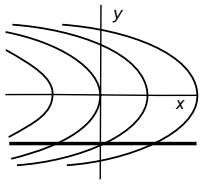
Soluciones del examen final de junio de 2012 de Métodos Matemáticos II (grupos D y E)

1. Hallar la solución de $u_y-2yu_x=4xy$ que cumple $u(x,-1)=2x+1$. ¿Es única? [2 puntos]

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2y}\to\xi=x+y^2 \begin{cases}\nearrow \eta=y\to u_\eta=4\eta\xi-4\eta^3\,,\ u=2\eta^2\xi-\eta^4+p(\xi)=2y^2x+y^4+p(x+y^2)\\ \searrow \eta=x\to u_\eta=-2\eta\,,\ u=p^*(\xi)-\eta^2=p^*(x+y^2)-x^2\end{cases}$$

$$u(x,-1)=2x+1 \begin{cases}\nearrow p(x+1)+2x+1=2x+1\ \to\ p(v)=0\ \searrow\\ \searrow p^*(x+1)-x^2=2x+1\ \to\ p^*(v)=v^2\ \nearrow\end{cases}\ \boxed{u(x,y)=2y^2x+y^4}$$



Solución única, pues $y=1$ no tangente a las características o $\Delta=1\cdot1-0(-2)=1\neq0$.

2. Sea $3xy''+y'+xy=0$. Hallar los 3 primeros términos no nulos del desarrollo en serie de una solución que no sea analítica en $x=0$, encontrando la regla de recurrencia. [2 puntos]

$x=0$ es punto singular regular de $x^2y''+x\frac{1}{3}y'+\frac{x^2}{3}y=0$ con $\lambda(\lambda-1)+\frac{1}{3}\lambda=0\ \to\ \lambda_1=\frac{2}{3}$, $\lambda_2=0$.

Es no analítica en $x=0$ (ni siquiera es derivable) la solución $y_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+2/3}$, $c_0\neq0$

[la serie solución convergerá en todo **R**, pues lo hacen a^* y b^*].

$$\to\ \sum_0\left[3(k+\tfrac{2}{3})(k-\tfrac{1}{3})c_kx^{k-1/3}+(k+\tfrac{2}{3})c_kx^{k-1/3}+c_kx^{k+5/3}\right]=\sum_0\left[k(3k+2)c_kx^{k-1/3}+c_kx^{k+5/3}\right]=0$$

$\to$ $x^{-1/3}$: $0\cdot c_0=0$, c_0 indeterminado; $x^{2/3}$: $5c_1=0$, $c_1=0$; $x^{5/3}$: $16c_2+c_0=0$, $c_2=-\frac{1}{16}c_0$;

$x^{k-1/3}$: $c_k=-\frac{1}{k(3k+2)}c_{k-2}\ \to\ c_3=c_5=\cdots=0$, $c_4=-\frac{1}{56}c_2=\frac{1}{896}c_0\ \to\ \boxed{y_1=x^{2/3}\left[1-\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{896}x^4-\cdots\right]}$.

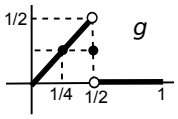
3. Sean $g(x)=\begin{cases}x,\ 0\le x\le1/2\\ 0,\ 1/2<x\le1\end{cases}$, (P) $\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=0,\ x\in[0,1],\ t\in\mathbf{R}\\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=g(x),\ u(0,t)=u(1,t)=0\end{cases}$ y $u(x,t)$ la solución de (P).

a] Desarrollar g en serie de $\{\operatorname{sen}n\pi x\}$ y precisar el valor de la suma de la serie para: i) $x=\frac{1}{4}$, ii) $x=\frac{1}{2}$.

Elegir **b$_1$]** o **b$_2$]**: **b$_1$]** Hallar el valor de $u(\frac{1}{2},\frac{3}{4})$ utilizando D'Alembert. **b$_2$]** Resolver (P) mediante separación de variables. [2.5 puntos]

a] $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\operatorname{sen}n\pi x$ con $b_n=\frac{2}{1}\int_0^{1/2}x\operatorname{sen}n\pi x\,dx=-\frac{2x}{n\pi}\cos n\pi x\Big]_0^{1/2}+\frac{2}{n\pi}\int_0^{1/2}\cos n\pi x\,dx$

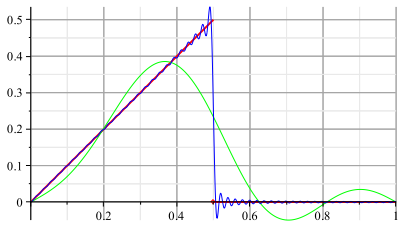
$$\boxed{b_n=\frac{2}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}-\frac{1}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}}.$$



La suma de la serie en $x=\frac{1}{4}$ y en $x=\frac{1}{2}$ será $\frac{1}{4}$ (pues g es continua en $x=\frac{1}{4}$ y $\frac{1/2+0}{2}=\frac{1}{4}$).

