# Soluciones del examen de Junio de 2007 de Ecuaciones Diferenciales II (grupo A)

**1.** Sea la ecuación $yu_y - xu_x = u+2x$ y los datos iniciales: $\begin{array}{l} \text{i) } u(x,0)=-x \\ \text{ii) } u(x,2)=7x \end{array}$. Hallar la única solución que satisface uno de ellos y dos soluciones distintas que cumplan el otro.

$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x} \to y = Ce^{-\int \frac{dx}{x}} = \frac{C}{x} \to \begin{cases} \xi=xy \\ \eta=x \end{cases} \to u_\eta = -\frac{u}{\eta}-2\,,\ u = \frac{p(\xi)}{\eta} - \frac{1}{\eta}\int 2\eta\, d\eta = \frac{p(\xi)}{\eta} - \eta = \frac{p(xy)}{x} - x\,.$

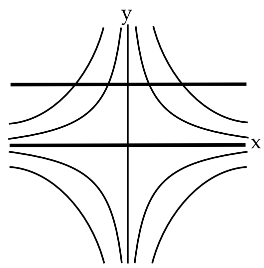
O bien, $\begin{cases} \xi=xy \\ \eta=y \end{cases} \to u_\eta = \frac{u}{\eta}+\frac{2\xi}{\eta^2}\,,\ u = p^*(\xi)\eta + \eta\int \frac{2\xi}{\eta^3}\, d\eta = p^*(\xi)\eta - \frac{\xi}{\eta} = p^*(xy)y - x\,.$

i) $u(x,0) = \frac{p(0)}{x} - x = -x \to$ toda $p\in C^1$ con $p(0)=0$ lo cumple, por ejemplo, $\begin{array}{l} p(v)\equiv 0 \to u=x \\ p(v)=v \to u=y-x \end{array}$.

O bien, $u(x,0)=-x=-x$ para toda $p^*\in C^1$; eligiendo $p^*(v)\equiv 0\,,\,1$ obtenemos las de arriba.

ii) $u(x,2) = \frac{p(2x)}{x} - x = 7x\,,\ p(2x)=8x^2 \ \to\ p(v)=2v^2 \to \boxed{u(x,y) = 2xy^2 - x}$.

O bien, $u(x,2)=2p^*(2x)-x=7x\,,\ p^*(2x)=4x \to\ p^*(v)=2v \nearrow$.




El dibujo de las características muestra que para i) había problemas de unicidad [dato sobre característica] y que había solución única para ii) [no hay tangencia]. El $\Delta$ nos lo confirma:

i) $\Delta = 1\cdot 0 - 0\cdot(-x) \equiv 0\,,$ ii) $\Delta = 1\cdot 2 - 0\cdot(-x) = 2 \neq 0\,.$

**2.** Resolver por separación de variables: $\begin{cases} u_t - u_{xx} + 2tu = 0\,,\ x\in(0,\frac{1}{2}),\ t>0 \\ u(x,0)=1-2x \\ u_x(0,t)=u(\frac{1}{2},t)=0 \end{cases}$.

$u(x,t)=X(x)T(t) \ \to\ XT' - X''T + 2tXT = 0 \ \to\ \frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} + 2t = -\lambda \to \begin{cases} X''+\lambda X = 0 \\ T' + (2t+\lambda)T = 0 \end{cases}$

De las condiciones de contorno: $\begin{array}{l} u_x(0,t)=X'(0)T(t)=0 \to\ X'(0)=0 \\ u(\frac{1}{2},t)=X(\frac{1}{2})T(t)=0 \to\ X(\frac{1}{2})=0 \end{array}$

El problema de contorno $\begin{cases} X''+\lambda X = 0 \\ X'(0)=X(\frac{1}{2})=0 \end{cases}$ es conocido: $\begin{array}{c} \lambda_n = (2n-1)^2\pi^2 \\ X_n = \{\cos(2n-1)\pi x\} \end{array}$ $n=1,2,\ldots$

Para esos valores de $\lambda$: $T' = -(2t+\lambda_n)\,T \to\ T_n = \{e^{-t^2-(2n-1)^2\pi^2 t}\}$

Probamos, pues, soluciones: $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{-t^2-(2n-1)^2\pi^2 t}\cos(2n-1)\pi x\,.$

