Soluciones del examen de junio de 2009 de Ecuaciones Diferenciales II (grupo C piloto)

1. i] Resolver $v_y+\mathrm{e}^{x+y}v_x-v=0$ con el dato inicial $v(x,0)=\mathrm{e}^{-x}$.
ii] Escribir en forma canónica $u_{yy}+\mathrm{e}^{x+y}u_{xy}-u_y=0$. Hallar su solución general.

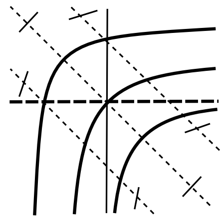
i] $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\mathrm{e}^{x+y}}$, $\int \mathrm{e}^y dy=\int \mathrm{e}^{-x}dx+C \;\to\; \mathrm{e}^y+\mathrm{e}^{-x}=C$ características.

$$\begin{cases}\xi=\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^{-x}\\ \eta=y \text{ (mejor)}\end{cases} \to v_\eta=v \to v=p(\xi)\,\mathrm{e}^\eta=p\big(\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^{-x}\big)\,\mathrm{e}^y .$$

[Con $\eta=x$ quedaría la ecuación bastante más complicada $v_\eta=\frac{v}{\xi\mathrm{e}^\eta-1}$].

$$v(x,0)=p\big(1+\mathrm{e}^{-x}\big)=\mathrm{e}^{-x},\; p(s)=s-1,\; \boxed{v=\mathrm{e}^{2y}+\mathrm{e}^{y-x}-\mathrm{e}^y} .$$

[Solución única, ya que $y=0$ no es tangente a las características que son estrictamente crecientes, o porque: $\Delta=1\cdot 1-0\cdot \mathrm{e}^x=1\neq 0\;\forall x$].



[Este dibujo aproximado sale de analizar $y=\log\big(C-\mathrm{e}^{-x}\big)$, y de dibujar las isoclinas].

ii] $B^2-4AC=\mathrm{e}^{2x+2y}>0$, hiperbólica en $\mathbf{R}^2$. $\frac{dx}{dy}=\frac{\mathrm{e}^{x+y}\pm\mathrm{e}^{x+y}}{2}=\begin{array}{l}\mathrm{e}^{x+y}\to \text{características de } \mathbf{i]}\\ 0\to x=K\end{array}$.

$$\begin{cases}\xi=\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^{-x}\\ \eta=x\end{cases} \to \begin{cases}u_y=\mathrm{e}^y u_\xi\\ u_x=-\mathrm{e}^{-x}u_\xi+u_\eta\end{cases},\; \begin{cases}u_{yy}=\mathrm{e}^{2y}u_{\xi\xi}+\mathrm{e}^y u_\xi\\ u_{xy}=-\mathrm{e}^{y-x}u_{\xi\xi}+\mathrm{e}^y u_{\xi\eta}\end{cases} \to \mathrm{e}^{2y+x}u_{\xi\eta}=0,\; \boxed{u_{\xi\eta}=0} \text{ forma canónica.}$$

La solución general es, por tanto: $u=p(\xi)+q(\eta)$, o sea, $\boxed{u=p\big(\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^{-x}\big)+q(x)}$.

La podíamos haber hallado basándonos en **i]** (ecuación a la que lleva hacer $u_y=v$):

$$u_y=p\big(\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^{-x}\big)\,\mathrm{e}^y \;\to\; u=q(x)+\int p\big(\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^{-x}\big)\,\mathrm{e}^y dy=q(x)+p^*\big(\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^{-x}\big) .$$

3b. Sea $\begin{cases}u_{tt}-\big(u_{rr}+\frac{2}{r}u_r\big)=0,\; r\geq 0, t\in\mathbf{R}\\ u(r,0)=r,\; u_t(r,0)=-2\end{cases}$. **i]** Hallar $u(1,2)$. **ii]** Hallar $u(1,t)$ para todo $t\geq 0$.