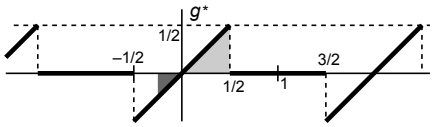
[En $\frac{1}{2}$ se puede comprobar: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}^2\frac{n\pi}{2}=\frac{2}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}=\frac{1}{4}$, pues vimos en problemas que la suma de la serie era $\frac{\pi^2}{8}$].

Con el ordenador se puede observar como el desarrollo converge hacia g. En el dibujo de la derecha aparece junto las sumas parciales 5 y 100:



b$_1$] Para usar D'Alembert extendemos g a g^* impar y 2-periódica. (Que es precisamente hacia lo que converge la serie de **a]**).

Entonces es: $u(\frac{1}{2},\frac{3}{4})=\frac{1}{2}\int_{-1/4}^{5/4}g^*=\frac{1}{2}\int_{-1/4}^{1/2}x\,dx=\frac{1}{16}-\frac{1}{64}=\boxed{\frac{3}{64}}$.



b$_2$] $\begin{cases}X''+\lambda X=0\\ X(0)=X(1)=0\end{cases}$, $\lambda_n=n^2\pi^2$, $X_n=\{\operatorname{sen}n\pi x\}$; $\begin{cases}T''+\lambda_nT=0\\ T(0)=0\end{cases}$, $T_n=\{\operatorname{sen}n\pi t\}$ $\to$ $u=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\operatorname{sen}n\pi t\operatorname{sen}n\pi x$.
$n=1,2,\ldots$

$u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}n\pi c_n\operatorname{sen}n\pi x=g(x)\ \to\ c_n=\frac{b_n}{n\pi}$, $\boxed{u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{n^3\pi^3}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}-\frac{1}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}\right]\operatorname{sen}n\pi t\operatorname{sen}n\pi x}$.

4A. Resolver $\begin{cases} u_t - u_{xx} + u = 4t\cos x\,,\ x\in(0,\pi)\,,\ t>0 \\ u(x,0)=1\,,\ u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=0 \end{cases}$. [2 puntos]

Autofunciones del homogéneo: $u=XT \to \frac{X''}{X}=\frac{T'}{T}+1=-\lambda \to \begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X'(0)=X'(\pi)=0 \end{cases} \to X_n=\{\cos nx\}\,,\ n=0,1,2,\ldots$

Probamos $u=T_0(t)+\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\cos nx:\ T_0'+T_0+\sum_{n=1}^{\infty}[T_n'+(n^2+1)T_n]\cos nx=4t\cos x\,,\ T_0(0)+\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\cos nx=1$.
(ya desarrollada)

$\begin{cases} T_0'+T_0=0 \\ T_0(0)=1 \end{cases} \to T_0=\mathrm{e}^{-t}\ ;\ \begin{cases} T_1'+2T_1=4t \\ T_1(0)=0 \end{cases},\ T_{1p}=At+B \to T_1=C\mathrm{e}^{-2t}+2t-1 \underset{\text{d.i.}}{\to} C=1$ (y los demás $T_n\equiv 0$)

$$\Rightarrow \boxed{u(x,t)=\mathrm{e}^{-t}+(2t-1+\mathrm{e}^{-2t})\cos x}\ .$$

4B. Resolver el problema plano $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=\cos\theta\,,\ r<2 \\ u(2,\theta)=\operatorname{sen}2\theta \end{cases}$. [2 puntos]

Las autofunciones del homogénero las da: $\begin{cases} \Theta''+\lambda\Theta=0 \\ \Theta\ \ 2\pi\text{-per.} \end{cases} \to \lambda_n=n^2\,,\ \Theta_n=\{\cos n\theta\,,\operatorname{sen}n\theta\}\,,\ n=0,1,\ldots \to$

$$u=a_0(r)+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n(r)\cos n\theta+b_n(r)\operatorname{sen}n\theta] \to \frac{ra_0''+a_0'}{r}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{r^2a_n''+ra_n'-n^2a_n}{r^2}\cos n\theta+\frac{r^2b_n''+rb_n'-n^2b_n}{r^2}\operatorname{sen}n\theta\Big]=\cos\theta\,.$$

[No basta probar algo menos general como $R_0(r)+\sum R_n(r)[a_n\cos n\theta+b_n\operatorname{sen}n\theta]$; se debe dar libertad a $a_n(r)$ y $b_n(r)$].