Sólo nos falta la condición inicial: $u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(2n-1)\pi x = 1-2x \ \to$

$$c_n = \frac{2}{1/2}\int_0^{1/2}(1-2x)\cos(2n-1)\pi x\, dx = \frac{4(1-2x)}{\pi(2n-1)}\operatorname{sen}(2n-1)\pi x\Big|_0^{1/2} + \frac{8}{\pi(2n-1)}\int_0^{1/2}\operatorname{sen}(2n-1)\pi x\, dx$$

$$= \frac{8}{\pi^2(2n-1)^2}\Big[-\cos(2n-1)\pi x\Big]_0^{1/2} = \frac{8}{\pi^2(2n-1)^2} \ \to$$

$$\boxed{u(x,t) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\, e^{-t^2-(2n-1)^2\pi^2 t}\cos(2n-1)\pi x}$$

[Haciendo $x=\frac{1}{4}$ en el desarrollo $\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2} = 1-2x$, se deduce la suma de una serie curiosa:

$$\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\frac{\pi}{4}}{(2n-1)^2} = \frac{4\sqrt{2}}{\pi^2}\Big[1-\frac{1}{3^2}-\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots\Big] = \frac{1}{2} \ \to\ 1-\frac{1}{3^2}-\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}-\frac{1}{11^2}-\cdots = \frac{\pi^2}{8\sqrt{2}}\,,$$

pues la serie converge hacia el valor de la función en los puntos de $(0,\frac{1}{2})$ en que es continua].

**3. a)** Precisar, según los valores de $a$, cuántas soluciones $y(r)$ tiene $\begin{cases} r^2y''+ry'-y=r^2 \\ y'(1)+ay(1)=y(2)=0 \end{cases}$.

**b)** Resolver el siguiente problema en el plano: $\begin{cases} \Delta u = \operatorname{sen}\theta\ ,\ 1<r<2 \\ u_r(1,\theta)=u(2,\theta)=0 \end{cases}$.

**a)** Analizamos primero el homogéneo: $r^2y''+ry'-y=0 \to \mu(\mu-1)+\mu-1=0 \to y=c_1r+\frac{c_2}{r}$.

Imponiendo los datos: $\begin{matrix} c_1-c_2+ac_1+ac_2=0 & c_1[5-3a]=0 \\ 2c_1+\frac{c_2}{2}=0\ \to\ c_2=-4c_1 \nearrow & \end{matrix} \quad \Rightarrow$

**Si $a\neq\frac{5}{3}$ el no homogéneo tiene solución única** (el homogéneo tiene sólo la solución $y\equiv 0$).

Si $a=\frac{5}{3}$ el homogéneo tiene infinitas soluciones $y_h=\{r-\frac{4}{r}\}$ y el no homogéneo infinitas o ninguna.

Escribimos la ecuación de forma autoajunta: $(ry')'-\frac{y}{r}=r$ y calculamos:

$\int_1^2\big(r-\frac{4}{r}\big)r\,dr=\big[\frac{r^3}{3}\big]_1^2-4=-\frac{5}{3}\neq 0 \Rightarrow$ **Si $a=\frac{5}{3}$ el no homogéneo no tiene solución**.

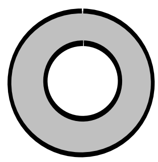
A lo mismo se llega imponiendo directamente los datos en la solución general de la no homogénea:

Se sabe que hay $y_p=Ar^2$ ($2$ no autovalor de la de coef. const.) $\to 2A+2A-A=1 \to y_p=\frac{r^2}{3}$.

$\Big[$O bien $\begin{vmatrix} r & r^{-1} \\ 1 & -r^{-2} \end{vmatrix}=-2r^{-1}$, $y_p=\frac{1}{r}\int\frac{r\cdot 1}{-2r^{-1}}-r\int\frac{r^{-1}\cdot 1}{-2r^{-1}}=-\frac{r^2}{6}+\frac{r^2}{2}=\frac{r^2}{3}\ \Big]$.