$$\xrightarrow{v=ru} \begin{cases}v_{tt}-v_{rr}=0,\; r\geq 0\\ v(r,0)=r^2,\, v_t(r,0)=-2r \text{ [ya impar]}\\ v(0,t)=0\end{cases} \to \begin{cases}v_{tt}-v_{rr}=0,\; r\in\mathbf{R}\\ v(r,0)=f^*(r),\, v_t(r,0)=-2r\end{cases}, \text{ con } f^*(r)=\begin{cases}r^2,\; r\geq 0\\ -r^2,\; r\leq 0\end{cases} \to$$

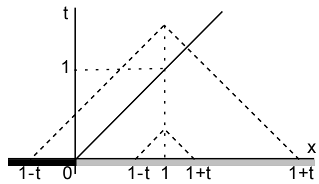
$$v(r,t)=\tfrac{1}{2}\big[f^*(r+t)+f^*(r-t)\big]-\int_{r-t}^{r+t}s\,ds \;\to\; u(r,t)=\tfrac{1}{2r}\big[f^*(r+t)+f^*(r-t)\big]-2t .$$

i] En particular, $u(1,2)=\frac{1}{2}\big[f^*(3)+f^*(-1)\big]-4\overset{\text{impar}}{=}\frac{1}{2}\big[f(3)-f(1)\big]-4=\frac{9-1}{2}-4=\boxed{0}$.

ii] Para $u(1,t)$ hay que distingir dos casos:

Si $t\leq 1$, $u(1,t)=\frac{1}{2}\big[(1+t)^2+(1-t)^2\big]-2t=1+t^2-2t=\boxed{(1-t)^2}$.

Si $t\geq 1$, $u(1,t)=\frac{1}{2}\big[(1+t)^2-(1-t)^2\big]-2t=2t-2t=\boxed{0}$.



3c. Comprobar, paso a paso y utilizando la $\mathcal{F}$, que la solución de:

$$\begin{cases}u_t-u_{xx}=\mathrm{e}^{-x^2/4},\; x\in\mathbf{R}, t>0\\ u(x,0)=0,\; u \text{ acotada}\end{cases} \text{ viene dada por: } u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-k^2}-\mathrm{e}^{-k^2(t+1)}}{k^2}\mathrm{e}^{-ikx}dk .$$

Deducir el valor de $u(0,t)$ integrando por partes y utilizando que $\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-s^2}ds=\sqrt{\pi}$.

$$\text{Como } \mathcal{F}\big[\mathrm{e}^{-ax^2}\big]=\frac{1}{\sqrt{2a}}\mathrm{e}^{-k^2/4a} \xrightarrow{a=1/4} \begin{cases}\hat{u}_t+k^2\hat{u}=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-k^2}\\ \hat{u}(k,0)=0\end{cases} \xrightarrow{\hat{u}_p \text{ a ojo}} \hat{u}(k,t)=p(k)\,\mathrm{e}^{-k^2t}+\frac{\sqrt{2}}{k^2}\mathrm{e}^{-k^2} \xrightarrow{d.i.}$$

$$p(k)=-\frac{\sqrt{2}}{k^2}\mathrm{e}^{-k^2},\; \hat{u}(k,t)=\frac{\sqrt{2}}{k^2}\big[\mathrm{e}^{-k^2}-\mathrm{e}^{-k^2(t+1)}\big]. \text{ Y como } u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{u}(k,t)\mathrm{e}^{-ikx}dk ,$$

deducimos el la expresión de u de arriba. Evaluar esta integral en general es complicado, pero:

$$u(0,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-k^2}-\mathrm{e}^{-k^2(t+1)}}{k^2}dk=-\Big[\frac{\mathrm{e}^{-k^2}-\mathrm{e}^{-k^2(t+1)}}{\sqrt{\pi}\,k}\Big]_{-\infty}^{\infty}-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-k^2}dk+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(t+1)\mathrm{e}^{-k^2(t+1)}dk .$$

Como el primer corchete se anula en $\pm\infty$, y haciendo en la última integral el cambio $s=k\sqrt{t+1}$,

se convierte en $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t+1}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-s^2}ds=2\sqrt{t+1}$, concluimos que: $\boxed{u(0,t)=2\sqrt{t+1}-2}$.