De los datos de contorno: $a_n(2)=0$; $b_n(2)=0\,,\ n\neq 2$; $b_2(2)=1$ y todas deben estar acotadas en el círculo.

Por tanto, $a_{n\neq 1}, b_{n\neq 2}\equiv 0$ (es solución y hay unicidad). Y además:

$$\begin{cases} r^2a_1''+ra_1'-a_1=r^2 \\ \text{acotada y } a_1(2)=0 \end{cases} \xrightarrow[2A+2A-A=1]{a_{1p}=Ar^2} a_0=c_1r+c_2r^{-1}+\frac{r^2}{3} \to \begin{matrix} c_2=0 \\ 2c_1+\frac{4}{3}=0 \end{matrix} \to a_1(r)=\frac{r^2}{3}-\frac{2r}{3}\ ;$$

$$\Big[\text{Más largo con la fvc: } \begin{vmatrix} r & r^{-1} \\ 1 & -r^{-2} \end{vmatrix}=-2r^{-1}\,,\ a_{1p}=r^{-1}\int\frac{r\cdot 1}{-2r^{-1}}-r\int\frac{r^{-1}\cdot 1}{-2r^{-1}}=\frac{r^2}{3}\Big].$$

$$\begin{cases} r^2b_2''+rb_2'-4b_2=0 \\ \text{acotada y } b_2(2)=1 \end{cases} \to b_2=c_1r^2+c_2r^{-2} \to \begin{matrix} c_2=0 \\ 4c_1=1 \end{matrix} \to b_2(r)=\frac{r^2}{4} \to$$

$$\boxed{u(r,\theta)=\frac{1}{3}r(r-2)\cos\theta+\frac{1}{4}r^2\operatorname{sen}2\theta}\ .$$

5A. Resolver el problema espacial $\begin{cases} u_{rr}+\frac{2}{r}u_r+\frac{1}{r^2}\Big[u_{\theta\theta}+\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}u_\theta\Big]=0\,,\ 1<r<2 \\ u(1,\theta)=\cos\theta\,,u(2,\theta)=0\,,\ \theta\in[0,\pi] \end{cases}$ [1.5 puntos]

Sabemos que al separar variables $u=R\Theta$ aparecen: $(\operatorname{sen}\theta\,\Theta')'+(\lambda\operatorname{sen}\theta)\Theta=0$ y $r^2R''+2rR'-\lambda R=0$.

La acotación en $\theta=0,\pi$ nos da los autovalores $\lambda_n=n(n+1)$ y autofunciones $\Theta_n=\{P_n(\cos\theta)\}\,,\ n=0,1,\ldots$

Para esos λ_n la ecuación en R tiene por solución $R=c_1r^n+c_2r^{-n-1}$ y de imponer $u(r,2)=R(2)\Theta(\theta)=0$ resulta $R(2)=c_12^n+c_22^{-n-1}=0 \to R_n=\{r^n-2^{2n+1}r^{-n-1}\} \to u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n[r^n-2^{2n+1}r^{-n-1}]P_n(\cos\theta)$.

Sólo falta un dato: $u(1,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n[1-2^{2n+1}]P_n(\cos\theta)=\cos\theta=P_1(\cos\theta) \to a_1=-\frac{1}{7}$ y los demás cero.

Así pues, la solución en nuestra corona esférica es: $\boxed{u(r,\theta)=\frac{1}{7}[8r^{-2}-r]\cos\theta}$.