$$y=c_1r+\frac{c_2}{r}+\frac{r^2}{3}\ \to\ \left.\begin{matrix} c_1-c_2+\frac{2}{3}+\frac{5}{3}c_1+\frac{5}{3}c_2+\frac{5}{9}=\frac{8}{3}c_1+\frac{2}{3}c_2+\frac{11}{9}=0 & \to & 4c_1+c_2=-\frac{11}{6} \\ 2c_1+\frac{c_2}{2}+\frac{4}{3}=0 & \to & 4c_1+c_2=-\frac{8}{3} \end{matrix}\right\}\ \text{Imposible.}$$

**b)** Las autofunciones del homogéneo $\begin{matrix} \Theta''+\lambda\Theta=0 \\ \Theta\ 2\pi\text{-periódica} \end{matrix}$ llevan a probar la serie:



$u=a_0(r)+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n(r)\cos n\theta+b_n(r)\operatorname{sen} n\theta] \to$

$$a_0''+\frac{a_0'}{r}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big([a_1''+\frac{a_1'}{r}-\frac{n^2a_1}{r^2}]\cos n\theta+[b_1''+\frac{b_1'}{r}-\frac{n^2b_1}{r^2}]\operatorname{sen} n\theta\Big)=\operatorname{sen}\theta\,.$$

Los datos de contorno en $r=1,2$ imponen: $a_n'(1)=b_n'(1)=0$, $a_n(2)=b_n(2)=0$.

Por tanto, $a_n, b_{n\neq 1}\equiv 0$ (es solución y hay unicidad) y además: $\begin{cases} r^2b_1''+rb_1'-b_1=r^2 \\ b_1'(1)=b_1(2)=0 \end{cases}$,

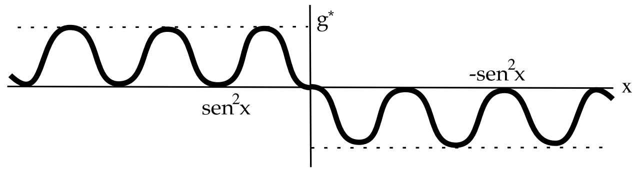
La ecuación está resulta arriba (y vimos que el problema tiene solución única). Imponiendo los datos:

$$\begin{matrix} c_1-c_2+\frac{2}{3}=0\ \to\ c_2=c_1+\frac{2}{3}\downarrow & c_2=0 \\ 2c_1+\frac{c_2}{2}+\frac{4}{3}=0 & \frac{5}{2}c_1+\frac{5}{3}=0,\ c_1=-\frac{2}{3}\uparrow \end{matrix}\ \to\ \boxed{u=\frac{r^2-2r}{3}\operatorname{sen}\theta}\,.$$

**4.** Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0,\ x\geq 0,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=\cos^2x \\ u(0,t)=t \end{cases}$. **a)** Hallar $u(\pi,2\pi)$. **b)** Hallar $u(x,2\pi)$ para $x\geq 2\pi$.

Una $v$ evidente que cumple la condición de contorno no homogénea es $v=t$. Haciendo $w=u-v$:

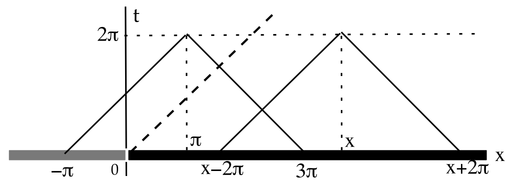
$$\begin{cases} w_{tt}-w_{xx}=0,\ x\geq 0 \\ w_t(x,0)=\cos^2x-1 \\ w(x,0)=0,\ w(0,t)=0 \end{cases} \to \begin{cases} w_{tt}-w_{xx}=0,\ x\in\mathbf{R} \\ w(x,0)=0 \\ w_t(x,0)=g^*(x) \end{cases},$$




siendo $g^*(x)$ la extensión impar respecto a $x=0$ de

$g(x)=\cos^2x-1=-\sin^2x=\frac{1}{2}(\cos 2x-1)$.

La solución del problema inicial es $u=t+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}g^*(s)\,ds$.




**a)** $u(\pi,2\pi)=2\pi+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{3\pi}g^* \underset{g^*\text{ impar}}{=} 2\pi+\frac{1}{4}\int_{\pi}^{3\pi}(\cos 2s-1)ds=\boxed{\frac{3\pi}{2}}$.

