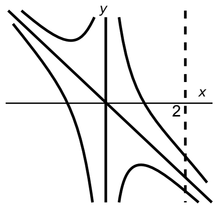
Soluciones del examen de junio de 2013 de Ecuaciones Diferenciales II (residual)

1. Resolver $(2x+y)u_y-xu_x=yu$ con el dato $u(2,y)=e^{3y}$. [2.5 puntos]

$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}-2\xrightarrow{\text{lineal}} y=\frac{C}{x}-\frac{1}{x}\int 2x\,dx=\frac{C}{x}-x$, $x(y+x)=C$ características.



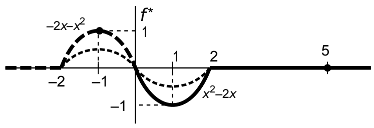
$$\begin{cases}\xi=xy+x^2\\ \eta=x\ \text{[mejor]}\end{cases}\to u_\eta=-\frac{y}{x}u=\big(1-\frac{\xi}{\eta^2}\big)u\to u=p(\xi)\,e^{\eta+\frac{\xi}{\eta}}=p(xy+x^2)\,e^{2x+y}.$$

$$u(2,y)=p(2y+4)\,e^{4+y}=e^{3y}\to p(v)=e^{v-8},\ \boxed{u(x,y)=e^{x^2+xy+2x+y-8}}.$$

Solución única pues $x=2$ no es tangente a las características. $\Delta=0\cdot(4+y)-1\cdot 2=-2\neq 0$.

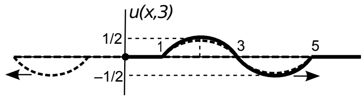
2. Sea $\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=0,\ x\geq 0,\ t\in\mathbf{R}\\ u(x,0)=\begin{cases}x^2-2x,\ x\in[0,2]\\ 0,\ x\in[2,\infty)\end{cases}\\ u_t(x,0)=0,\ u(0,t)=0\end{cases}$. **a]** Dibujar la extensión f^* y dar su expresión. **b]** Hallar $u(2,3)$. **c]** Dibujar $u(x,3)$. [2.5 puntos]

a] En $[-2,0]$ la expresión de f^* será: $-\big[(-x)^2-2(-x)\big]$ y por tanto:



$$f^*(x)=\begin{cases}-x^2-2x\ \text{ si } x\in[-2,0]\\ x^2-2x\ \text{ si } x\in[0,2]\\ 0\ \text{ en el resto de } \mathbf{R}\end{cases}.\quad \text{Y es: } u(x,t)=\tfrac{1}{2}\big[f^*(x-t)+f^*(x+t)\big].$$

b] $u(2,3)=\frac{1}{2}\big[f^*(-1)+f^*(5)\big]\overset{f^*\text{ impar}}{=}-\frac{1}{2}f(1)=\boxed{\frac{1}{2}}$.



c] Basta trasladar 3 unidades a izquierda y derecha $\frac{1}{2}f^*$ y sumar.

3. Utilizando la transformada de Fourier, resolver: $\begin{cases}u_{tt}-9u_{xx}=0,\ x\in\mathbf{R},\ t\in\mathbf{R}\\ u(x,1)=2e^{-2x^2},\ u_t(x,1)=0\end{cases}$. [2.5 puntos]

$$\begin{cases}\hat u_{tt}+9k^2\hat u=0\\ \hat u(k,0)=e^{-k^2/8},\ \hat u_t(k,0)=0\end{cases}\xrightarrow{\mu=\pm 3ki}\hat u(k,t)=p(k)\,e^{3kit}+q(k)\,e^{-3kit}\xrightarrow{c.i.}\begin{array}{l}p(k)\,e^{3ki}+q(k)\,e^{-3ki}=e^{-k^2/8}\\ 3ki\big[p(k)\,e^{3ki}-q(k)\,e^{-3ki}\big]=0\end{array}$$

$\to q(k)=p(k)\,e^{6ki}$, $p(k)=\frac{1}{2}e^{-k^2/8-3ki}$, $q(k)=\frac{1}{2}e^{-k^2/8+3ki}$, $\hat u(k,t)=\frac{1}{2}e^{-k^2/8}\,e^{ik(3t-3)}+\frac{1}{2}e^{-k^2/8}\,e^{ik(3-3t)}$.

