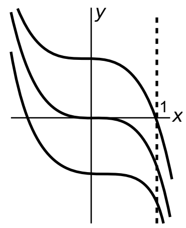
Soluciones del examen de junio de 2014 de Métodos Matemáticos II

Elegir 3 problemas entre 1, 2, 3 y 4 (de 1.8 puntos) y elegir 2 problemas entre 5, 6 y 7 (de 2.3 puntos).

1. Resolver $\begin{cases} 3x^2u_y-u_x=4yu \\ u(1,y)=1 \end{cases}$. ¿Es única la solución?



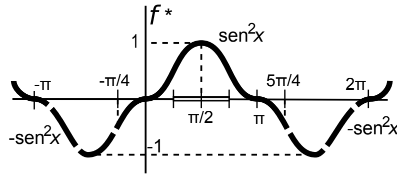
$\frac{dy}{dx}=-3x^2 \to y=C-x^3$. $\begin{cases}\xi=y+x^3\\ \eta=x\end{cases} \to u_\eta=-4yu=(4\eta^3-4\xi)u \to$
$u=p(\xi)\,e^{\eta^4-4\xi\eta}=p(y+x^3)\,e^{-4xy-3x^4}$.

$u(1,y)=p(y+1)\,e^{-4y-3}=1$, $p(v)=e^{4v-1}$, $\boxed{u(x,y)=e^{4y-4xy-3x^4+4x^3-1}}$.

La solución es única porque la recta de datos iniciales no es tangente en ningún punto a las características, o porque: $T=0\cdot 3-1\cdot(-1)=1\neq 0$.

2. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0,\ x\in[0,\pi],\, t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=\operatorname{sen}^2x,\, u_t(x,0)=u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$. Dibujar la extensión f^*, hallar el valor de $u\big(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\big)$ y hallar $u\big(x,\frac{3\pi}{4}\big)$ para $\frac{\pi}{4}\leq x\leq\frac{3\pi}{4}$.

Para usar D'Alembert extendemos f de forma impar y 2π-periódica a todo $\mathbf{R}$, y entonces la solución es $u(x,t)=\frac{1}{2}\big[f^*(x+t)+f^*(x-t)\big]$.



$u\big(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\big)=\frac{1}{2}\big[f^*(-\frac{\pi}{4})+f^*(\frac{5\pi}{4})\big]=-\frac{1}{2}\big[f(\frac{\pi}{4})+f(\frac{3\pi}{4})\big]=\boxed{-\frac{1}{2}}$.

Si $\frac{\pi}{4}\leq x\leq\frac{3\pi}{4}$, es $-\frac{\pi}{2}\leq x-\frac{3\pi}{4}\leq 0$ y $\pi\leq x+\frac{3\pi}{4}\leq\frac{3\pi}{2}$, y por tanto:

$u\big(x,\frac{3\pi}{4}\big)=\frac{1}{2}\big[-\operatorname{sen}^2(x+\frac{3\pi}{4})-\operatorname{sen}^2(x-\frac{3\pi}{4})\big]=-\frac{1}{2}\big[\frac{1}{2}(\operatorname{sen}x+\cos x)^2+\frac{1}{2}(\operatorname{sen}x-\cos x)^2\big]=\boxed{-\frac{1}{2}}\ \forall x$.

3. Resolver utilizando la transformada de Fourier: $\begin{cases} u_{tt}+4u_{tx}+4u_{xx}=0 \\ u(x,0)=0,\, u_t(x,0)=g(x)\end{cases}$.

$\begin{cases}\hat u_{tt}-4ik\hat u_t-4k^2\hat u=0\\ \hat u(k,0)=0,\, \hat u_t(k,0)=\hat g(k)\end{cases}$ $\quad \begin{matrix}\mu^2-4ik\mu-4k^2=0\\ \to \mu=2ik \text{ doble}\end{matrix}$, $\hat u=p(k)e^{2ikt}+q(k)e^{2ikt}t \xrightarrow[c.i.]{} \hat u=tg(k)e^{2ikt} \to \boxed{u(x,t)=t\,g(x-2t)}$.

