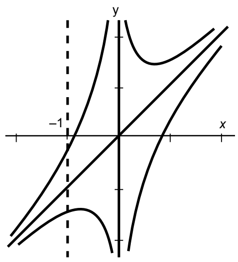
Soluciones del examen final de junio de 2013 de Métodos Matemáticos II (grupos C y E)

1. Resolver $(2x-y)u_y + xu_x = yu$ con el dato $u(-1,y)=1$. [2 puntos]

$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}+2 \xrightarrow{\text{lineal}} y = \frac{C}{x} + \frac{1}{x}\int 2x\,dx = \frac{C}{x}+x$, $x(y-x)=C$ características.

$\begin{cases} \xi=xy-x^2 \\ \eta=x \ \text{[mejor]} \end{cases} \to u_\eta = \frac{y}{x}u = \left(1+\frac{\xi}{\eta^2}\right)u \to u=p(\xi)\,e^{\eta-\frac{\xi}{\eta}} = p(xy-x^2)\,e^{2x-y}$.

$u(-1,y)=p(-y-1)\,e^{-2-y}=1 \to p(v)=e^{1-v}$, $\boxed{u(x,y)=e^{x^2-xy+1+2x-y}=e^{(x+1)(x-y+1)}}$.



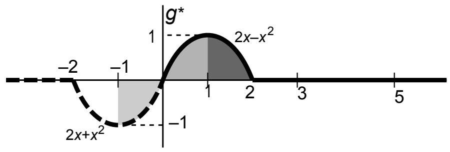
Solución única pues $x=-1$ no es tangente a las características, como prueba el dibujo o $\Delta=0\cdot(-2-y)-1\cdot(-1)=1\neq 0$.

[Más largo sería: $\begin{cases} \xi=xy-x^2 \\ \eta=y \end{cases}$, $\eta^2-4\xi=(2x-y)^2 \to u_\eta=\frac{y}{2x-y}u=\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2-4\xi}}u \to u=p(\xi)\,e^{\sqrt{\eta^2-4\xi}}=p(xy-x^2)\,e^{2x-y}$].

2. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0,\ x\geq 0,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=\begin{cases} 2x-x^2,\ x\in[0,2] \\ 0,\ x\in[2,\infty) \end{cases} \\ u(0,t)=0 \end{cases}$. **a]** Dibujar la extensión g^* y dar su expresión. **b]** Hallar: i) $u(3,2)$, ii) $u(1,2)$. [1.5 puntos]

a] En $[-2,0]$ la expresión de g^* será: $-\left[2(-x)-(-x)^2\right]$ y por tanto:

$g^*(x)=\begin{cases} 2x+x^2 & \text{si } x\in[-2,0] \\ 2x-x^2 & \text{si } x\in[0,2] \\ 0 & \text{en el resto de } \mathbf{R} \end{cases}$. Entonces: $u(x,t)=\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g^*(s)\,ds$.



b] $u(3,2)=\frac{1}{2}\int_1^5 g^* = \frac{1}{2}\int_1^2 (2s-s^2)\,ds = \frac{1}{2}\left[s^2-\frac{s^3}{3}\right]_1^2 = \boxed{\frac{1}{3}}$;

$u(1,2)=\frac{1}{2}\int_{-1}^3 g^* = \frac{1}{2}\int_{-1}^0 (2s+s^2)\,ds + \frac{1}{2}\int_0^2 (2s-s^2)\,ds \underset{g*\ \text{impar}}{=} \frac{1}{2}\int_1^2 (2s-s^2)\,ds = \boxed{\frac{1}{3}}$.