Como $\mathcal{F}^{-1}\big[\frac{1}{2}e^{-k^2/8}\big]=e^{-2x^2}$ y $\mathcal{F}^{-1}\big[\hat f(k)\,e^{ika}\big]=f(x-a)$, es $u(x,t)=e^{-2(x-3t+3)^2}+e^{-2(x+3t-3)^2}$.

4. Sea (P) $\begin{cases}y''+2y'+\lambda y=0\\ y(0)=y(\pi)=0\end{cases}$. **a]** Escribir la ecuación en forma autoadjunta y hallar el peso. **b]** Precisar si $\lambda=-3$ y $\lambda=2$, son o no autovalores de (P). [2.5 puntos]
c] Precisar cuántas soluciones tiene $y''+2y'+\lambda y=e^{-x}$ con esos datos de contorno para $\lambda=-3$ y $\lambda=2$.

a] En forma autoadjunta: $\big(e^{2x}y'\big)'+\lambda\,e^{2x}y=0\Rightarrow$ el **peso** es $r(x)=e^{2x}$. Es un problema separado y regular.

b] $\alpha\alpha'=\beta\beta'=0$, $q\equiv 0\Rightarrow\lambda\geq 0$, con lo que $\lambda=-3$ **no es autovalor** $\big[$fácil de ver a partir de $y=c_1e^{x}+c_2\,e^{-3x}\big]$.

Si $\lambda=2$ es $\mu=-1\pm i$, $y=\big(c_1\cos x+c_2\,\mathrm{sen}\,x\big)e^{-x}\to\begin{array}{c}c_1=0\\ -c_1e^{-\pi}=0\end{array}\Rightarrow\lambda=2$ **autovalor** $\big(y=\{e^{-x}\,\mathrm{sen}\,x\}$ autofunción$\big)$.

c] Como para $\lambda=-3$ el homogéneo tiene sólo la solución trivial, el no homogéneo tendrá **solución única**.
Si $\lambda=2$ tendrá infinitas o ninguna, $f(x)=e^{x}$, $\int_0^\pi e^{x}\,e^{-x}\,\mathrm{sen}\,x\,dx=-\cos x\big]_0^\pi=2\neq 0$. **Ninguna solución**.

5. Resolver por separación de variables: $\begin{cases}u_t-4u_{xx}=0,\ x\in(0,1),\ t>0\\ u(x,0)=x,\ u(0,t)=u_x(1,t)=0\end{cases}$. [2.5 puntos]

$w=XT\to\begin{cases}X''+\lambda X=0\\ X(0)=X'(1)=0\end{cases}$, $\lambda_n=\frac{(2n-1)^2\pi^2}{2^2}$, $X_n=\big\{\mathrm{sen}\,\frac{(2n-1)\pi x}{2}\big\}$; $T'+4\lambda T=0$, $T_n=\big\{e^{-(2n-1)^2\pi^2t/4}\big\}$, $n=1,2,\dots$

Imponemos a $u(x,t)=\sum_{n=1}^\infty c_ne^{-(2n-1)^2\pi^2t}\,\mathrm{sen}\,\frac{(2n-1)\pi x}{2}$ el dato inicial $u(x,0)=\sum_{n=1}^\infty c_n\,\mathrm{sen}\,\frac{(2n-1)\pi x}{2}=x\to$

$$c_n=\frac{2}{1}\int_0^1 x\,\mathrm{sen}\,\frac{(2n-1)\pi x}{2}\,dx=\frac{4}{\pi^2(2n-1)^2}\,\mathrm{sen}\,\frac{(2n-1)\pi}{2}.\quad u(x,t)=\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^\infty\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}\,e^{-(2n-1)^2\pi^2t}\,\mathrm{sen}\,\frac{(2n-1)\pi x}{2}.$$