[Se puede hacer a partir de las características, pero no se pide eso:

Parabólica. $\begin{cases}\xi=x-2t\\ \eta=t\end{cases} \to u_{\eta\eta}=0$, $u=p(\xi)\eta+q(\xi)=tp(x-2t)+q(x-2t)$, $u(x,0)=q(x)=0 \to u_t(x,0)=p(x)\overset{\uparrow}{=}g(x)$].

4. Hallar una (corta) solución no analítica de $2xy''-(1-2x)y'-5y=0$, $x\geq 0$, dando la regla de recurrencia.

$x^2y''+x(x-\frac{1}{2})y'-\frac{5x}{2}y=0$, $x=0$ singular regular con $r=\frac{3}{2},0$. No analítica $y_1=\sum_{n=0}^{\infty}c_kx^{k+3/2}$ $\Big[y_2=\sum_{n=0}^{\infty}b_kx^k$ lo es$\Big]$

$\to \sum_0\Big[2(k+\frac{3}{2})(k+\frac{1}{2})c_kx^{k+1/2}-(k+\frac{3}{2})c_kx^{k+1/2}+2(k+\frac{3}{2})c_kx^{k+3/2}-5c_kx^{k+3/2}\Big]$

$=\sum_0\Big[k(2k+3)c_kx^{k+1/2}+2(k-1)c_kx^{k+3/2}\Big]=0 \to x^{1/2}:\ 0\cdot c_0=0$, c_0 indeterminado;

$x^{3/2}:\ 5c_1-2c_2=0$, $c_1=\frac{2}{5}c_0$; $\ x^{k+1/2}:\ k(2k+3)c_k+2(k-2)c_{k-1}=0$,

$\boxed{c_k=-\frac{2(k-2)}{k(2k+3)}c_{k-1}}$ regla de recurrencia $\to c_2=0 \to c_3=c_4=\cdots=0 \to \boxed{y_1=x^{3/2}+\frac{2}{5}x^{5/2}}$.

[La solución analítica $y_2=1-5x-\frac{15}{2}x^2+\cdots$ no se pide].

5. Sea $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y(0)-2y'(0)=y(1)-2y'(1)=0\end{cases}$. Hallar autovalores λ_n y autofunciones $\{y_n\}$, y calcular $\langle y_n,y_n\rangle\ \forall n$.
[Son calculables exactamente todos los λ_n, y hay uno negativo].

$\lambda<0$, $y=c_1e^{px}+c_2e^{-px} \to \begin{matrix}c_1+c_2-2p[c_1-c_2]=0\\ c_1e^p+c_2e^{-p}-2p[c_1e^p-c_2e^{-p}]=0\end{matrix}$, $\begin{vmatrix}1-2p & 1+2p\\ [1-2p]e^p & [1+2p]e^{-p}\end{vmatrix}=[1-2p][1+2p][e^{-p}-e^p]$.

El determinante se anula si $p=\frac{1}{2}$ (y entonces, $c_2=0$). $\boxed{\lambda_0=-\frac{1}{4}}$ y su autofunción es $\boxed{y_0=\{e^{x/2}\}}$.

$\lambda=0$, $y=c_1+c_2x \to \begin{matrix}c_1-2c_2=0\\ c_1-c_2=0\end{matrix} \Rightarrow c_1=c_2=0$. No es autovalor.

$\lambda>0$, $y=c_1\cos wx+c_2\operatorname{sen}wx \to \begin{matrix}c_1-2wc_2=0,\ c_1=2wc_2\\ c_1\cos w+c_2\operatorname{sen}w-2w[-c_1\operatorname{sen}w+c_2\cos w]=0\end{matrix} \to c_1(1+4w^2)\operatorname{sen}w=0$.

