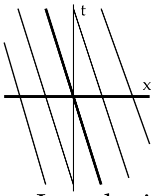
Soluciones del examen de junio de 2008 de Ecuaciones Diferenciales II (grupo C piloto)

1. a] Dada $3u_t-u_x=2$ hallar: **a**$_1$] la solución con $u(x,0)=x$, **a**$_2$] dos soluciones que cumplan $u(x,-3x)=-2x$.

b] Resolver $\begin{cases}3u_t-u_x=g(x)\\u(x,0)=f(x)\end{cases}$, **b**$_1$] utilizando las características, **b**$_2$] con transformadas de Fourier, y comprobar **a**$_1$]. [3 puntos]

a] $\frac{dt}{dx}=\frac{3}{-1}\ \to\ t+3x=C$; $\begin{cases}\xi=t+3x\\\eta=x\end{cases}\to u_\eta=-2$, $u=p(\xi)-2\eta=p(t+3x)-2x$.



O bien, $\begin{cases}\xi=t+3x\\\eta=t\end{cases}\to 3u_\eta=2$, $u=p^*(\xi)+\frac{2}{3}\eta=p^*(t+3x)+\frac{2}{3}t$.

a$_1$] $u(x,0)=\begin{matrix}p(3x)-2x=x\ \to\ p(v)=v\ \to\ u=t+3x-2x\\ p^*(3x)=x\ \to\ p^*(v)=\frac{v}{3}\ \to\ u=\frac{t}{3}+x+\frac{2}{3}t\end{matrix}\ \begin{matrix}\searrow\\\nearrow\end{matrix}\ \boxed{u=t+x}$

La solución es única pues claramente $t=0$ no es tangente en ningún punto a las características.
[O dicho de otra forma, porque $\Delta=1\cdot3-0\cdot(-1)=3\neq0$].

a$_2$] $u(x,0)=\begin{matrix}p(0)-2x=-2x\to p(0)=0,\ \text{vale toda } p\in C^1 \text{ que lo cumpla, por ejemplo } p\equiv0\to\boxed{u=-2x}\\ p^*(0)-2x=-2x\to p^*(0)=0,\ \text{vale toda } p^*\in C^1 \text{ que lo cumpla; } p^*\equiv0\to\boxed{u=\frac{2}{3}t}\end{matrix}$

[Otra más: eligiendo $p(v)=v$ arriba o $p^*(v)=\frac{v}{3}$ abajo obtenemos la solución de **a**$_1$]].

En este caso el dato se daba sobre una característica y no podía haber solución única.

[Era $\Delta=1\cdot3-(-3)\cdot(-1)\equiv0$].

b$_1$] Elegimos mejor $\eta=x$ y tenemos: $u_\eta=-g(\eta)$, $u=p(\xi)-\int_0^\eta g(s)\,ds=p(t+3x)-\int_0^x g(s)\,ds$.

$$u(x,0)=p(3x)-\int_0^x g=f(x)\ \to\ p(v)=f(\tfrac{v}{3})+\int_0^{v/3}g\ \to\ u=f(x+\tfrac{t}{3})+\int_0^{x+\frac{t}{3}}g-\int_0^x g\ \to$$

$$\boxed{u=f(x+\tfrac{t}{3})+\int_x^{x+\frac{t}{3}}g(s)\,ds}\quad \big(\text{si } g(x)\equiv2,\ f(x)=x\ \to\ u=x+\tfrac{t}{3}+2\tfrac{t}{3}\text{, como arriba}\big).$$

b$_2$] $\begin{cases}\hat{u}_t+ik\hat{u}=\hat{g}(k)\\\hat{u}(k,0)=\hat{f}(k)\end{cases}\to\hat{u}(k,t)=p(k)\,e^{-ikt/3}+\frac{\hat{g}(k)}{ik}$, p arbitraria $\xrightarrow{\text{dato inicial}}$ $p(k)=\hat{f}(k)-\frac{\hat{g}(k)}{ik}\ \to$