6. Resolver el problema en el plano $\begin{cases}\Delta u=\mathrm{sen}\,4\theta,\ \theta\in\big(0,\frac{\pi}{2}\big),\ r<1\\ u(1,\theta)=u(r,0)=u\big(r,\frac{\pi}{2}\big)=0\end{cases}$. [2.5 puntos]

Autofunciones del homogéneo: $\begin{cases}\Theta''+\lambda\Theta=0\\ \Theta(0)=\Theta(\pi/2)=0\end{cases}\to\lambda_n=4n^2$, $\Theta_n=\{\mathrm{sen}\,2n\theta\}$, $n=1,2,\dots$ $\sum_{n=1}^\infty R_n(r)\,\mathrm{sen}\,2n\theta\to$

$\sum_{n=1}^\infty\Big[R_n''+\frac{R_n'}{r}-\frac{4n^2R_n}{r^2}\Big]\mathrm{sen}\,2n\theta=\mathrm{sen}\,4\theta$, ya desarrollada. $u(1,\theta)=\sum_{n=1}^\infty R_n(1)\,\mathrm{sen}\,2n\theta=0\Rightarrow R_n(1)=0$.

Además u debe estar acotada en $r=0$. El único $R_n\not\equiv 0$ saldrá de resolver el problema: $\begin{cases}r^2R_2''+rR_2'-16R_2=r^2\\ R_2\ \text{acotada},\ R_2(1)=0\end{cases}$.

Solución de la homogénea: $c_1r^4+c_2r^{-4}$. Para hallar la R_{2p}:

$$|W|=\begin{vmatrix}r^4 & r^{-4}\\ 4r^3 & -4r^{-5}\end{vmatrix}=-\frac{8}{r},\ R_{2p}=r^{-4}\int\frac{r^4\cdot 1}{-8/r}\,dr-r^4\int\frac{r^{-4}\cdot 1}{-8/r}\,dr=\frac{1}{12}r^2\quad\text{o}\quad R_{2p}=Ar^2\to -12Ar^2=r^2,\ R_{2p}=-\frac{1}{12}r^2.$$

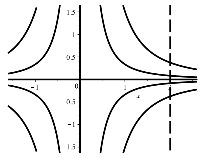
Imponiendo las condiciones de contorno a $R_2=c_1r^4+c_2r^{-4}-\frac{1}{4}r^2$ deducimos que $u(r,\theta)=\frac{1}{12}(r^4-r^2)\,\mathrm{sen}\,4\theta$.

Soluciones del examen de septiembre de 2013 de Ecuaciones Diferenciales II (residual)

1. Sea $2yu_y - xu_x = 2xy$. Hallar su solución general y la que satisface el dato inicial $u(2,y)=0$. [2 puntos]

$\frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{x} \xrightarrow{\text{lineal}} y = \frac{C}{x^2}$, $x^2y=C$ características. $\begin{cases} \xi=x^2y \\ \eta=y \end{cases} \to u_\eta = x = \frac{\xi^{1/2}}{\eta^{1/2}} \to u = 2\xi^{1/2}\eta^{1/2} + p(\xi) = 2xy + p(x^2y)$.

$\begin{cases} \xi=x^2y \\ \eta=x \text{ [sale más sencillo]} \end{cases} \to u_\eta = -2y = -2\frac{\xi}{\eta^2} \to u = \frac{2\xi}{\eta} + p(\xi) = 2xy + p(x^2y)$.

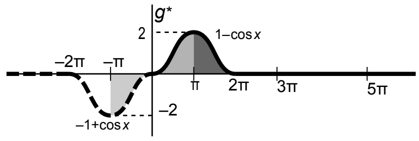


$u(2,y) = 4y + p(4y) = 0 \to p(v) = -v$, $\boxed{u(x,y) = 2xy - x^2y}$.