**b)** Para hallar $u(x,2\pi)$ si $x\geq 2\pi$ sólo necesitamos la expresión de la $g$ inicial:

$$w(x,2\pi)=\frac{1}{2}\int_{x-2\pi}^{x+2\pi}g^*=\frac{1}{4}\int_{x-2\pi}^{x+2\pi}(\cos 2s-1)ds=\frac{1}{8}\big[\operatorname{sen} 2s\big]_{x-2\pi}^{x+2\pi}-\pi=-\pi \to \boxed{u(x,2\pi)=\pi},\ x\geq 2\pi\,.$$

**Soluciones del examen de septiembre de 2007 de Ecuaciones Diferenciales II (A)**

**1.** Resolver $\begin{cases} u_{tt}-4u_{xx}=16\,,\ x,t\in\mathbf{R} \\ u(0,t)=t\,,\ u_x(0,t)=0 \end{cases}$.

Lo más sencillo es observar de que cambiando los papeles de $x$ y $t$ podemos aplicar D'Alembert:

$$\xrightarrow{x\leftrightarrow t} \begin{cases} u_{tt}-\frac{1}{4}u_{xx}=-4\,,\ x,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=x\,,\ u_t(x,0)=0 \end{cases} \to$$

$$u=\tfrac{1}{2}\big[(x+\tfrac{t}{2})+(x-\tfrac{t}{2})\big]-4\int_0^t\int_{x-\frac{1}{2}(t-\tau)}^{x+\frac{1}{2}(t-\tau)}ds\,d\tau = x-4\int_0^t(t-\tau)d\tau = x+\big[2(t-\tau)^2\big]_0^t = x-2t^2 \xrightarrow{x\leftrightarrow t}$$

$$\boxed{u=t-2x^2}$$

Podríamos ahorrarnos esta integral doble con una solución $v$ que sólo dependiese de una variable:

$$v''(t)=-4\,,\ v=-2t^2 \underset{w=u-v}{\to} \begin{cases} w_{tt}-\frac{1}{4}w_{xx}=0 \\ w(x,0)=x\,,\ w_t(x,0)=0 \end{cases},\ w=\tfrac{1}{2}\big[(x+\tfrac{t}{2})+(x-\tfrac{t}{2})\big]=x \to u=x-2t^2$$

$$v''(x)=16\,,\ v=8x^2 \underset{w=u-v}{\to} \begin{cases} w_{tt}-\frac{1}{4}w_{xx}=0 \\ w(x,0)=x-8x^2, w_t(x,0)=0 \end{cases},\ w=x-4\big[(x+\tfrac{t}{2})^2+(x-\tfrac{t}{2})^2\big]=x-8x^2-2t^2\ldots$$

Sin atajos. Forma canónica, solución y datos:

$$\begin{cases} \xi=x+2t \\ \eta=x-2t \end{cases} \to \begin{cases} u_{xx}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta} \\ u_{tt}=4[u_{\xi\xi}-2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}] \end{cases} \to \underset{\text{forma canónica}}{u_{\xi\eta}=-1}$$

$$\to u_\xi=p^*(\xi)-\eta \to u=p(\xi)+q(\eta)-\xi\eta=p(x+2t)+q(x-2t)+4t^2-x^2$$

$$\begin{cases} u(0,t)=p(2t)+q(-2t)+4t^2=t \to 2p'(2t)-2q'(-2t)=1-8t \\ u_x(0,t)=p'(2t)+q'(-2t)=0 \to q'(-2t)=-p'(2t) \end{cases} \to p'(2t)=\tfrac{1}{4}-2t \overset{v=2t}{\to} p'(v)=\tfrac{1}{4}-v$$

$$\to p(v)=\tfrac{v}{4}-\tfrac{v^2}{2}+K \to q(-v)=\tfrac{v}{2}-v^2-p(v)=\tfrac{v}{4}-\tfrac{v^2}{2}-K \to q(v)=-\tfrac{v}{4}-\tfrac{v^2}{2}-K \to$$

$$u=\tfrac{x+2t}{4}-\tfrac{x-2t}{4}-\tfrac{(x+2t)^2}{2}-\tfrac{(x-2t)^2}{2}+4t^2-x^2=t-x^2-4t^2+4t^2-x^2=\boxed{t-2x^2}$$

**2.** Resolver $\begin{cases} 2u_t+u_x=tu \\ u(x,0)=e^{-x^2} \end{cases}$, **a)** utilizando las características, **b)** con transformadas de Fourier.