5B. Resolver $\begin{cases} u_t-2u_{xx}+tu=0\,,\ x\in\mathbf{R},\ t>0 \\ u(x,0)=\mathrm{e}^{-x^2/8}\,,\ u \text{ acotada} \end{cases}$, utilizando la transformada de Fourier. [1.5 puntos]

$$\begin{cases} \hat{u}_t+(2k^2+t)\hat{u}=0 \\ \hat{u}(k,0)=2\mathrm{e}^{-2k^2} \end{cases} \xrightarrow[\text{EDO en } t]{} \hat{u}(k,t)=p(k)\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{e}^{-2k^2t} \underset{\text{d.i.}}{=} 2\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{e}^{-2(1+t)k^2} \xrightarrow[t\text{ cte}]{} \boxed{u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{8(1+t)}}}\ .$$

Sólo hemos tenido que utilizar: $\mathcal{F}[f'']=-k^2\hat{f}$, $\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-ax^2}]=\frac{1}{\sqrt{2a}}\,\mathrm{e}^{-k^2/4a}$ y $\mathcal{F}^{-1}[\mathrm{e}^{-ak^2}]=\frac{1}{\sqrt{2a}}\,\mathrm{e}^{-x^2/4a}$.

Soluciones del examen de septiembre de 2012 de Métodos Matemáticos II (grupos D y E)

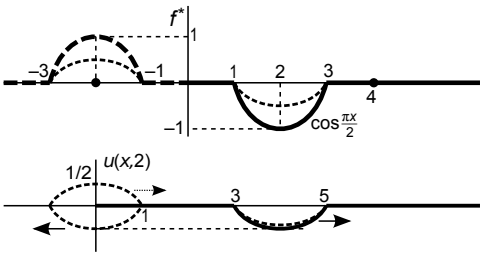
1A. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\geq 0\,,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=\begin{cases}\cos\frac{\pi x}{2}\,,\ x\in[1,3] \\ 0\,,\ x\in[0,1]\cup[3,\infty)\end{cases}\,,\ u_t(x,0)=u(0,t)=0 \end{cases}$. **a]** Hallar $u(1,3)$. **b]** Dibujar $u(x,2)$. [1.5 puntos]

Para usar D'Alembert hay que extender impar a todo $\mathbf{R}$:

a] $u(1,3)=\frac{1}{2}\Big[f^*(4)+f^*(-2)\Big]=\frac{1}{2}\Big[0-f(2)\Big]=-\frac{1}{2}\cos\pi=\boxed{\frac{1}{2}}$.

b] $u(x,2)=\frac{1}{2}\left[f^*(x+2)+f^*(x-2)\right]$. Basta trasladar la gráfica de $\frac{1}{2}f^*$ a izquierda y derecha 2 unidades y sumar:

[En ese instante sólo está la onda que va hacia la derecha, pues se cancela la que va hacia la izquieda con la de la extensión que va hacia la derecha].



1B. Sea $y''+xy'+y=0$. Hallar los 3 primeros términos no nulos del desarrollo en serie de una solución no trivial que se anule en $x=0$, encontrando la regla de recurrencia. [1.5 puntos]

$x=0$ es punto regular. Para que la solución se anule en $x=0$ elegimos $c_0=0$ y $c_1=1$.

$$y_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k\ \to\ \sum_2 k(k-1)c_kx^{k-2}+\sum_1 kc_kx^k+\sum_0 c_kx^k=0\ \to$$

$$x^0:\ 2c_2+c_0=0\,,\ c_2=\tfrac{1}{2}c_0=0\ ;\ \ x^1:\ 6c_3+2c_1=0\,,\ c_3=-\tfrac{1}{3}c_1=-\tfrac{1}{3}\ ;\ \ x^{k-2}:\ k(k-1)c_k+(k-1)c_{k-2}=0\,,$$

$$\boxed{c_k=-\tfrac{1}{k}\,c_{k-2}}\ \to\ c_4=c_6=\cdots=0\,,\ c_5=-\tfrac{1}{5}c_3=\tfrac{1}{15}\ \to\ \boxed{y=x-\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{15}x^5-\cdots}\,.$$

[Más largo (y sin encontrar regula de recurrencia). Partiendo de $y(0)=0$ e $y'(0)=1$.
Derivando la ecuación: $y'''+xy''+2y'=0$, $y^{iv}+xy'''+3y''=0$, $y^{v}+x^{iv}+4y'''=0\ \to$
$y'''(0)=-2y'(0)=-2$, $y^{iv}(0)=-3y''(0)=0$, $y^{v}(0)=-4y'''(0)=8\ \to\ y=x-\frac{2}{6}x^3+\frac{8}{120}x^5-\cdots$].