Por tanto, $w_n=n\pi$, $\boxed{\lambda_n=n^2\pi^2}$, $\boxed{y_n=\{2n\pi\cos n\pi x+\operatorname{sen}n\pi x\}}$, $n=1,2,\ldots$

$\langle y_0,y_0\rangle=\int_0^1e^xdx=\boxed{e-1}$. $\langle y_n,y_n\rangle=\int_0^1\big[2n^2\pi^2(1+\cos 2n\pi x)+2n\pi\operatorname{sen}2n\pi x+\frac{1}{2}(1-\cos 2n\pi x)\big]dx=\boxed{\frac{1}{2}+2n^2\pi^2}$.

6. Resolver separando variables $\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = 0\,,\ x\in(0,\pi), t>0 \\ u(x,0)=0\,,\ u(0,t)=t\,, u_x(\pi,t)=0 \end{cases}$. [Hay una v muy sencilla, pero se puede hallar otra que no estropea la ecuación].

$\xrightarrow{w=u-t} \begin{cases} w_t - 4w_{xx} = -1 \\ w(x,0)=w(0,t)=w_x(\pi,t)=0 \end{cases} \xrightarrow{u=XT} \begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=X'(\pi)=0 \end{cases} \to X_n=\left\{\text{sen}\,\frac{(2n-1)x}{2}\right\},\ n=1,2,\dots$ $\left[\text{y } T'+4\lambda T=0\right]$.

Probamos $w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\,\text{sen}\,\frac{(2n-1)x}{2} \ \to\ \sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n'+(2n-1)^2T_n\right]\text{sen}\,\frac{(2n-1)x}{2} = -1 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\,\text{sen}\,\frac{(2n-1)x}{2}$,

con $B_n=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\text{sen}\,\frac{(2n-1)x}{2}\,dx = \frac{-4}{\pi(2n-1)}$. Como $w(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)\,\text{sen}\,\frac{(2n-1)x}{2} = 0$,

$\begin{cases} T_n'+(2n-1)^2T_n=B_n \\ T_n(0)=0 \end{cases} \to T_n(t) = C e^{-(2n-1)^2 t} + \frac{B_n}{(2n-1)^2} \xrightarrow{d.i.} C=\frac{-B_n}{(2n-1)^2}$.

Deshaciendo el cambio tenemos la solución: $\boxed{u(x,t) = t - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\left[1-e^{-(2n-1)^2t}\right]\text{sen}\,\frac{(2n-1)x}{2}}$.

O bien, tanteando un poco se encuentra $v=t+\frac{x^2}{8}-\frac{\pi x}{4} \xrightarrow{w=u-v} \begin{cases} w_t-4w_{xx}=0 \\ w(x,0)=\frac{\pi x}{4}-\frac{x^2}{8}\,,\ w(0,t)=w_x(\pi,t)=0 \end{cases}$

$\xrightarrow{u=XT} \begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=X'(\pi)=0 \end{cases} \to X_n=\left\{\text{sen}\,\frac{(2n-1)x}{2}\right\},\ n=1,2,\dots$ y $T'+4\lambda T=0 \to T_n=\left\{e^{-(2n-1)^2t}\right\}$.

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(2n-1)^2t}\,\text{sen}\,\frac{(2n-1)x}{2} \ \to\ w(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\text{sen}\,\frac{(2n-1)x}{2} = \frac{2\pi x-x^2}{8}\,,$$

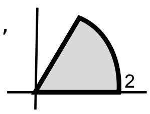
$$c_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{2\pi x-x^2}{8}\,\text{sen}\,\frac{(2n-1)x}{2}\,dx = \frac{x^2-2\pi x}{2\pi(2n-1)}\cos\frac{(2n-1)x}{2}\Big]_0^{\pi} - \frac{1}{\pi(2n-1)}\int_0^{\pi}(\pi-x)\cos\frac{(2n-1)x}{2}\,dx$$

$$= \frac{2(\pi-x)}{\pi(2n-1)^2}\,\text{sen}\,\frac{(2n-1)x}{2}\Big]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi(2n-1)^2}\int_0^{\pi}\text{sen}\,\frac{(2n-1)x}{2}\,dx = \frac{4}{\pi(2n-1)^3}\,.$$

Otra expresión de la solución única es: $\boxed{u(x,t)=t+\frac{x^2}{8}-\frac{\pi x}{4}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}e^{-(2n-1)^2t}\,\text{sen}\,\frac{(2n-1)x}{2}}$.