$$\hat{u}(k,t)=\hat{f}(k)\,e^{-ikt/3}+\hat{g}(k)\big[\tfrac{1-e^{-ikt/3}}{ik}\big]\ \to\ u(x,t)=f(x+\tfrac{t}{3})+\sqrt{2\pi}\,g(x)*h(x)\,,$$

donde $h(x)$ vale 1 en $[-t/3,0]$ y 0 en el resto, con lo que:

$$\sqrt{2\pi}\,g(x)*h(x)=\int_{-t/3}^0 g(x-u)\,du\underset{x-u=s}{=}-\int_{x+\frac{t}{3}}^x g(s)\,ds\quad\text{como antes.}$$

2. Precisar para i] $\lambda=-2$, ii] $\lambda=0$ cuántas soluciones tiene el problema: $\begin{cases}y''+y'+\lambda y=1-x\\y'(0)=y'(2)=0\end{cases}$. [1.5 puntos]

La ecuación en forma Sturm-Liouville es: $\big(e^xy'\big)'+\lambda e^xy=(1-x)\,e^x$ $\ (p,r>0)$.

i] Como $q\equiv0$ y $\alpha\alpha'=\beta\beta'=0$, los autovalores del problema homogéneo son todos ≥0, con lo que el problema homogéneo no tiene más solución que la trivial si $\lambda=-2$ y, por tanto, en ese caso **el no homogéneo tiene solución única**.

[Es fácil ver directamente que $\lambda=-2$ no es autovalor: $\mu^2+\mu-2=(\mu-1)(\mu+2)\ \to$

$$y=c_1e^x+c_2e^{-2x}\,,\ y'=c_1e^x-2c_2e^{-2x}\ \to\ \begin{matrix}c_1-2c_2=0\\c_1e^2-2c_2e^{-4}=0\end{matrix}\ \to\ c_1=c_2=0\ ].$$

ii] Veamos cuántas soluciones tiene el homogéneo:

$$\mu(\mu-1)\ \to\ y=c_1+c_2e^{-x}\,,\ y'=-c_2e^{-x}\ \to\ \begin{matrix}-c_2=0\\-c_2e^{-2}=0\end{matrix}\ \to\ c_2=0 \text{ y } c_1 \text{ indederminado}\ \to\ y_h=\{1\}.$$

Para saber si el no homogéneo tiene infinitas o ninguna:

$$\int_0^2 1(1-x)e^xdx=(1-x)e^x\big]_0^2+\int_0^2 e^xdx=-e^2-1+e^2-1=-2\neq0.\ \textbf{No tiene solución}.$$

[Se podría comprobar directamente a partir de la solución general de la no homogénea: $y=c_1+c_2e^{-x}+2x-\frac{1}{2}x^2$].

3. Hallar la única solución de este problema en el plano: $\begin{cases} \Delta u=0\ ,\ r<1,\ \theta\in(0,\pi) \\ u(1,\theta)+2u_r(1,\theta)=4\,\text{sen}\,\frac{3\theta}{2} \\ u(r,0)=u_\theta(r,\pi)=0 \end{cases}$.

Comprobar que cambiando $+2u_r(1,\theta)$ por $-2u_r(1,\theta)$ el problema físicamente imposible que resulta pasa a tener infinitas soluciones. [2 puntos]

Separando variables: $\begin{cases} \Theta''+\lambda\Theta=0 \\ \Theta(0)=\Theta'(\pi)=0 \end{cases} \to\ \lambda_n=\frac{(2n-1)^2}{4}\ ,\ \Theta_n=\big\{\,\text{sen}\,\frac{2n-1}{2}\theta\big\},\ n=1,2,\dots\ \to$

$$r^2R''+rR-\lambda_nR=0\to\ R=c_1r^{n-\frac12}+c_2r^{-n+\frac12}\ \underset{R\text{ acotada en }0}{\longrightarrow}\ R_n=\big\{r^{n-\frac12}\big\},\ n=1,2,\dots\ \to$$