1C. Sea $\begin{cases} xy''-2y'=2 \\ y(1)+y'(1)=y(2)=0 \end{cases}$. Escribir la ecuación en forma autoadjunta. Determinar cuántas soluciones tienen el problema homogéneo y el no homogéneo. [1.5 puntos]

$y''-\frac{2}{x}y'=\frac{2}{x}$. Multiplicando por $e^{-2/x}=\frac{1}{x^2}$, obtenemos la forma autoadjunta de la ecuación: $\left[\frac{y'}{x^2}\right]'=\frac{2}{x^3}$.

La ecuación homogénea es de Euler $x^2y''-2xy'=0$, $\mu=0,3\ \to\ y=c_1+c_2x^3$ $\left[\text{o } v'=\frac{2}{x}v,\ v=Cx^2,\ y=K+Cx^3\right]$.

Imponiendo los datos: $\begin{matrix} c_1+4c_2=0 \\ c_1+8c_2=0 \end{matrix}\ \Rightarrow c_1=c_2=0$. **El homogéno tiene sólo la solución trivial** $y\equiv 0$, $\Rightarrow$ **el no homogéneo tiene una única solución**.

[No se pide, pero es fácil calcular esta solución única: $y_p=Ax\to A=-1\to y=c_1+c_2x^3-x$.
Imponiendo datos: $\begin{matrix} c_1+4c_2-2=0 \\ c_1+8c_2-2=0 \end{matrix}\ \Rightarrow c_1=2,\ c_2=0,\ y=2-x$].

2. Resolver por separación de variables: $\begin{cases} u_t-\frac{1}{t}u_{xx}=2\cos x\,,\ x\in(0,\frac{\pi}{2})\,,\ t>1 \\ u(x,1)=\cos 3x\,,\ u_x(0,t)=u(\frac{\pi}{2},t)=0 \end{cases}$. [2 puntos]

Autofunciones del homogéneo: $u=XT\ \to\ \frac{X''}{X}=\frac{tT'}{T}=-\lambda\ \to\ \begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X'(0)=X(\frac{\pi}{2})=0 \end{cases}\ \to X_n=\{\cos(2n-1)x\}$, $n=1,2,\ldots$

Probamos $u=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\cos(2n-1)x$: $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n'+\frac{n^2}{t}T_n\right]\cos(2n-1)x=2\cos x}_{\text{(ya desarrollada)}}$, $\underbrace{u(x,1)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(1)\cos(2n-1)x=\cos 3x}_{\text{(ya desarrollada)}}$.

$$\begin{cases} T_1'=-\frac{1}{t}T_1+2 \\ T_1(1)=0 \end{cases}\ \to\ T_1=\frac{C}{t}+\frac{1}{t}\int 2t\,dt=\frac{C}{t}+t\ \xrightarrow[d.i.]{}\ T_1=t-\frac{1}{t}$$

$$\begin{cases} T_2'=-\frac{9}{t}T_2 \\ T_2(1)=1 \end{cases}\ \to\ T_2=Ce^{-9\ln t}=Ct^{-9}\ \xrightarrow[d.i.]{}\ C=1\quad(\text{y los demás } T_n\equiv 0)$$

$$\Rightarrow\ \boxed{u(x,t)=(t-t^{-1})\cos x+t^{-9}\cos 3x}\,.$$

3. **a]** Desarrollar $f(\theta)=\cos\theta$ en $\{\operatorname{sen} n\theta\}$ (simplificar el resultado). ¿Converge la serie hacia f en todo $[0,\pi]$?

b] Resolver por separación de variables $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0\,,\ r<1\,,\ 0<\theta<\pi \\ u_r(1,\theta)=\cos\theta\,,\ u(r,0)=u(r,\pi)=0 \end{cases}$. [2.5 puntos]

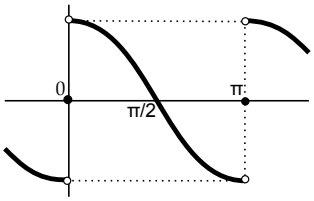
a] $\{\operatorname{sen} n\theta\}$ son autofunciones de problema de contorno en $[0,\pi]$ y sabemos que $\langle \operatorname{sen} n\theta, \operatorname{sen} n\theta\rangle=\frac{\pi}{2}$.