[Es normal que tienda a ∞. Estamos constantemente metiendo calor en toda la varilla].

2. i] Hallar los autovalores y autofunciones del problema $\begin{cases} X''+2X'+\lambda X=0 \\ X(0)=X(1)+X'(1)=0 \end{cases}$.

ii] Resolver $\begin{cases} u_t-u_{xx}-2u_x=0\,,\ x\in(0,1)\,,\ t>0 \\ u(x,0)=e^{-x}\,,\ u(0,t)=u(1,t)+u_x(1,t)=0 \end{cases}$.

[Se puede hacer directamente o tras un cambio $u=e^{pt+qx}w$ que lleve la ecuación a una más sencilla].

i] $\mu^2+2\mu+\lambda=0\,,\ \mu=-1\pm\sqrt{1-\lambda}$. La ecuación en forma S-L queda $\left[e^{2x}X'\right]'+\lambda e^{2x}X=0$.

Aunque los $\lambda\geq0$, hay que discutir $\lambda<,=,>1$. Llamamos $p=\sqrt{1-\lambda}$ y $w=\sqrt{\lambda-1}$.

$\lambda<1$: $X=c_1e^{(-1+p)x}+c_2e^{(-1-p)x}$, $X'=c_1(p-1)e^{(-1+p)x}-c_2(1+p)e^{(-1-p)x}\to$

$\left.\begin{array}{l} c_1+c_2=0 \\ c_1pe^{-1+p}-c_2pe^{-1-p}=0 \end{array}\right\}\to c_1pe^{-1}\left[e^p+e^{-p}\right]=0\to c_1=c_2=0$ no autovalor.

$\lambda=1$: $X=[c_1+c_2x]\,e^{-x}$, $X'=[c_2-c_1-c_2x]\,e^{-x}\to \left.\begin{array}{l} c_1=0 \\ c_2=0 \end{array}\right\}\to X\equiv0$. $\lambda=1$ no autovalor.

$\lambda>1$: $X=[c_1\cos wx+c_2\operatorname{sen} wx]\,e^{-x}\xrightarrow{X(0)=0}c_1=0\to X(1)+X'(1)=c_2\left[w\cos wx\right]e^{-x}\to$

$w_n=\frac{(2n-1)\pi}{2}\,,\ n=1,2,\dots\to \boxed{\lambda_n=1+w_n^2\,,\ X_n=\{e^{-x}\operatorname{sen} w_nx\}}$.

ii] $u=XT\to\frac{X''+2X'}{X}=\frac{T'}{T}=-\lambda\to\begin{cases} X''+2X'+\lambda X=0 \\ X(0)=X(1)+X'(1)=0 \end{cases}$ y $T'+\lambda T=0\xrightarrow{\lambda=\lambda_n}T_n=\{e^{-\lambda_nt}\}$

$\to u(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n\,e^{-\lambda_nt}\,e^{-x}\operatorname{sen} w_nx\to u(x,0)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n\,e^{-x}\operatorname{sen} w_nx=e^{-x}\to$

$1=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n\operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi x}{2}$, $c_n=2\int_0^1\operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi x}{2}dx=\frac{4}{\pi(2n-1)}$, $\boxed{u=\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-x-t-(2n-1)^2\pi^2t/4}}{2n-1}\operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi x}{2}}$.