**a)** $\frac{dt}{dx}=2 \to \begin{cases} \xi=2x-t \\ \eta=t \end{cases} \to 2u_\eta=\eta u\,,\ u=p(\xi)\,e^{\eta^2/4}=p(2x-t)\,e^{t^2/4} \to u(x,0)=p(2x)=e^{-x^2}$

$$\to p(v)=e^{-v^2/4} \to u=e^{-(2x-t)^2/4}\,e^{t^2/4} \to \boxed{u=e^{xt-x^2}}$$ [No hay problemas de unicidad: $\Delta=2\ \forall x$].

También podemos hacer $\eta=x$. Entonces: $u_\eta=tu=(2\eta-\xi)u\,,\ u=p(\xi)\,e^{\eta^2-\xi\eta}=p(2x-t)\,e^{xt-x^2}$

$$\to u(x,0)=p(2x)\,e^{-x^2}=e^{-x^2} \to p(v)\equiv 1 \to \boxed{u=e^{xt-x^2}}$$

**b)** $\mathfrak{I}(f')=-ik\mathfrak{I}(f)\,,\ \mathfrak{I}(e^{-ax^2})=\frac{1}{\sqrt{2a}}\,e^{-k^2/4a} \to \begin{cases} \hat{u}_t=\frac{ik}{2}\hat{u}+\frac{t}{2}\hat{u} \\ \hat{u}(k,0)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-k^2/4} \end{cases} \to$

$$\hat{u}(k,t)=p(k)\,e^{ikt/2}\,e^{t^2/4},\ p \text{ arbitraria} \xrightarrow{\text{dato inicial}} \hat{u}=\tfrac{1}{\sqrt{2}}\,e^{t^2/4}\,e^{-k^2/4}\,e^{ikt/2}\,.$$

Por tanto: $u(x,t)=e^{t^2/4}\,\mathfrak{I}^{-1}\big[\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-k^2/4}\,e^{ikt/2}\big]=e^{t^2/4}\,e^{-(x-\frac{t}{2})^2}=\boxed{e^{xt-x^2}}$,

puesto que $\mathfrak{I}^{-1}\big[\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-k^2/4}\big]=e^{-x^2}$ y $\mathfrak{I}^{-1}\big[\hat{f}(k)\,e^{iak}\big]=f(x-a)$.

**3. a)** Hallar el primer término del desarrollo de $f(x)=\cos 3x$ en serie de autofunciones del problema:

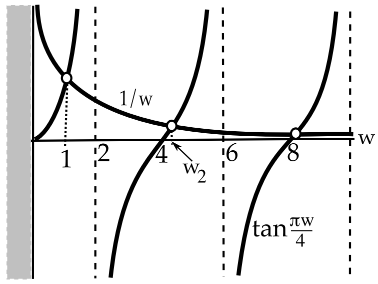
$$\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y'(0)=y'(\frac{\pi}{4})+y(\frac{\pi}{4})=0 \end{cases}.$$

**b)** Precisar para i) $\lambda=0$ ii) $\lambda=1$ cuántas soluciones tiene $\begin{cases} y''+\lambda y=\cos 3x \\ y'(0)=y'(\frac{\pi}{4})+y(\frac{\pi}{4})=0 \end{cases}$.

**a)** $\alpha\cdot\alpha'=0$, $\beta\cdot\beta'>0 \Rightarrow \lambda\geq 0$. $\lambda=0$: $y=c_1+c_2x \to \left.\begin{array}{l} y'(0)=c_2=0 \downarrow \\ y'(\frac{\pi}{4})+y(\frac{\pi}{4})=c_1=0 \end{array}\right\} \to y\equiv 0$. $\lambda=0$ no autovalor.

$\lambda>0$: $y=c_1\cos wx+c_2\,\text{sen}\, wx$. $y'(0)=0 \to c_2=0 \to y'(\frac{\pi}{4})+y(\frac{\pi}{4})=c_1\big[\cos\frac{w\pi}{4}-w\,\text{sen}\,\frac{w\pi}{4}\big]=0$.

Si el corchete se anula, $c_1$ queda indeterminado. Como muestra el dibujo, hay infinitos $w_n$ que cumplen $\tan\frac{\pi w_n}{4}=\frac{1}{w_n}$, y para cada $\lambda_n=w_n^2$, la autofunción asociada es $y_n=\{\cos w_n x\}$ (es $c_2=0$).