$$u(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\,r^{n-\frac12}\,\text{sen}\,\frac{2n-1}{2}\theta\ ,\ \ u_r(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n(n-\tfrac12)r^{n-\frac32}\,\text{sen}\,\frac{2n-1}{2}\theta\ \xrightarrow{\text{dato que falta}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n\big[1+2n-1\big]\,\text{sen}\,\frac{2n-1}{2}\theta=4\,\text{sen}\,\frac{3\theta}{2}\ \to\ c_2=1\ \text{ y todos los demás }\ c_n=0\to\ \boxed{u=r^{3/2}\,\text{sen}\,\frac{3\theta}{2}}$$

Si la condición es $u(1,\theta)-2u_r(1,\theta)=4\,\text{sen}\,\frac{3\theta}{2}$ todo es igual hasta:

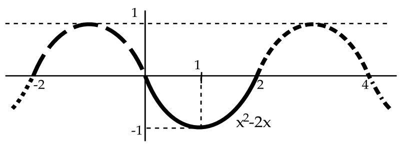
$$\sum_{n=1}^{\infty}2c_n\big[1-n\big]\,\text{sen}\,\frac{2n-1}{2}\theta=4\,\text{sen}\,\frac{3\theta}{2}\ \to\ c_2=-2,\ c_1\ \textbf{indeterminado}\ \text{ y los demás }\ c_n=0\ \to$$

Hay infinitas soluciones de la forma $\boxed{u=C\,r^{1/2}\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}-2\,r^{3/2}\,\text{sen}\,\frac{3\theta}{2}}$ [En este caso, la fórmula de Green no permitía probar la unicidad].

4. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\ ,\ x\in[0,2],t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=x^2\ ,\ u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=0\ ,\ u(2,t)=4 \end{cases}$. **a]** Hallar $u(1,2)$. **b]** Hallar $u(x,1)$.
i] Utilizando D'Alembert.
ii] Separando variables $\Big[$dato $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m-1)^3}=\frac{\pi^3}{32}\Big]$. [3.5 puntos]

$v=2x$ cumple las condiciones de contorno. $w=u-2x\to \begin{cases} w_{tt}-w_{xx}=0\ ,\ x\in[0,2] \\ w(x,0)=x^2-2x\ ,\ w_t(x,0)=0 \\ w(0,t)=w(2,t)=0 \end{cases}$.

i] Extendemos f de forma impar y 4-periódica a f^* definida en $\mathbf{R}$:
$\dots,\ -x(x+2)$ en $[-2,0]$, $x(x-2)$ en $[0,2]$, $-(x-4)(x-2)$ en $[2,4]$, $\dots$
Y la solución viene dada entonces por $w=\frac12[f^*(x+t)+f^*(x-t)]$.



Por tanto: $w(1,2)=\frac12\big[f^*(3)+f^*(-1)\big]\overset{\text{4per}}{=}\frac12\big[f^*(-1)+f^*(-1)\big]\overset{\text{impar}}{=}-f(1)=1\ \to\ \boxed{u(1,2)=3}$.

Para hallar $w(x,1)$ aparecen dos casos como (por ejemplo) muestran los dominios de dependencia:

$$w(x,1)=\tfrac12[f^*(x+1)+f^*(x-1)]=\begin{cases} 0\le x\le1,\ \frac12[-(x-1)(x+1)+(x+1)(x-1)]=0 \\ 1\le x\le2,\ \frac12[-(x-1)(x-3)+(x-3)(x-1)]=0 \end{cases}\ \to\ \boxed{u(x,1)=2x}.$$

[También es claro que trasladando f^* una unidad a izquierda y derecha y sumando todo se cancela].

ii] Resolviendo el problema en w por separación de variables (hecho en clase):

$$u(x,t)=X(x)T(t)\ \to \begin{cases} X''+\lambda X=0,\ X(0)=X(2)=0\to\ \lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{4}\ ,\ X_n=\{\text{sen}\,\frac{n\pi x}{2}\} \\ T''+\lambda T=0,\ T'(0)=0\to T_n=\{\cos\frac{n\pi t}{2}\} \end{cases}\quad n=1,2,\dots$$