$\big[$Solución única pues $x=2$ no es tangente a las características. $\Delta = 0\cdot 2y - 1\cdot(-2) = 2 \neq 0 \big]$.

2. Sea $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, \ x\geq 0, t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=0, u_t(x,0) = \begin{cases} 1-\cos x, \ x\in[0,2\pi] \\ 0, \ x\in[2\pi,\infty) \end{cases} \\ u(0,t)=0 \end{cases}$. **a]** Dibujar la extensión g^* y dar su expresión. **b]** Hallar $u(\pi,2\pi)$ con la fórmula de D'Alembert. [2 puntos]

a] En $[-2\pi,0]$ la expresión de g^* es: $-\big[1-\cos(-x)\big]$ y por tanto:



$g^*(x) = \begin{cases} \cos x - 1 \ \text{ si } x\in[-2\pi,0] \\ 1-\cos x \ \text{ si } x\in[0,2\pi] \\ 0 \ \text{ en el resto de } \mathbf{R} \end{cases}$. Entonces: $u(x,t) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g^*(s)\,ds$.

b] $u(\pi,2\pi) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{3\pi} g^* = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{0}(-1+\cos s)\,ds + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos s)\,ds \overset{g^* \text{ impar}}{=} \frac{1}{2}\int_\pi^{2\pi}(1-\cos s)\,ds = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\big[\operatorname{sen} s\big]_\pi^{2\pi} = \boxed{\frac{\pi}{2}}$.

3. Utilizando la transformada de Fourier, resolver: $\begin{cases} u_t - u_{xx} + 9u = 0, \ x\in\mathbf{R}, \ t>0 \\ u(x,1) = e^{-x^2/2}, \ u \text{ acotada} \end{cases}$. [2 puntos]

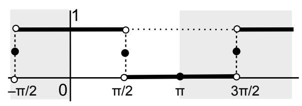
$\begin{cases} \hat{u}_t + k^2\hat{u} + 9\hat{u} = 0 \\ \hat{u}(k,1) = e^{-k^2/2} \end{cases} \to \hat{u}(k,t) = p(k)\,e^{-k^2t-9t} \xrightarrow{c.i.} \hat{u}(k,t) = e^{9-9t}\,e^{-k^2(t-1/2)} \longrightarrow \boxed{u(x,t) = \frac{e^{9-9t}}{\sqrt{2t-1}}\,e^{-x^2/(4t-2)}}$.

pues $\mathcal{F}^{-1}\big[e^{-ak^2}\big] = \frac{1}{\sqrt{2a}}\,e^{-x^2/4a} \nearrow$

4. Desarrollar $f(x) = \begin{cases} 1, \ x\in\big[0,\frac{\pi}{2}\big] \\ 0, \ x\in\big(\frac{\pi}{2},\pi\big] \end{cases}$ en serie de las autofunciones $\{\cos nx\}$, $n=0,1,\dots$ de $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = y'(\pi) = 0 \end{cases}$.

¿Cuál debe ser el valor de la suma de la serie anterior para $x=\frac{\pi}{2}$ y para $x=\pi$? [2 puntos]

$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \to a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\,dx$. $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}dx = 1$, $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos nx\,dx = \frac{2}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} \to$



$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{2m-1}\cos(2m-1)x$. En $x=\frac{\pi}{2}$ su suma será $\frac{1}{2}[1+0] = \frac{1}{2}$.

En $x=\pi$ la suma es 0 por tender hacia la extensión par y 2π-periódica de f .