Sin simplificar el e^{-x}: $e^{-x}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_nX_n(x)\to c_n=\frac{\langle e^{-x},X_n\rangle}{\langle X_n,X_n\rangle}=2\int_0^1\underbrace{e^{2x}}_{\text{peso}}e^{-x}\,e^{-x}\operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi x}{2}dx$,

pues $\langle X_n\,,\,X_n\rangle=2\int_0^1\underbrace{e^{2x}}_{\text{peso}}e^{-2x}\operatorname{sen}^2\frac{(2n-1)\pi x}{2}dx=\frac{1}{2}$.

Con $u=e^{pt+qx}w$ queda $w_t-w_{xx}-(2q+2)w_x+(p-q^2-2q)w=0\to q=p=-1$ lleva al calor. Así pues:

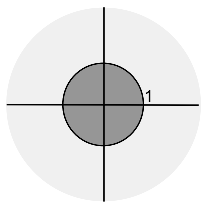
$w=e^{t+x}u\ \left[\to w_x=(u+u_x)e^{t+x}\right]\to\begin{cases} w_t-w_{xx}=0 \\ w(x,0)=1\,,\ w(0,t)=w_x(1,t)=0 \end{cases}\to X_n=\{\operatorname{sen} w_nx\}\,,\ T_n=\{e^{-w_n^2t}\}$.

$\sum c_nT_nX_n$ lleva al desarrollo de antes y haciendo $u=e^{-t-x}w$ llegamos a la solución de arriba.

3a. Hallar la única solución de los problemas en el plano $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=\frac{2\operatorname{sen}\theta}{1+r^2} \\ u(1,\theta)=1\,,\ u \text{ acotada} \end{cases}$:

i] en el círculo $r<1$, **ii]** en la región infinita $r>1$ [¡ojo!, $r\arctan r\underset{r\to\infty}{\to}\infty$].

Separando variables en la homogénea salen: $\Theta''+\lambda\Theta=0$ y $r^2R''+rR'-\lambda R=0$.



Las autofunciones son $\Theta_n=\{\cos n\theta,\operatorname{sen} n\theta\}$, $n=0,1,\dots$ [Θ 2π-periódica].

Probamos en ambos casos: $u(r,\theta)=a_0(r)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[a_n(r)\cos n\theta+b_n(r)\operatorname{sen} n\theta\right]\to$

$a_0''+\frac{1}{r}a_0'+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big[\big(a_n''+\frac{1}{r}a_n'-\frac{n^2}{r^2}a_n\big)\cos n\theta+\big(b_n''+\frac{1}{r}b_n'-\frac{n^2}{r^2}b_n\big)\operatorname{sen} n\theta\Big]=\frac{2}{1+r^2}\operatorname{sen}\theta\to$

$r^2a_0''+ra_0'=0$; $r^2a_n''+ra_n'-n^2a_n=0\,,\ n\geq1$; $r^2b_1''+rb_1'-b_1=\frac{2r^2}{1+r^2}$; $r^2b_n''+rb_n'-n^2b_n=0\,,\ n\geq2$.

$u(1,\theta)=1\Rightarrow a_0(1)=1$ y que las demás se anulan en 1. Sólo tendrán solución no trivial:

$\begin{cases} r^2a_0''+ra_0'=0 \\ a_0(1)=1,\ a_0 \text{ acotada} \end{cases}\to a_0=c_1+c_2\ln r\xrightarrow{\text{c.c.}}a_0=1$, para **i]** y para **ii]**.

$\begin{cases} r^2b_1''+rb_1'-b_1=\frac{2r^2}{1+r^2} \\ b_1(1)=0,\ b_1 \text{ acotada} \end{cases}\to b_1=c_1r+c_2r^{-1}+b_{1p}$. Necesitamos la fvc para la particular:

$\begin{vmatrix} r & r^{-1} \\ 1 & -r^{-2} \end{vmatrix}=-2r^{-1}$, $f(r)=\frac{2}{1+r^2}$, $b_{1p}=-r^{-1}\int\frac{r^2+1-1}{1+r^2}+r\int\frac{1}{1+r^2}=\left(r+\frac{1}{r}\right)\arctan r-1$.

