{matrix} \mu^2+6ik\mu-9k^2=0 \\ \to \mu=-3ik \text{ doble} \end{matrix}$ $\to \hat{u}(k,t)=\left[p(k)+t\,q(k)\right]\mathrm{e}^{-3ikt} \xrightarrow{c.i.} \begin{matrix} p(k)=\hat{f}(k) \\ q(k)=3ik\hat{f}(k) \end{matrix} \to$

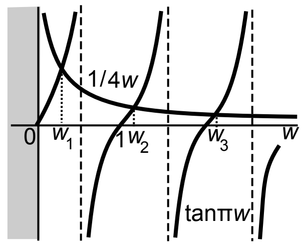
$\hat{u}(k,t)=\hat{f}(k)\,\mathrm{e}^{-3ikt}+3t\,ik\hat{f}(k)\,\mathrm{e}^{-3ikt}$. Como $\begin{matrix} \mathcal{F}^{-1}\left[ik\hat{f}(k)\right]=-f(x) \\ \mathcal{F}^{-1}\left[\hat{f}(k)\,\mathrm{e}^{ika}\right]=f(x-a) \end{matrix}$ es $\boxed{u(x,t)=f(x+3t)-3tf'(x+3t)}$.

2. Sea $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y'(0)=y(\pi)+4y'(\pi)=0 \end{cases}$. Hallar autovalores y autofunciones [λ_1 e y_1 son calculables exactamente]. Calcular el primer término del desarrollo en serie de $f(x)=1$ en las autofunciones anteriores. [2.5 puntos]

Ya en forma autoadjunta: $(y')'+\lambda y=0$. Como $\alpha\alpha'=0$, $\beta\beta'>0$, $q\equiv 0$, sólo puede haber $\lambda\geq 0$.

$\lambda=0$: $y=c_1+c_2x \to \left.\begin{matrix} y'(0)=c_2=0 \\ y(\pi)+4y'(\pi)=c_1+(\pi+4)c_2=0 \end{matrix}\right\} \to c_1=c_2=0$, $y\equiv 0$, $\lambda=0$ no autovalor.

$\lambda>0$: $y=c_1\cos wx+c_2\operatorname{sen} wx$. $y'(0)=wc_2=0 \to y(\pi)+4y'(\pi)=c_1[\cos w\pi-4w\operatorname{sen} w\pi]=0$.



No podemos dar exactamente todos los λ_n, pero $\tan\pi w_n=\frac{1}{4w_n}$ lo cumplen infinitos w_n como muestra el dibujo. Para cada $\lambda_n=w_n^2$ es $y_n=\{\cos w_nx\}$.

Son calculables λ_1 e y_1: si $w_1=\frac{1}{4}$ $\left[\lambda_1=\frac{1}{16}\right]$ es $\tan\frac{\pi}{4}=1$. $y_1=\{\cos\frac{x}{4}\}$.

Como $\langle y_1,y_1\rangle=\int_0^\pi \cos^2\frac{x}{4}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^\pi\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)dx=\frac{\pi}{2}+\left[\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right]_0^\pi=\frac{\pi}{2}+1$,

$\langle 1,y_1\rangle=\int_0^\pi\cos\frac{x}{4}\,dx=\left[4\operatorname{sen}\frac{x}{4}\right]_0^\pi=2\sqrt{2} \Rightarrow 1=\sum_{n=1}^\infty c_ny_n(x)=\boxed{\frac{4\sqrt{2}}{\pi+2}\cos\frac{x}{4}+\cdots}$

3. Resolver por separación de variables $\begin{cases} u_t-u_{xx}=\operatorname{sen} t\,,\ x\in(0,\pi)\,,\ t>0 \\ u(x,0)=\operatorname{sen}^2x\,,\ u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=0 \end{cases}$. [2.5 puntos]

Separando variables en la ecuación homogénea: $\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X'(0)=X'(\pi)=0 \end{cases} \to X_n=\{\cos nx\}$, $n=0,1,2,\cdots$

Probamos: $u=T_0(t)+\sum_{n=1}^\infty T_n(t)\cos nx \to \sum_{n=1}^\infty\left[T_n'+n^2T_n\right]\cos nx=\underset{\text{(ya desarrollada)}}{\operatorname{sen} t}$, $T_0(0)+\sum_{n=1}^\infty T_n(0)\cos nx=\frac{1}{2}-\frac{\cos 2x}{2}$.