7. Sea $\begin{cases} \Delta u=0\,,\ r<2\,,\ 0<\theta<\frac{\pi}{3} \\ u_r(2,\theta)=a+\cos 3\theta\,,\ u_\theta(r,0)=u_\theta\left(r,\frac{\pi}{3}\right)=0 \end{cases}$. Resolver este problema plano por separación de variables para la única constante a para la que tiene solución.

De **Neumann**. Haciendo $u=R\Theta$ sabemos que sale: $\begin{cases} \Theta''+\lambda\Theta=0 \\ \Theta'(0)=\Theta'\left(\frac{\pi}{3}\right)=0 \end{cases}$, $\lambda_n=9n^2$, $\Theta_n=\{\cos 3n\theta\}$, $n=0,1,2,\dots$



y además: $r^2R''+rR'-\lambda R=0 \xrightarrow{\lambda=9n^2} \begin{matrix} R=c_1r^{3n}+c_2r^{-3n} \\ R=c_1+c_2\ln r\,,\ n=0 \end{matrix}$. R acotada en $r=0 \to R_n=\left\{r^{3n}\right\}$.

Probamos $u(r,\theta)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^{3n}\cos 3n\theta \ \to\ u_r(2,\theta)=0+\sum_{n=1}^{\infty} 3n2^{3n-1}a_n\cos 3n\theta = a+\cos 3\theta \Rightarrow$

si $a\neq 0$ no tiene solución y si $\boxed{a=0}$, a_0 cualquiera, $12a_1=1$ y el resto nulos.

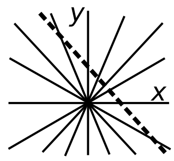
Así pues las infinitas soluciones son: $\boxed{u(r,\theta)=C+\frac{1}{12}r^3\cos 3\theta}$.

$\Big[$Para que este problema de Neumann tuviese solución debía ser $0=\iint_D F=\oint_{\partial D} f\,ds = 0+0+2\int_0^{\pi/3}(a+\cos 3\theta)\,d\theta = \frac{2\pi}{3}a$ $\Big]$.

Soluciones del examen de septiembre de 2014 de Métodos Matemáticos II

Elegir problemas que sumen 10 puntos (2+2+2+4 puntos ó 2+2+2+2+2 puntos).

1. Hallar la solución de $\begin{cases} yu_y + xu_x = 2u \\ u(x,1-x)=2x-1 \end{cases}$. ¿Cuántas soluciones de la ecuación cumplen $u(x,x)=0$? [2pt]



$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x} \to y=Cx$. $\begin{cases} \xi=y/x \\ \eta=y \end{cases} \to \begin{cases} u_y=\frac{1}{x}u_\xi+u_\eta \\ u_x=-\frac{y}{x^2}u_\xi \end{cases} \to yu_\eta=2,\ u_\eta=\frac{2}{\eta}u \to u=p(\xi)\,\eta^2=p\big(\frac{y}{x}\big)y^2$

Muy parecido $\begin{cases} \xi=y/x \\ \eta=x \end{cases} \to \begin{cases} u_y=\frac{1}{x}u_\xi \\ u_x=-\frac{y}{x^2}u_\xi+u_\eta \end{cases} \to xu_\eta=2,\ u_\eta=\frac{2}{\eta}u \to u=p(\xi)\,\eta^2=p\big(\frac{y}{x}\big)x^2$

Imponiendo el dato: $p\big(\frac{1}{x}-1\big)=\frac{2x-1}{(1-x)^2}$ ó $p^*\big(\frac{1}{x}-1\big)=\frac{2x-1}{x^2}$. $v=\frac{1}{x}-1,\ x=\frac{1}{v+1} \to$

$$p(v)=\frac{(1-v)/(1+v)}{v^2/(1+v)^2}=\frac{1}{v^2}-1 \text{ ó } p^*(v)=\frac{(1-v)/(1+v)}{1/(1+v)^2}=1-v^2 \to \boxed{u(x,y)=x^2-y^2}.$$

[La solución es única por estar dados los datos sobre recta no característica ó porque $T(x)=1\cdot(1-x)-(-1)\cdot x\equiv 1\neq 0$].