No es trivial imponer la condición de acotación. En $r<1$, como $\frac{\arctan r}{r}\xrightarrow{r\to0}1$, debe ser $c_2=0$.

Imponiendo la otra: $c_1+2\arctan 1-1=0\to b_1=(1-\frac{\pi}{2})r+(r+\frac{1}{r})\arctan r-1$, para **i]**.

En el infinito $b_{1p}\sim\frac{\pi}{2}r-1$. Para que b_1 pueda estar acotada debemos tomar $c_1=-\frac{\pi}{2}$. Además:

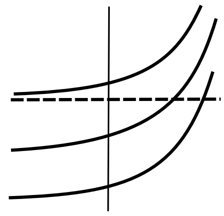
$-\frac{\pi}{2}+c_2+\frac{\pi}{2}-1=0\to b_1=\frac{1}{r}-\frac{\pi}{2}r+(r+\frac{1}{r})\arctan r-1$, para **ii]**. $\left[\frac{\arctan r-\pi/2}{1/r}\underset{r\to\infty}{\longrightarrow}-1\right]$.

i] $\boxed{u=1+\left[r-\frac{\pi}{2}r+(r+\frac{1}{r})\arctan r-1\right]\operatorname{sen}\theta}$; **ii]** $\boxed{u=1+\left[\frac{1}{r}-\frac{\pi}{2}r+(r+\frac{1}{r})\arctan r-1\right]\operatorname{sen}\theta}$.

Soluciones del examen de septiembre09 de Ecuaciones Diferenciales II (grupo C piloto)

1. Resolver $\begin{cases} u_t+\mathrm{e}^t u_x+2tu=0 \\ u(x,0)=f(x) \end{cases}$, **i]** a traves de las características, **ii]** utilizando transformadas de Fourier.

i] $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\mathrm{e}^t}$, $x=\int \mathrm{e}^t dt+C \;\to\; x-\mathrm{e}^t=C$ características.



$\begin{cases} \xi=x-\mathrm{e}^t \\ \eta=t \text{ (mejor)} \end{cases} \to u_\eta=-2tu \to u=p(\xi)\,\mathrm{e}^{-\eta^2}=p\left(x-\mathrm{e}^t\right)\mathrm{e}^{-t^2}$.

$\Big[$Con $\eta=x$ queda la ecuación más complicada $u_\eta=\frac{2\log(\eta-\xi)\,u}{\xi-\eta}\Big]$.

$u(x,0)=p(x-1)=f(x)$, $p(v)=f(v+1) \to \boxed{u(x,t)=f\left(x-\mathrm{e}^t+1\right)\mathrm{e}^{-t^2}}$.

[Solución única, pues $t=0$ no es tangente a las características, o porque: $\Delta=1\cdot 1-0\cdot 1=1\neq 0\ \forall x$].

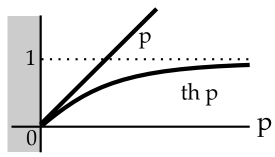
ii] $\begin{cases} \hat{u}_t-ik\mathrm{e}^t\hat{u}+2t\hat{u}=0 \\ \hat{u}(k,0)=\hat{f}(k) \end{cases} \to \hat{u}(k,t)=p(k)\,\mathrm{e}^{ik\mathrm{e}^t-t^2} \xrightarrow{c.i.} p(k)\,\mathrm{e}^{ik}=\hat{f}(k) \to \hat{u}(k,t)=\hat{f}(k)\,\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{ik(\mathrm{e}^t-1)}$.

Y como $\mathcal{F}^{-1}\left[\hat{f}(k)\,\mathrm{e}^{ika}\right]=f(x-a)$, la solución es $\boxed{u(x,t)=\mathrm{e}^{-t^2}f\left(x-\mathrm{e}^t+1\right)}$, como antes.