5. Resolver el problema en el plano $\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, \ r<2, \ 0<\theta<\pi \\ u_r(2,\theta) = \operatorname{sen}3\theta, \ u(r,0) = u(r,\pi) = 0 \end{cases}$. [2 puntos]

Separando variables $u=R\Theta$: $\begin{cases} \Theta''+\lambda\Theta=0 \\ \Theta(0)=\Theta(\pi)=0 \end{cases} \to \lambda_n = n^2, \ \Theta_n = \big\{\operatorname{sen} n\theta\big\}$, $n=1,2,\dots$

Y además: $r^2R'' + rR' - \lambda R = 0 \xrightarrow{\lambda=n^2} R = c_1r^n + c_2r^{-n} \xrightarrow{R \text{ acotada}} R_n = \big\{r^n\big\}$, $n=1,2,\dots$ $\to u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n r^n \operatorname{sen} n\theta$

$\to u_r(2,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n2^{n-1}b_n\operatorname{sen} n\theta = \operatorname{sen}3\theta$, ya desarrollada. $3\cdot 2^2 b_3 = 1$, $\boxed{u(r,\theta) = \frac{1}{12}r^3\operatorname{sen}3\theta}$.

6. a] Calcular con detalle los autovalores λ_n y las autofunciones $\{X_n\}$ de $\begin{cases} X''+\lambda X = 0 \\ X(0) = X'\big(\frac{1}{2}\big) = 0 \end{cases}$ [debe salir lo del formulario].

b] Resolver $\begin{cases} u_t - \frac{2}{\pi^2 t}u_{xx} = 3\operatorname{sen}\pi x, \ x\in\big(0,\frac{1}{2}\big), \ t>1 \\ u(x,1) = u(0,t) = u_x\big(\frac{1}{2},t\big) = 0 \end{cases}$. [Probar una serie con las autofunciones del homogéneo y determinar las $T_n(t)$]. [4 puntos]

a] Como $\alpha\alpha' = \beta\beta' = 0$, $q\equiv 0$, sólo hay $\lambda\geq 0$. $\lambda=0$: $X = c_1 + c_2x \to \left.\begin{array}{l} X(0) = c_1 = 0 \\ X'(1/2) = c_2 = 0 \end{array}\right\} \to \lambda=0$ no es autovalor.

$\lambda>0$: $X = c_1\cos wx + c_2\operatorname{sen} wx$, $X' = -wc_1\operatorname{sen} wx + wc_2\cos wx$. $X(0)=0 \to c_1=0 \to X'\big(\frac{1}{2}\big) = wc_2\cos\frac{w}{2} = 0$

$\to w_n = (2n-1)\pi$, $\boxed{\lambda_n = (2n-1)^2\pi^2 , \ X_n = \big\{\operatorname{sen}(2n-1)\pi x\big\}, \ n=1,2,\dots}$ (como en formulario).

b] Haciendo $u=XT$ en la homogénea: $\frac{X''}{X} = \frac{\pi^2 tT'}{2T} = -\lambda \to \begin{cases} X''+\lambda X = 0 \\ X(0) = X'\big(\frac{1}{2}\big) = 0 \end{cases} \uparrow$ $\big[$y además $T' + \frac{2\lambda}{\pi^2 t}T = 0\big]$.

Probamos: $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\operatorname{sen}(2n-1)\pi x \to \sum_{n=1}^{\infty}\Big[T_n' + \frac{2(2n-1)^2}{t}T_n\Big]\operatorname{sen}(2n-1)\pi x = 3\operatorname{sen}\pi x$.

Del dato inicial: $u(x,1) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(1)\operatorname{sen}(2n-1)\pi x = 0 \to T_n(1) = 0 \ \forall n$. Sólo es no nulo: $\begin{cases} T_1' + \frac{2}{t}T_1 = 3 \\ T_1(1) = 0 \end{cases}$

$\to T_1(t) = \frac{C}{t^2} + \frac{1}{t^2}\int 3t^2dt = \frac{C}{t^2} + t \xrightarrow{d.i.} C = -1$ $\boxed{u = \big[t - \frac{1}{t^2}\big]\operatorname{sen}3x}$.