2*. Utilizando sólo la transformada de Fourier, resolver: $\begin{cases} u_{tt}-4u_{xx}=0,\ x\in\mathbf{R},\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=2e^{-x^2/2},\ u_t(x,0)=0 \end{cases}$. [1.5 puntos]

$\begin{cases} \hat{u}_{tt}+4k^2\hat{u}=0 \\ \hat{u}(k,0)=2e^{-k^2/2},\ \hat{u}_t(k,0)=0 \end{cases} \xrightarrow{\mu=\pm 2ki} \hat{u}(k,t)=p(k)\,e^{2kit}+q(k)\,e^{-2kit} \xrightarrow{c.i.} \begin{array}{l} p(k)+q(k)=2e^{-k^2/2} \\ 2ki\left[p(k)-q(k)\right]=0 \to q(k)=p(k) \end{array}$

$2p(k)=2e^{-k^2/2}$, $p(k)=e^{-k^2/2}=q(k)$, $\hat{u}(k,t)=e^{-k^2/2}\,e^{ik(2t)}+e^{-k^2/2}\,e^{ik(-2t)}$.

Como $\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-k^2/2}\right]=e^{-x^2/2}$ y $\mathcal{F}^{-1}\left[\hat{f}(k)\,e^{ika}\right]=f(x-a)$, concluimos que $\boxed{u(x,t)=e^{-(x-2t)^2/2}+e^{-(x+2t)^2/2}}$.

[Que es evidentemente la solución que saldría de la fórmula de D'Alembert $u(x,s)=\frac{1}{2}\left[f(x+2t)+f(x-2t)\right]$]

3. Sea $x^2y''-x(x+5)y'+9y=0$. Hallar los 3 primeros términos no nulos del desarrollo de una solución analítica en $x=0$, dando la regla de recurrencia. ¿Tienden a 0 todas las soluciones cuando $x\to 0$? [2 puntos]

$x=0$ singular regular con $r(r-1)-5r+9=(r-3)^2=0$, $r=3$ doble. Hallamos la analítica $y_1=\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+3}$, $c_0\neq 0$.

$\sum_0 \left[(k+3)(k+2)c_k x^{k+3}-(k+3)c_k x^{k+4}-5(k+3)c_k x^{k+3}+9c_k x^{k+3}\right]=\sum_0 \left[k^2c_k x^{k+3}-(k+3)c_k x^{k+4}\right]=0 \to$

x^3: $0\cdot c_0=0$, c_0 indeterminado; x^4: $c_1-3c_0=0$, $c_1=3c_0$; x^5: $4c_2-4c_1=0$, $c_2=c_1=3c_0$;

x^{k+3}: $k^2c_k-(k+2)c_{k-1}=0$, $\boxed{c_k=\frac{k+2}{k^2}c_{k-1}}$, regla de recurrencia $\left[\to c_1=\frac{3}{1}c_0,\ c_2=\frac{4}{4}c_1 \text{ como antes}\right]$

$\to \boxed{y_1=x^3\left[1+3x+3x^3+\cdots\right]}$ solución que claramente tiende a 0 cuando $x\to 0$.

La otra solución $y_2=x^4\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k + y_1 \ln x$ también tiende a 0 cuando $x\to 0$ (pues $x^3\ln x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$).

3*. Sea (P) $\begin{cases} y''-y'+\lambda y=0 \\ y(0)=y(\pi)=0 \end{cases}$. **a]** Escribir la ecuación en forma autoadjunta y hallar el peso. **b]** Determinar si $\lambda=-2$ y $\lambda=\frac{5}{4}$, son o no autovalores de (P). [2 puntos]
c] Precisar cuántas soluciones tiene $y''-y'+\lambda y=e^{x/2}$ con esos datos de contorno para $\lambda=-2$ y $\lambda=\frac{5}{4}$.

a] En forma autoadjunta: $\left(e^{-x}y'\right)'+\lambda e^{-x}y=0 \Rightarrow$ el peso es $\boxed{r(x)=e^{-x}}$. Es un problema separado y regular.

b] Como $\alpha\alpha'=\beta\beta'=0$, $q\equiv 0$ sabemos que los $\lambda\geq 0$, con lo que $\lambda=-2$ **no es autovalor**, cosa que es fácil de ver directamente: $\mu^2-\mu-2=0$, $\mu=2,-1 \to y=c_1e^{2x}+c_2e^{-x} \to \begin{matrix} y(0)=c_1+c_2=0 \\ y(\pi)=c_1e^{2\pi}+c_2e^{-\pi}=0 \end{matrix} \Rightarrow c_1=c_2=0$,
ya que, por ejemplo, el determinante de los coeficientes $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{2\pi} & e^{-\pi} \end{vmatrix}=e^{-\pi}-e^{2\pi}\neq 0$.