Las condiciones de contorno están ajustadas para que el primer $\lambda$ se pueda hallar exactamente: $\boxed{\lambda_1=1 \to y_1=\{\cos x\}}$ ($\tan\frac{\pi}{4}=1$).

[Los demás $\lambda_n$ sólo se pueden aproximar numéricamente].

Si $\cos 3x=c_1\cos x+\sum_{n=2}^{\infty}c_n\cos w_n x$, el primer coeficiente $c_1$ es:

$$c_1=\frac{\langle\cos 3x,\cos x\rangle}{\langle\cos x,\cos x\rangle}=\frac{\int_0^{\pi/4}\cos 3x\cos x\,dx}{\int_0^{\pi/4}\cos^2 x\,dx}=\frac{\int_0^{\pi/4}(\cos 4x+\cos 2x)\,dx}{\int_0^{\pi/4}(1+\cos 2x)\,dx}=\frac{\big[\frac{1}{4}\,\text{sen}\,4x+\frac{1}{2}\,\text{sen}\,2x\big]_0^{\pi/4}}{\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\big[\text{sen}\,2x\big]_0^{\pi/4}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}}=\boxed{\frac{2}{\pi+2}}$$

**b)** A la vista de los cálculos anteriores, por no ser $\lambda=0$ autovalor (es decir, porque el homogéneo tiene sólo la solución trivial $y\equiv 0$) hay **solución única** del problema no homogéneo en el caso i).

Para ii), como hay infinitas soluciones del homogéneo $y_h=\{\cos x\}$, el no homogéneo tendrá infinitas o ninguna dependiendo de que se anule o no la integral (la ecuación ya está en forma autoadjunta):

$$\int_0^{\pi/4}\cos 3x\,\cos x\,dx=\frac{1}{4} \Rightarrow \text{ el no homogéneo } \textbf{no tiene solución}.$$

**4.** Resolver por separación de variables $\begin{cases} u_{tt}-\Delta u=0,\ (x,y)\in(0,\pi)\times(0,\pi),\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,y,0)=0,\ u_t(x,y,0)=\text{sen}\,3x\ \text{sen}^2 2y \\ u(0,y,t)=u(\pi,y,t)=0 \\ u_y(x,0,t)=u_y(x,\pi,t)=0 \end{cases}$.

Buscamos soluciones: $u(x,y,t)=X(x)Y(y)T(t) \to XYT''-[X''Y+XY'']T=0$

$$\frac{X''}{X}=\frac{T''}{T}-\frac{Y''}{Y}=-\lambda \to \begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ \frac{Y''}{Y}=\lambda+\frac{T''}{T}=-\mu \to \begin{cases} Y''+\mu Y=0 \\ T''+[\lambda+\mu]T=0 \end{cases} \end{cases}$$

De las condiciones de contorno: $X(0)=X(\pi)=Y'(0)=Y'(\pi)=0$. Y de la primera inicial: $T(0)=0$.

Así pues: $\begin{cases} \lambda=n^2,\ X_n=\{\text{sen}\,nx\},\ n=1,2,\dots \\ \mu=m^2,\ Y_m=\{\cos my\},\ m=0,1,\dots \end{cases} \to T_{mn}=\big\{\text{sen}\sqrt{n^2+m^2}\,t\big\}$.

Probamos la serie $u(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}c_{nm}\,\text{sen}\sqrt{n^2+m^2}\,t\ \text{sen}\,nx\ \cos my$, que debe satisfacer:

$$u_t(x,y,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}c_{nm}\sqrt{n^2+m^2}\ \text{sen}\,nx\,\text{sen}\,my=\frac{1}{2}\,\text{sen}\,3x(1-\cos 4y) \to \begin{array}{l} c_{30}\sqrt{9}=\frac{1}{2} \\ c_{34}\sqrt{25}=-\frac{1}{2} \end{array}$$ [los demás $c_{nm}=0$].

$$\boxed{u(x,y,t)=\frac{1}{6}\,\text{sen}\,3t\,\text{sen}\,3x-\frac{1}{10}\,\text{sen}\,5t\,\text{sen}\,3x\cos 4y}$$