Probamos, pues: $w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}k_n\cos\frac{n\pi t}{2}\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{2}\to\sum_{n=1}^{\infty}k_n\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{2}=x^2-2x\to$

$$k_n=\int_0^2(x^2-2x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{2}\,dx=-\frac{2}{n\pi}(x^2-2x)\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2+\frac{4}{n\pi}\int_0^2(x-1)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx$$
$$=\frac{8}{n^2\pi^2}(x-1)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2-\frac{8}{n^2\pi^2}\int_0^2\text{sen}\,\frac{n\pi x}{2}=\frac{16}{n^3\pi^3}[\cos n\pi-1]\ \to$$

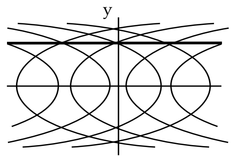
$$\boxed{w(x,t)=-\frac{32}{\pi^3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^3}\cos\frac{(2m-1)\pi t}{2}\,\text{sen}\,\frac{(2m-1)\pi x}{2}}$$

Para $t=1$ todos los cosenos se anulan, con lo que $w(x,1)=0$ (como por D'Alembert).

Además $w(1,2)=\frac{32}{\pi^3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)^3}=\frac{32}{\pi^3}\big[1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\cdots\big]=\frac{32}{\pi^3}\frac{\pi^3}{32}=1$, como arriba.

Soluciones del examen de septiembre de 2008 de Ecuaciones Diferenciales II (grupo C piloto)

1. Sea $yu_{yy}-4y^3u_{xx}-u_y=0$. **a]** Escribirla en forma canónica, hallar su solución general y la que satisface los datos iniciales $u(x,1)=x$, $u_y(x,1)=2x$.
b] Separar variables $u=XY$ en la ecuación y comprobar que la solución particular de **a]** aparece como producto de soluciones asociadas a $\lambda=0$. [3 puntos]



a] $B^2-4AC=16y^4 \to$ hiperbólica si $y\neq 0$. $\frac{dx}{dy}=\frac{\pm 4y^2}{2y}=\pm 2y \to x\pm y^2=C$.

$$\begin{cases}\xi=x+y^2\\ \eta=x-y^2\end{cases} \to \begin{cases}u_{xx}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\\ u_y=2y[u_\xi-u_\eta]\\ u_{yy}=4y^2[u_{\xi\xi}-2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}]+2[u_\xi-u_\eta]\end{cases} \to -16y^3u_{\xi\eta}=0\,,\ \underbrace{u_{\xi\eta}=0}_{\text{forma canónica}}$$

$$\to u=p(\xi)+q(\eta)\,,\ \underbrace{\boxed{u=p(x+y^2)+q(x-y^2)}}_{\text{solución general}} \to u_y=2y\big[p'(x+y^2)-q'(x-y^2)\big]\,.$$

Imponiendo los datos:

$$\begin{cases}p(x+1)+q(x-1)=x \to p'(x+1)+q'(x-1)=1\\ 2p'(x+1)-2q'(x-1)=2x \to p'(x+1)-q'(x-1)=x\end{cases} \to p'(x+1)=\tfrac{x+1}{2} \xrightarrow{v=x+1} p'(v)=\tfrac{v}{2} \to p(v)=\tfrac{v^2}{4}+K\,.$$

$$q(x-1)=x-p(x+1)=\tfrac{4x-(x+1)^2}{4}-K=\tfrac{-(x-1)^2}{4}-K \to q(v)=-\tfrac{v^2}{4}-K \to u=\tfrac{(x+y^2)^2}{4}-\tfrac{(x-y)^2}{4}=\boxed{xy^2}$$

[Única solución perfectamente determinada. La recta de datos iniciales $y=1$ no era tangente a las características].

b] $u=XY \to yXY''-XY'-4y^3X''Y=0 \to \frac{X''}{X}=\frac{yY''-Y'}{4y^3Y}=-\lambda \to \begin{cases}X''+\lambda X=0\\ yY''-Y'+4\lambda y^3Y=0\end{cases}$.