Para $\lambda=\frac{5}{4}$ es $\mu=\frac{1\pm\sqrt{1-5}}{2}=\frac{1}{2}\pm i \to y=\left(c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x\right)e^{x/2} \to \begin{matrix} y(0)=c_1=0 \\ y(\pi)=-c_1e^{\pi/2}=0 \end{matrix} \Rightarrow c_1=0$ y c_2 cualquiera.
Así pues, $\lambda=\frac{5}{4}$ **es autovalor** (y la autofunción correspondiente es $y=\left\{e^{x/2}\operatorname{sen}x\right\}$).

c] Como para $\lambda=-2$ el homogéneo tiene sólo la solución trivial, el no homogéneo tendrá **solución única**.
Si $\lambda=\frac{5}{4}$ tendrá infinitas o ninguna, $f(x)=e^{-x/2}$, $\int_0^\pi e^{-x/2}e^{x/2}\operatorname{sen}x\,dx=-\cos x\Big]_0^\pi=2\neq 0$. **Ninguna solución**.

4. Sea $\begin{cases} u_t-u_{xx}=0,\ x\in(0,1),\ t>0 \\ u(x,0)=0,\ u_x(0,t)=0,\ u(1,t)=1 \end{cases}$. **a]** Resolverla por separación de variables. **b]** Hallar la distribución estacionaria hacia la que tiende la solución cuando $t\to\infty$. [2 puntos]

Lo primero es hacer las condiciones de contorno homogéneas. $v=1$ claramente las cumple. $w=u-1 \to$
$\begin{cases} w_t-w_{xx}=0,\ x\in(0,1),\ t>0 \\ w(x,0)=-1,\ w_x(0,t)=w(1,t)=0 \end{cases}$. Sabemos que al hacer $w=X(x)T(t)$ aparecen:
$\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X'(0)=X(1)=0 \end{cases} \to \lambda_n=\frac{(2n-1)^2\pi^2}{2^2}$, $X_n=\left\{\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right\}$; $T'+\lambda T=0 \to T_n=\left\{e^{-(2n-1)^2\pi^2t/4}\right\}$, $n=1,2,\dots$

Imponiendo a $w(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_ne^{-(2n-1)^2\pi^2t/4}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}$ el dato inicial $w(x,0)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}=-1 \to$

$c_n=\frac{2}{1}\int_0^1-\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}\,dx=-\frac{4}{\pi(2n-1)}\operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi}{2}$. $\boxed{u=1+\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}e^{-(2n-1)^2\pi^2t/4}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \boxed{1}$.

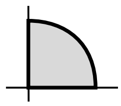
La $v=1$ del cambio es la distribución estacionaria hacia la que tienden las temperaturas. Esto era esperable ya que tenemos el extremo izquierdo aislado y obligamos al derecho a permanecer a 1°.

5. Resolver el problema en el plano $\begin{cases} \Delta u=4\operatorname{sen}2\theta,\ \theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\ r<1 \\ u(1,\theta)=\operatorname{sen}4\theta,\ u(r,0)=u\left(r,\frac{\pi}{2}\right)=0 \end{cases}$. [2.5 puntos]

Para hallar las autofunciones del homogéneo debemos resolver: $\begin{cases} \Theta''+\lambda\Theta=0 \\ \Theta(0)=\Theta\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \end{cases} \to \lambda_n=4n^2$, $\Theta_n=\left\{\operatorname{sen}2n\theta\right\}$, $n=1,2,\dots$

Llevamos a la ecuación: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}R_n(r)\operatorname{sen}2n\theta \to \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[R_n''+\frac{R_n'}{r}-\frac{4n^2R_n}{r^2}\right]\operatorname{sen}2n\theta=4\operatorname{sen}2\theta$, función ya desarrollada.