2. i] Sea $\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=X(1)-X'(1)=0 \end{cases}$. Hallar sus autovalores y autofunciones y comprobar que la primera autofunción es ortogonal a todas las demás.

ii] Resolver $\begin{cases} u_t-u_{xx}+2u=2\,,\ x\in(0,1)\,,\ t>0 \\ u(x,0)=1-x\,,\ u(0,t)=u(1,t)-u_x(1,t)=1 \end{cases}$ por separación de variables.

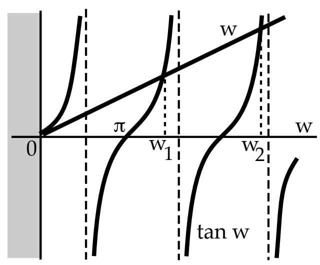
i] Como $\beta\beta'<0$ el problema puede tener autovalores negativos:



$\lambda<0\,,\ \sqrt{-\lambda}=p \to \begin{array}{l} X=c_1\mathrm{e}^{px}+c_2\mathrm{e}^{-px} \\ X'=p(c_1\mathrm{e}^{px}-c_2\mathrm{e}^{-px}) \end{array} \to \begin{array}{l} c_1+c_2=0 \quad\searrow \\ c_1\left[(\mathrm{e}^p-\mathrm{e}^{-p})-p(\mathrm{e}^p+\mathrm{e}^{-p})\right]=0 \end{array}$

$\to c_1=c_2=0$, pues $p\neq\frac{\mathrm{e}^p-\mathrm{e}^{-p}}{\mathrm{e}^p+\mathrm{e}^{-p}}=\mathrm{th}\,p$, si $p>0$ $\left[\mathrm{th}'(0)=1\right]$.

$\lambda=0 \to \begin{array}{l} X=c_1+c_2x \\ X'=c_2 \end{array} \to \begin{array}{l} c_1=0 \\ c_1+c_2-c_2=c_1=0 \end{array} \to \lambda=0$ autovalor, $X_0=\{x\}$.



$\lambda>0\,,\ \sqrt{\lambda}=w \to X=c_1\cos wx+c_2\,\mathrm{sen}\,wx \to \begin{array}{l} c_1=0 \quad\searrow \\ c_2[\mathrm{sen}\,w-w\cos w]=0 \end{array}$

$\to$ infinitos w_n con $\tan w_n=w_n \to \lambda_n=w_n^2$, $X_n=\{\mathrm{sen}\,w_nx\}$.

Todas las X_n deben ser ortogonales. En particular:

$\int_0^1 x\,\mathrm{sen}\,w_nx\,dx=-\frac{x\cos w_nx}{w_n}\Big]_0^1+\int_0^1\frac{\cos w_nx}{w_n}dx=\frac{\mathrm{sen}\,w_n-w_n\cos w_n}{w_n^2}=0$.

ii] Para hacer las condiciones de contorno homogéneas necesitamos una v que las cumpla.

A simple vista: $v=1 \xrightarrow{w=u-1} \begin{cases} w_t-w_{xx}+2w=0 \\ w(x,0)=-x\,,\ w(0,t)=w(1,t)-w_x(1,t)=0 \end{cases}$

$w=XT \to XT'-X''T+2XT=0 \to \frac{X''}{X}=\frac{T'}{T}+2=-\lambda \to \begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=X(1)-X'(1)=0 \end{cases}$ y $T'+(\lambda+2)T=0$.

Las autofunciones del problema en x son las de arriba: $\{x\}$ y $\{\mathrm{sen}\,w_nx\}$. Probamos entonces:

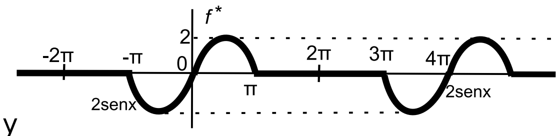
$$w(x,t)=c_0\,\mathrm{e}^{-2t}x+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\,\mathrm{e}^{-\left(w_n^2+2\right)t}\,\mathrm{sen}\,w_nx \;\to\; w(x,0)=c_0x+\sum_{n=0}^{\infty}c_n\,\mathrm{sen}\,w_nx=-x$$

$\to c_0=-1$ y los demás c_n son cero. Así pues, $\boxed{u(x,t)=1-\mathrm{e}^{-2t}x}$.