Para $\lambda=0$: $\begin{array}{l}X''=0 \to X=c_1+c_2x\\ yY''-Y'=0 \xrightarrow[\text{Euler o } Y'=v]{} Y=k_1+k_2y^2\end{array}$. Cualquier producto es solución: $\{1\}$, $\{x\}$, $\{y^2\}$, $\{xy^2\}$.

[Aunque la ecuación con $\lambda\neq 0$ para Y parece complicada y no resoluble, haciendo $y^2=t$ aparece la clásica $Y''+\lambda Y=0$. De hecho, haciendo en la EDP ese mismo cambio se acaba en la ecuación de ondas].

2. Sea $\begin{cases}xy''-y'=x^2-a\\ y'(2)=y'(4)=0\end{cases}$. Determinar, si existe, un valor de a para el que tenga infinitas soluciones. [2 puntos]

La ecuación homogénea se puede resolver como Euler: $\lambda(\lambda-1)-\lambda=0 \to y=c_1+c_2x^2$,

o haciendo $y'=v \to v'=\frac{v}{x} \to v=\mathrm{C}e^{\ln x}=Cx \to y=c_1+c_2x^2$ $\big[y'=2c_2x\big]$.

Imponiendo los datos a esta solución: $\begin{array}{l}y'(2)=4c_2=0\\ y'(4)=8c_2=0\end{array} \to c_2=0$ y c_1 indeterminado.

El homogéneo tiene, pues, infinitas soluciones $y_h=\{1\}$ y el no homogéneo tendrá infinitas o ninguna.

En forma autoadjunta: $y''-\frac{1}{x}y'=x-\frac{a}{x} \xrightarrow{\times e^{-\log x}} \big(\frac{1}{x}y'\big)'=1-\frac{a}{x^2}$. Hallemos la integral:

$\int_2^4 1\cdot\big(1-\frac{a}{x^2}\big)\,dx=2+\big[\frac{a}{x}\big]_2^4=2-\frac{a}{4} \to$ **Si** $\boxed{a=8}$ **tiene infinitas soluciones**. [Si $a\neq 8$, ninguna].

[Se llegaría a lo mismo imponiendo los datos en la solución genera de la no homogénea $\cdots\ y=c_1+c_2x^2+\frac{1}{3}x^3+ax\ \cdots$].

3. Sea $\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0\,,\ x\in(0,\pi),\ t>0 \\ u(x,0)=0 \\ u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=t \end{cases}$. Resolverlo y hallar para cada $x\in(0,\pi)$ el límite de la solución $u(x,t)$ cuando $t\to\infty$. [2.5 puntos]

Tanteando o casi a ojo se ve que $v=xt$ cumple las condiciones de contorno. Haciendo $w=u-xt \to$

$\begin{cases} w_t - w_{xx} = -x \\ w(x,0)=0 \\ w_x(0,t)=w_x(\pi,t)=0 \end{cases}$. Hay que probar una serie de autofunciones del homogéneo:

$$\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X'(0)=X'(\pi)=0 \end{cases} \to\ X_n=\{\cos nx\}\,,\ n=0,1,\dots \to\ w(x,t)=T_0(t)+\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\cos nx \ \to$$

$$T_0'+\sum_{n=1}^{\infty}[T_n'+n^2T_n]\cos nx = -x = \frac{b_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\cos nx\,,\ \text{ con }\ b_n=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx:$$

$$b_0=-\frac{2}{\pi}\frac{\pi^2}{2}=-\pi\,,\ \ b_n=-\frac{2}{n\pi}x\,\text{sen}\,nx\Big]_0^{\pi}+\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\text{sen}\,nx\,dx=\frac{2}{n^2\pi}[\cos n\pi-1]=\begin{cases} -4/(n^2\pi)\,,\ n \text{ impar} \\ 0\,,\ n \text{ par}\end{cases}$$