Del dato de contorno obtenemos: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}R_n(1)\operatorname{sen}2n\theta=\operatorname{sen}4\theta$, también desarrollada.



Además habrá que exigir que las soluciones estén acotadas en el origen ($r=0$).

Los únicos $R_n\not\equiv 0$ (este problema de Dirichlet tiene solución única) saldrán de resolver los problemas:
$\begin{cases} r^2R_1''+rR_1'-4R_1=4r^2 \\ R_1 \text{ acotada}, R_1(1)=0 \end{cases}$. La solución de la homogénea es $c_1r^2+c_2r^{-2}$. La R_{1p} se puede hallar de dos formas:

Con la f.v.c.: $|W|=\begin{vmatrix} r^2 & r^{-2} \\ 2r & -2r^{-3} \end{vmatrix}=-\frac{4}{r}$, $R_{1p}=r^{-2}\int\frac{r^2\cdot 4}{-4/r}\,dr-r^2\int\frac{r^{-2}\cdot 4}{-4/r}\,dr=r^2\ln r-\frac{1}{4}r^2$,

o probando $R_{1p}=Ar^2\ln r$ $\left(Ase^{2s}\right) \to R_{1p}'=A(2r\ln r+r)$, $R_{1p}''=A(2\ln r+3)$, $4Ar^2=4r^2$, $R_{1p}=r^2\ln r$.

Imponiendo las condiciones de contorno a $R_1=c_1r^2+c_2r^{-2}+r^2\ln r$ deducimos que $c_2=0$ y $c_1+0=0$.

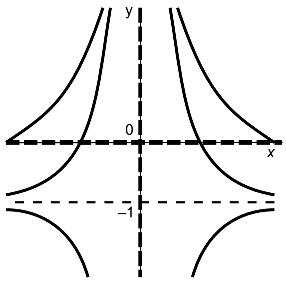
$\begin{cases} r^2R_2''+rR_2'-16R_2=0 \\ R_2 \text{ acotada}, R_2(1)=1 \end{cases} \to R_2=c_1r^4+c_2r^{-4} \underset{c.c.}{\to} c_2=0,\ c_1=1$.

La solución es, por tanto, $\boxed{u(r,\theta)=r^2\ln r\operatorname{sen}2\theta+r^4\operatorname{sen}4\theta}$.

Soluciones del examen de septiembre de 2013 de Métodos Matemáticos II (grupos C y E)

1. Resolver $(3y+3)u_y - xu_x = 2xy$ con el dato $u(x,0)=0$. ¿Con $u(0,y)=0$ habría solución única? [2 puntos]

$\frac{dy}{dx}=-\frac{3y+3}{x}\xrightarrow{\text{lineal}} y=\frac{C}{x^3}\underset{\text{a ojo}}{-1}$ (o separable), $x^3(y+1)=C$ características.



$\begin{cases}\xi=x^3(y+1)\\ \eta=x\ \text{[mejor]}\end{cases}\to u_\eta=-2y=2-\frac{2\xi}{\eta^3}\to u=2\eta+\frac{\xi}{\eta^2}+p(\xi)=xy+3x+p\big[x^3(y+1)\big]$.

$u(x,0)=3x+p(x^3)=1\to p(v)=-3v^{1/3}$, $\boxed{u(x,y)=x\big[y+3-3(y+1)^{1/3}\big]}$.

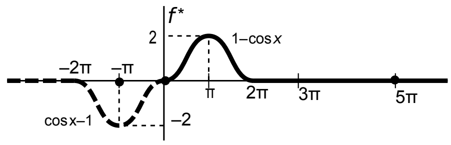
$\Big[$Solución única pues $x=0$ no es tangente a las características, como prueba el dibujo o $\Delta=1\cdot(0+3)-0\cdot(-x)=3\neq 0\Big]$.

$u(0,y)=p(0)=0$ lo cumplen infinitas soluciones [$x=0$ característica $\Leftrightarrow \Delta\equiv 0$].

[$\Delta=0$ en un punto, significa que hay tangencia en ese punto, pero eso no implica que la solución no sea única].