$\Rightarrow \begin{cases} T_0'=\operatorname{sen} t \\ T_0(0)=1/2 \end{cases}, \begin{cases} T_2'+4T_2=0 \\ T_2(0)=-1/2 \end{cases}$ (y los demás $T_n\equiv 0$) $\Rightarrow \boxed{u=\frac{3}{2}-\cos t-\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-4t}\cos 2x}$.

4. Resolver por separación de variables $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0\,,\ r<1\,,\ 0<\theta<\pi \\ u_r(1,\theta)=\theta,\ u(r,0)=u_\theta(r,\pi)=0 \end{cases}$. [2.5 puntos]

Sabemos que al separar variables: $\begin{cases} \Theta''+\lambda\Theta=0 \\ \Theta(0)=\Theta'(\pi)=0 \end{cases} \to \lambda_n=\frac{(2n-1)^2}{4}$, $\Theta_n=\left\{\operatorname{sen}\frac{2n-1}{2}\theta\right\}$, $n=1,2,\ldots \to$

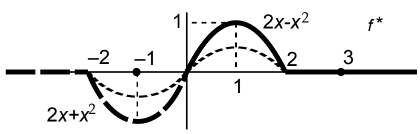
$r^2R''+rR-\lambda_nR=0 \to R=c_1r^{n-\frac{1}{2}}+c_2r^{-n+\frac{1}{2}} \xrightarrow{R \text{ acotada en } 0} R_n=\left\{r^{n-\frac{1}{2}}\right\} \to u(r,\theta)=\sum_{n=1}^\infty c_n\,r^{n-\frac{1}{2}}\operatorname{sen}\frac{2n-1}{2}\theta \xrightarrow{u_r(r,1)=\theta}$

$\sum_{n=1}^\infty c_n\frac{2n-1}{2}\operatorname{sen}\frac{2n-1}{2}\theta=\theta \to c_n=\frac{2}{2n-1}\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\theta\operatorname{sen}\frac{2n-1}{2}\theta\,d\theta=-\frac{8\theta}{\pi(2n-1)^2}\cos\frac{2n-1}{2}\theta\Big]_0^\pi+\frac{8}{\pi(2n-1)^2}\int_0^\pi\cos\frac{2n-1}{2}\theta\,d\theta$

$\to \boxed{u=\frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^\infty\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}\,r^{n-\frac{1}{2}}\operatorname{sen}\frac{2n-1}{2}\theta}$.

5. Sea $\begin{cases} u_{tt}-4u_{xx}=0\,,\ x\geq 0, t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=\begin{cases} 2x-x^2,\ x\in[0,2] \\ 0\ ,\ x\in[2,\infty) \end{cases},\ u_t(x,0)=u(0,t)=0 \end{cases}$. i) Hallar $u(1,1)$. ii) Dibujar $u(x,1)$. [2.5 puntos]

Para usar D'Alembert hay que extender impar a todo **R**:



$u(1,1)=\frac{1}{2}\left[f^*(3)+f^*(-1)\right]=\frac{1}{2}\left[f(3)-f(1)\right]=\boxed{-\frac{1}{2}}$.

$u(x,1)=\frac{1}{2}\left[f^*(x+2)+f^*(x-2)\right]$. Basta trasladar la gráfica de $\frac{1}{2}f^*$ a izquierda y derecha y sumar.