$$\cos\theta=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n\theta \ \to\ b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\theta\operatorname{sen} n\theta\, d\theta=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\big[\operatorname{sen}(n+1)\theta+\operatorname{sen}(n-1)\theta\big]d\theta$$

$$=\frac{1}{\pi}\Big[-\frac{\cos(n+1)\theta}{n+1}-\frac{\cos(n-1)\theta}{n-1}\Big]_0^{\pi}=\frac{1}{\pi}\Big[\frac{1-\cos(n+1)\pi}{n+1}+\frac{1-\cos(n-1)\pi}{n-1}\Big]=\frac{2(1+(-1)^n)n}{\pi(n^2-1)} \quad [=0 \text{ si } n \text{ impar}]$$

Si $n=1$ los cálculos anteriores no valen, pero es $b_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sen} 2\theta\, d\theta=0$, como los demás impares.

Por tanto, $\boxed{\cos\theta=\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{8m}{4m^2-1}\operatorname{sen} 2m\theta}$.



La igualdad se da seguro si $\theta\in(0,\pi)$, por ser f continua en el intervalo.
Pero si $x=0$ y $x=\pi$, obviamente la suma 0 de la serie no coincide con el valor de la función en los puntos (1 y -1 , respectivamente). Esto también es claro si dibujamos la función impar y 2π-periódica hacia la que debía tender la serie.

b] Conocemos las ecuaciones que salen al separar variables:

$$\begin{cases} \Theta''+\lambda\Theta=0 \\ \Theta(0)=\Theta(\pi)=0 \end{cases} \to\ \lambda_n=n^2,\ \Theta_n=\{\operatorname{sen} n\theta\}\,,\ n=1,2,\dots \ \text{ y además } r^2R''+rR'-n^2R=0\,.$$

Las soluciones acotadas de estas ecuaciones de Euler son $R_n=\{r^n\}$, $n=1,2,\dots$, lo que nos lleva a probar:

$u(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n r^n\operatorname{sen} n\theta$. Imponiendo el dato de contorno que falta: $u_r(1,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}nc_n\operatorname{sen} n\theta=\cos\theta$.

Viendo el resutado de **a]** podemos ya escribir la solución (única): $\boxed{u(r,\theta)=\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4}{4m^2-1}r^{2m}\operatorname{sen} 2m\theta}$.

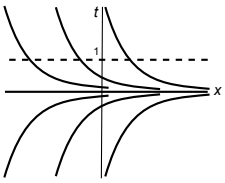
4. Hallar la solución de $\begin{cases} tu_t-u_x=u \\ u(x,1)=f(x) \end{cases}$. **a]** A partir de las características. **b]** Utilizando la transformada de Fourier. [2.5 puntos]

a] $\frac{dt}{dx}=-t$ (lineal), $t=Ce^{-x}\ \to\ te^x=C$ características. $\begin{cases} \xi=te^x \\ \eta=t \end{cases}\ \to\ \eta u_\eta=u\ \to\ u=p(\xi)\,\eta=p(te^x)\,t$.

$$u(x,1)=p(e^x)=f(x)\,,\ p(v)=f(\ln v)\ \to\ \boxed{u(x,t)=tf(x+\ln t)}$$

$\Big[$Con $\begin{cases} \xi=te^x \\ \eta=x \end{cases}$ queda $-u_\eta=u\ \to\ u=p^*(\xi)\,e^{-\eta}=p^*(te^x)\,e^{-x}\xrightarrow{d.i.}p^*(v)\overset{\uparrow}{=}vf(\ln v)\Big]$.

$\Big[$ Única, pues $t=1$ no tangente a las características, o porque: $\Delta=1\cdot 1-0\cdot(-1)=1\neq 0\ \forall x$. $\Big]$.



b] $\begin{cases} t\hat{u}_t+\mathrm{i}\,k\hat{u}=\hat{u} \\ \hat{u}(k,1)=\hat{f}(k) \end{cases}\ \to\ \hat{u}_t=\frac{1-\mathrm{i}\,k}{t}\hat{u}\ \to\ \hat{u}(k,t)=p(k)\,e^{\ln t-\mathrm{i}\,k\ln t}\xrightarrow{c.i.}p(k)=\hat{f}(k)\ \to\ \hat{u}(k,t)=t\hat{f}(k)\,e^{-\mathrm{i}\,k\ln t}$.

Y como $\mathcal{F}^{-1}\big[\hat{f}(k)\,e^{ika}\big]=f(x-a)$, la solución es $\boxed{u(x,t)=tf(x+\ln t)}$, como antes.