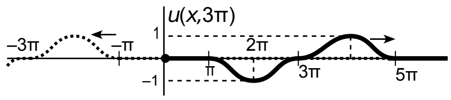
2. Sea $\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=0,\ x\geq 0,\ t\in\mathbf{R}\\ u(x,0)=\begin{cases}1-\cos x,\ x\in[0,2\pi]\\ 0,\ x\in[2\pi,\infty)\end{cases}\\ u_t(x,0)=0,\ u(0,t)=0\end{cases}$. **a]** Dibujar la extensión f^* y dar su expresión. **b]** Hallar $u(2\pi,3\pi)$. **c]** Dibujar $u(x,3\pi)$. [1.8 puntos]

a] En $[-2\pi,0]$ la expresión de f^* es $-\big[1-\cos(-x)\big]$ y por tanto:



$f^*(x)=\begin{cases}\cos x-1 \ \text{ si } x\in[-2\pi,0]\\ 1-\cos x \ \text{ si } x\in[0,2\pi]\\ 0 \ \text{ en el resto de } \mathbf{R}\end{cases}$. Y es: $u=\frac{1}{2}\big[f^*(x-t)+f^*(x+t)\big]$.

b] $u(2\pi,3\pi)=\frac{1}{2}\big[f^*(-\pi)+f^*(5\pi)\big]\overset{f^*\text{ impar}}{=}-\frac{1}{2}f(\pi)=\boxed{-1}$.



c] Basta trasladar 3π unidades a izquierda y derecha $\frac{1}{2}f^*$ y sumar.

2*. Utilizando la transformada de Fourier, resolver: $\begin{cases}u_t-\frac{1}{4}u_{xx}+u_x=0,\ x\in\mathbf{R},\ t>0\\ u(x,0)=e^{-x^2},\ u \text{ acotada}\end{cases}$. [1.8 puntos]

$\begin{cases}\hat{u}_t+\frac{k^2}{4}\hat{u}-\mathrm{i}k\hat{u}=0\\ \hat{u}(k,1)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-k^2/4}\end{cases}\xrightarrow{\text{EDO en } t}\hat{u}(k,t)=p(k)\,e^{-k^2t/4}e^{\mathrm{i}kt}\underset{\text{d.i.}}{=}\frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{-k^2(t+1)/4}e^{\mathrm{i}kt}\underset{t\text{ cte}}{\longrightarrow}\boxed{u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{t+1}}\,e^{-\frac{(x-t)^2}{t+1}}}$.

$\Big[$Hemos utilizado que: $\mathcal{F}[f'']=-k^2\hat{f}$, $\mathcal{F}[e^{-ax^2}]=\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-k^2/4a}$, $\mathcal{F}^{-1}[e^{-ak^2}]=\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-x^2/4a}$ y $\mathcal{F}^{-1}\big[\hat{f}(k)\,e^{\mathrm{i}ka}\big]=f(x-a)\Big]$.

3. Sea $y''+2xy'+2y=0$. Calcular 3 términos no nulos del desarrollo en serie de la solución de que cumple $y(0)=1, y'(0)=0$. Hallar el término general de la serie e identificarla con una función elemental. [1.8 puntos]

$x=0$ es regular. Probamos pues $y=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k$, sabiendo que, por los datos iniciales, será $c_0=1$, $c_1=0$.

$$\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^{k-2}+\sum_{k=1}^{\infty}2kc_kx^k+\sum_{k=0}^{\infty}2c_kx^k=0\ \to$$

x^0: $2c_2+2c_0=0\to c_2=-1$; x^1: $6c_3+4c_1=0\to c_3=-\frac{2}{3}c_1=0$; x^2: $12c_4+6c_2=0\to c_4=-\frac{1}{2}c_2=\frac{1}{2}$.

Los 3 primeros términos son, pues: $\boxed{y=1-x^2+\frac{1}{2}x^4+\cdots}$.