$$\begin{cases} T_0'=-\frac{\pi}{2} \\ T_0(0)=0 \end{cases} \to\ T_0(t)=-\frac{\pi}{2}t\,,\quad \begin{cases} T_n'+n^2T_n=b_n \to Ce^{-n^2t}+\frac{b_n}{n^2} \\ T_n(0)=0 \end{cases} \to\ T_n(t)=\frac{b_n}{n^2}[1-e^{-n^2t}]\,.$$

$$\boxed{u(x,t)=t\big(x-\tfrac{\pi}{2}\big)-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2m-1)^4}\,[1-e^{-(2m-1)^2t}]\cos(2m-1)x} \begin{array}{l} \to\infty\,,\ \text{si } x\in(\pi/2,\pi) \\ \to 0\,,\ \text{si } x=\pi/2 \\ \to -\infty\,,\ \text{si } x\in(0,\pi/2)\end{array}$$

pues ese es el límite del primer sumando y la serie se anula cuando $x=\frac{\pi}{2}$ y tiende hacia un número real finito para cada x: $-\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos(2m-1)x}{(2m-1)^4}$ (suma de esta serie convergente).

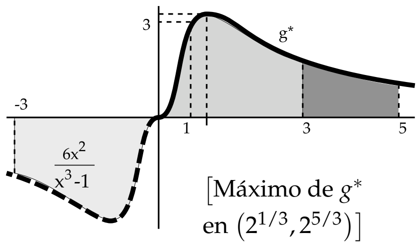
4. Sean $\begin{cases} v_{tt}-v_{xx}=0\,,\ x\ge 0,\ t\in\mathbf{R} \\ v(x,0)=0\,,\ v_t(x,0)=\frac{6x^2}{1+x^3} \\ v(0,t)=0 \end{cases}$ y $\begin{cases} u_{tt}-u_{rr}-\frac{2u_r}{r}=0\,,\ r\ge 0,\ t\in\mathbf{R} \\ u(r,0)=0\,,\ u_t(r,0)=\frac{6r}{1+r^3} \end{cases}$.

a] Hallar $v(1,4)$ y $u(1,4)$. **b]** Más en general, hallar $v(1,t)$ para $t\ge 0$. [2.5 puntos]

a] La solución para v es $v(x,t)=\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}g^*(s)\,ds$, siendo g^* la extensión impar de $\frac{6x^2}{1+x^3}$ respecto a $x=0$. En particular,

$$v(1,4)=\frac{1}{2}\int_{-3}^{5}g^*(s)\,ds \overset{g^*\text{ impar}}{=} \int_3^5\frac{3s^2ds}{1+s^3}=\log(1+s^3)\Big]_3^5=\boxed{\log\frac{9}{2}}$$

[No ha sido necesario conocer la expresión de g^* para $x\le 0$].



Como haciendo $v=ur$ el problema en u se transforma en el problema en v (cambiando r por x), la solución del primer problema es:

$$u(r,t)=\frac{1}{2r}\int_{r-t}^{r+t}g^*(s)\,ds \ \to\ \boxed{u(1,4)=v(1,4)=\log\frac{9}{2}}\,.$$

b] $v(1,t)$ tendrá dos expresiones distintas, dependiendo de que $1-t$ sea mayor o menor que 0:

$$\text{Si } t\le 1,\ v(1,t)=\frac{1}{2}\int_{1-t}^{1+t}g=\log(1+s^3)\Big]_{1-t}^{1+t}=\boxed{\log\frac{1+(1+t)^3}{1+(1-t)^3}}$$

$$\text{Si } t\ge 1,\ v(1,t)=\frac{1}{2}\int_{1-t}^{1+t}g^* \overset{g^*\text{ impar}}{=} \frac{1}{2}\int_{t-1}^{1+t}g^*=\log(1+s^3)\Big]_{t-1}^{1+t}=\boxed{\log\frac{1+(1+t)^3}{1+(t-1)^3}}$$