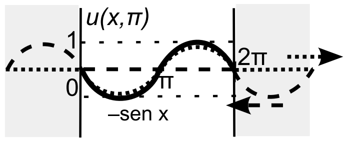
[Que conste que con estas condiciones de contorno 'no físicas' no sabemos probar la unicidad (ni para el calor ni para esta ecuación similar), con lo que tal vez (o tal vez no) pudieran existir otras soluciones no calculables por separación de variables].

3a. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\in[0,2\pi]\,,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=\begin{cases} 2\,\text{sen}\,x\,,\ x\in[0,\pi] \\ 0\ ,\ x\in[\pi,2\pi]\end{cases},\ u_t(x,0)=0\,. \\ u(0,t)=u(2\pi,t)=0 \end{cases}$ Dibujar $u(x,\pi)$ y hallar su expresión utilizando la fórmula de D'Alembert.

La solución $u(x,t)=\frac{1}{2}\big[f^*(x+t)+f^*(x-t)\big]$, con f^* extensión impar y 4π-periódica de la f inicial.



Para dibujar $u(x,\pi)$ basta trasladar $\frac{1}{2}f(x)$ a la izquierda y a la derecha π unidades y sumar las gráficas en $[0,2\pi]$.
[Sólo queda lo que va a la derecha con la mitad de altura].



Como para $x\in[0,2\pi]$ siempre $x+\pi\in[\pi,3\pi]$ y $x-\pi\in[-\pi,\pi]$ y en todo este intervalo es $f^*(x)=2\,\text{sen}\,x$ ($\text{sen}\,x$ impar), es:

$$u(x,\pi)=\tfrac{1}{2}\big[f^*(x+\pi)+f^*(x-\pi)\big]=\tfrac{1}{2}\big[0+2\,\text{sen}(x-\pi)\big]=\boxed{-\text{sen}\,x}\ \text{ para cualquier } x\in[0,2\pi]\,.$$

3b. Hallar la solución $u(x,t)$ del problema de **3a** por separación de variables y comprobar la expresión de $u(x,\pi)$ obtenida allí.

$$u=XT\ \to \begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=X(2\pi)=0\end{cases} \to\ \lambda_n=\tfrac{n^2}{4}\,,\ X_n=\big\{\text{sen}\,\tfrac{nx}{2}\big\}\,,\ n=1,2,\ldots\ \text{ y } \begin{cases} T'+\lambda T=0 \\ T'(0)=0\end{cases} \to\ T_n=\big\{\cos\tfrac{nt}{2}\big\}\,.$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos\tfrac{nt}{2}\,\text{sen}\,\tfrac{nx}{2}\ \to\ u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\,\text{sen}\,\tfrac{nx}{2}=\begin{cases} 2\,\text{sen}\,x\,,\ x\in[0,\pi] \\ 0\ ,\ x\in[\pi,2\pi]\end{cases}\ \to$$

$$c_n=\tfrac{2}{2\pi}\int_0^{\pi}2\,\text{sen}\,x\,\text{sen}\,\tfrac{nx}{2}\,dx=\tfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\Big[\cos\big(\tfrac{n}{2}-1\big)x-\cos\big(\tfrac{n}{2}+1\big)x\Big]dx\underset{n\neq 2}{=}\tfrac{1}{\pi}\Bigg[\frac{\text{sen}(\frac{n}{2}-1)\pi}{\frac{n}{2}-1}-\frac{\text{sen}(\frac{n}{2}+1)\pi}{\frac{n}{2}+1}\Bigg]$$