$\Big[$A estos pocos se podría llegar: $y''(0)+y(0)=0$, $y''(0)=-2\nearrow$. Y derivando:
$y'''+2xy''+4y'=0\to y'''(0)=-4y'(0)=0$; $y^{iv}+2xy'''+6y''=0\to y^{iv}(0)=-6y''(0)=12\nwarrow\Big]$.

x^k: $(k+2)(k+1)c_{k+2}+2(k+1)c_k=0$, $c_{k+2}=-\frac{2}{k+2}c_k$, o bien, $c_k=-\frac{2}{k}c_{k-2}$, regla de recurrencia.

$\Big[$Comprobamos: $\to$ $c_2=-c_0$, $c_3=\frac{2}{3}c_1$, $c_4=-\frac{1}{2}c_2$ como antes$\Big]$.

$\to$ $c_6=-\frac{1}{3}c_4=-\frac{1}{6}$, $c_8=-\frac{1}{4}c_4=\frac{1}{4!}$, ...; $c_{2k}=-\frac{1}{k}c_{2k-2}=\frac{1}{k(k-1)}c_{2k-4}=\cdots$ $\to$

$$\boxed{y=1-x^2+\frac{1}{2!}x^4-\frac{1}{3!}x^6+\cdots+\frac{(-1)^k}{k!}x^{2k}+\cdots=e^{-x^2}}.$$

3*. Sea (P) $\begin{cases} x^2y''+3xy'+y+\lambda y=0 \\ y(1)=y(\mathrm{e})=0 \end{cases}$. **a]** Escribir la ecuación en forma autoadjunta y hallar el peso. **b]** Para $\lambda=\pi^2$, hallar la autofunción $\{y_1\}$ asociada y calcular $\langle y_1\,,y_1\rangle$.

c] Precisar si $\lambda=0$ es autovalor de (P) y cuántas soluciones tiene $\begin{cases} x^2y''+3xy'+y=1 \\ y(1)=y(\mathrm{e})=0 \end{cases}$. [1.8 puntos]

a] $y''+\frac{3}{x}y'+\frac{1}{x^2}y+\frac{1}{x^2}\lambda y=0$, $\mathrm{e}^{\int 3/x}=x^3$, $\big(x^3y'\big)'+xy+\lambda xy=0$ $\Rightarrow$ el peso es $\boxed{r(x)=x}$.

b] Para $\lambda=\pi^2$ la solución general de esta ecuación de Euler es:

$$\mu(\mu-1)+3\mu+1+\pi^2=0\,,\ \mu=-1\pm\mathrm{i}\,\pi \to y=\big[c_1\cos(\pi\ln x)+c_2\,\mathrm{sen}(\pi\ln x)\big]x^{-1} \to \begin{matrix} y(1)=c_1=0 \\ y(\mathrm{e})=-c_1\mathrm{e}^{-1}=0 \end{matrix}\,,\ \forall c_2\,.$$

Es pues, $\lambda=\pi^2$ autovalor con **autofunción** asociada $\boxed{y_1=\big\{\frac{\mathrm{sen}(\pi\ln x)}{x}\big\}}$.

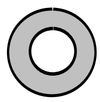
$$\langle y_1\,,y_1\rangle=\int_1^{\mathrm{e}}x\frac{1}{x^2}\,\mathrm{sen}^2(\pi\ln x)\,dx=\big[\,\ln x=s\,\big]=\int_0^1\mathrm{sen}^2(\pi s)\,ds=\frac{1}{2}\int_0^1\big[1-\cos(2\pi s)\big]\,ds=\boxed{\tfrac{1}{2}}\,.$$

c] Para $\lambda=0$ es $\mu=-1$ doble $\to y=\big(c_1+c_2\ln x\big)x^{-1} \to \begin{matrix} y(1)=c_1=0 \\ y(\mathrm{e})=(c_1+c_2)\,\mathrm{e}^{-1}=0 \end{matrix} \Rightarrow c_1=c_2=0$. No es autovalor.

Como el homogéneo tiene sólo la solución trivial, el no homogéneo tendrá **solución única**.

4. Resolver el problema en el plano $\begin{cases} \Delta u=0\,,\ 1<r<2 \\ u(1,\theta)=1+\mathrm{sen}\,2\theta\,,\ u_r(2,\theta)=0 \end{cases}$. [2 puntos]

Separando variables $u=R\Theta$ sabemos que aparecen: $\Theta''+\lambda\Theta=0$ y $r^2R''+rR'-\lambda R=0$.



La Θ ha de ser 2π-periódica: $\begin{cases} \Theta''+\lambda\Theta=0 \\ \Theta(0)=\Theta(2\pi) \\ \Theta'(0)=\Theta'(2\pi) \end{cases} \to \lambda_n=n^2,\ \Theta_n=\big\{\mathrm{sen}\,n\theta,\cos n\theta\big\}$, $n=0,1,2,\dots$

Las soluciones de las ecuaciones de Euler para estos λ_n, utilizando ya que $u_r(2,\theta)=R'(2)\Theta(\theta)=0$, son:

$$r^2R''+rR'-n^2R=0 \to \mu=\pm n\,,\ \begin{matrix} R_0=c_1+c_2\ln r \\ R_n=c_1r^n+c_2r^{-n} \end{matrix} \xrightarrow{R'(2)=0} R_0=\{1\}\,,\ R_n=\big\{r^n+2^{2n}r^{-n}\big\}\,,\ n=1,2,\dots$$

Probamos entones una solución de la forma: $u(r,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\big[r^n+2^{2n}r^{-n}\big]\big[a_n\cos n\theta+b_n\,\mathrm{sen}\,n\theta\big]$.

Imponemos el dato de contorno que falta:

$$u(1,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\big[1+2^{2n}\big]\big[a_n\cos n\theta+b_n\,\mathrm{sen}\,n\theta\big]=1+\mathrm{sen}\,2\theta\,,$$ ya desarrollada en autofunciones.

Sólo son no nulos: $\frac{a_0}{2}=1$ y $[1+16]b_2=1$. Por tanto la solución única es: $\boxed{u(r,\theta)=1+\frac{1}{17}\big[r^2+\frac{16}{r^2}\big]\mathrm{sen}\,2\theta}$.

5. Resolver el problema no homogéneo $\begin{cases} u_t-u_{xx}=\mathrm{e}^{-2t}\,,\ x\in(0,\pi)\,,\ t>0 \\ u(x,0)=u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$. [2.4 puntos]

Separando variables en la ecuación homogénea aparece: $\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=X(\pi)=0 \end{cases} \to \lambda_n=n^2,\ X_n=\big\{\mathrm{sen}\,nx\big\}$, $n=1,2\dots$

Llevamos, pues, a la ecuación $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\,\mathrm{sen}\,nx \to \sum_{n=1}^{\infty}\big[T_n'+n^2T_n\big]\mathrm{sen}\,nx=\mathrm{e}^{2t}=\mathrm{e}^{2t}\sum_{n=1}^{\infty}B_n\,\mathrm{sen}\,nx$,

siendo $B_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{sen}\,nx\,dx=-\frac{2}{n\pi}\cos nx\big]_0^{\pi}=\frac{2[1-(-1)^n]}{n\pi}$ ($=0$ si n par y numerador$=4$ si n es impar).

Del dato inicial se deduce: $u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\,\mathrm{sen}\,nx=0 \to T_n(0)=0\ \forall n$. Debemos resolver, pues:

$\begin{cases} T_n'+n^2T_n=B_n\mathrm{e}^{-2t} \\ T_n(0)=0 \end{cases} \to T_n=C\mathrm{e}^{-n^2t}+T_{np}$. La particular, mejor que con la fórmula, la hallamos tanteando:

$T_{np}=A\mathrm{e}^{-2t} \to [-2+n^2]A=B_n$, $T_n=C\mathrm{e}^{-n^2t}+\frac{B_n}{n^2-2}\mathrm{e}^{-2t} \xrightarrow{d.i.} C=-\frac{B_n}{n^2-2}$. Concluimos que:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{n^2-2}\big[\mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{-n^2t}\big]\mathrm{sen}\,nx=\boxed{\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)[(2m-1)^2-2]}\big[\mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{-(2m-1)^2t}\big]\mathrm{sen}(2m-1)x}\,.$$