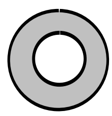
$$=\tfrac{2}{\pi}\Big[-\frac{\text{sen}\,\frac{n\pi}{2}}{n-2}+\frac{\text{sen}\,\frac{n\pi}{2}}{n+2}\Big]=-\frac{8\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{2}}{\pi(n^2-4)}=\begin{cases} 0\,,\ n=2m \\ \frac{8}{\pi}\frac{(-1)^m}{(2m-1)^2-4}\,,\ n=2m-1\end{cases}.\ \text{Además } c_2=\tfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[1-\cos 2x]dx=1\,.$$

$$\to\ \boxed{u(x,t)=\cos t\,\text{sen}\,x+\frac{8}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m-1)^2-4}\cos\frac{(2m-1)t}{2}\,\text{sen}\,\frac{(2m-1)x}{2}}$$

$$\to\ u(x,\pi)=-\,\text{sen}\,x\,,\ \text{pues } \cos\pi=-1\ \text{ y } \cos\tfrac{(2m-1)\pi}{2}=0\,.$$

4. Hallar la solución del problema plano $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=r^2\cos 2\theta\,,\ 1<r<2 \\ u(1,\theta)=u(2,\theta)=0\end{cases}$.

Separando variables en el homogéneo aparecen $\Theta''+\lambda\Theta=0$ y $r^2R''+rR'-\lambda R=0$.



Las autofunciones las da siempre Θ, para la que las condiciones de contorno son las implícitas $\begin{matrix}\Theta(0)=\Theta(2\pi) \\ \Theta'(0)=\Theta'(2\pi)\end{matrix}$ [o sea, Θ 2π-periódica] $\to$ $\Theta_n=\{\cos n\theta,\text{sen}\,n\theta\}$, $n=0,1,\ldots$.

Probamos, pues: $u(r,\theta)=a_0(r)+\sum_{n=1}^{\infty}\big[a_n(r)\cos n\theta+b_n(r)\,\text{sen}\,n\theta\big]\to$

$$a_0''+\tfrac{1}{r}a_0'+\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\big(a_n''+\tfrac{1}{r}a_n'-\tfrac{n^2}{r^2}a_n\big)\cos n\theta+\big(b_n''+\tfrac{1}{r}b_n'-\tfrac{n^2}{r^2}b_n\big)\,\text{sen}\,n\theta\Big]=r^2\cos 2\theta\ \to$$

De los datos de contorno deducimos que $a_n(1)=a_n(2)=b_n(1)=b_n(2)=0\ \ \forall n$.

Sólo uno de los problemas para las ecuaciones de Euler no tiene solución trivial:

$$\begin{cases} r^2a_2''+ra_2'-4a_2=r^4 \\ a_2(1)=a_2(2)=0\end{cases}\xrightarrow{a_{2p}=Ar^4}\ a_2=c_1r^2+c_2r^{-2}+\tfrac{1}{12}r^4\ \xrightarrow{\text{c.c.}}\ \begin{matrix} c_1+c_1+\frac{1}{12}=0 \\ 4c_1+\frac{1}{4}c_2+\frac{4}{3}=0\end{matrix}\ \to\ a_2=\frac{r^4}{12}-\frac{7r^2}{20}+\frac{4}{15r^2}\,.$$

$\Big[$Más largo es hallar a_{2p} con la fvc: $\begin{vmatrix} r^2 & r^{-2} \\ 2r & -2r^{-3}\end{vmatrix}=-\frac{4}{r}$, $a_{2p}=r^{-2}\int\frac{r^4}{-4/r}-r^2\int\frac{1}{-4/r}=-\frac{r^4}{24}+\frac{r^4}{8}=\frac{r^4}{12}\Big]$.

La solución (única) es, por tanto, $\boxed{u(r,\theta)=\Big[\frac{r^4}{12}-\frac{7r^2}{20}+\frac{4}{15r^2}\Big]\cos 2\theta}$.