Para el otro dato (sobre característica) en principio puede haber infinitas o ninguna solución.

[Que $T(x)=1\cdot x-1\cdot x\equiv 0$ nos confirma que es caracterítica, pues es tangente en cada punto].

Imponemos el dato para saber lo que sucede: $p(1)x^2=0 \to p(1)=0$ [ó $p^*(1)=0$]. Hay **infintas soluciones**.

Una para cada función $p\in C^1$ que se anule en 1. [Por ejemplo son soluciones, $u\equiv 0$, la de antes...].

2. a] Utilizando la $\mathcal{F}$ resolver $\begin{cases} 2u_{tt}+5u_{tx}+2u_{xx}=0 \\ u(x,0)=f(x),\, u_t(x,0)=0 \end{cases}$. **b]** Escribir la solución para $f(x)=x^2$. [2pt]

a] $\begin{cases} 2\hat{u}_{tt}-5\,\mathrm{i}\,k\,\hat{u}_t-2k^2\hat{u}=0 \quad 2\mu^2-5ik\mu-2k^2=0 \\ \hat{u}(k,0)=\hat{f}(k),\, \hat{u}_t(k,0)=0 \qquad \to \mu=2\mathrm{i}k,\ \frac{1}{2}\mathrm{i}k \end{cases}$, $\hat{u}=p(k)\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}kt}+q(k)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\mathrm{i}kt} \xrightarrow[c.i.]{}$

$\begin{cases} p(k)+q(k)=\hat{f}(k) \quad -3p(k)=\hat{f}(k) \\ \mathrm{i}k\big[2p(k)+\frac{1}{2}q(k)\big]=0,\ q(k)\overset{\uparrow}{=}-4p(k) \end{cases} \to \hat{u}=\frac{1}{3}\big[4\hat{f}(k)\,re^{\frac{1}{2}\mathrm{i}kt}-\hat{f}(k)\,re^{2\mathrm{i}kt}\big] \to \boxed{u(x,t)=\frac{1}{3}\big[4f\big(x-\frac{t}{2}\big)-f(x-2t)\big]}$.

b] En el caso de ser $f(x)=x^2$ la solución queda $u(x,t)=\frac{1}{3}\big[4\big(x^2-xt+\frac{1}{4}t^2\big)-\big(x^2-4xt+4t^2\big)\big]=\boxed{x^2-t^2}$.

[Directamente por Fourier no se puede resolver, por no tener x^2 transformada].

[**b]** se podría hacer a partir de las características, pues el enunciado no lo excluye:

Hiperbólica. $\begin{cases} \xi=x-2t \\ \eta=x-\frac{t}{2} \end{cases} \to u_{\xi\eta}=0,\ u=p(\xi)+q(\eta)=p(x-2t)+q\big(x-\frac{t}{2}\big)$, $\begin{cases} p(x)+q(x)=x^2 \qquad p(x)=-\frac{1}{3}x^2,\ q(x)=\frac{4}{3}x^2 \overset{\uparrow}{\therefore} \\ -2p'(x)-\frac{1}{2}q'(x)=0,\ q(x)\overset{\uparrow}{=}-4p(x) \end{cases}$].

3. Hallar una solución analítica no trivial de $x^2y''+x^3y'-2(1+x^2)y=0$, escribiendo la regla de recurrencia. ¿Son todas las soluciones analíticas en $x=0$? [2pt]

$x=0$ singular regular con $r(r-1)-2=0$, $r=2,-1$. Es analítica la solución $y_1=\sum_{n=0}^{\infty}c_kx^{k+2} \to$

$$\sum_0\big[(k+2)(k+1)c_kx^{k+2}+(k+2)c_kx^{k+4}-2c_kx^{k+2}-2c_kx^{k+4}\big]=0 \to x^2:\ 0\cdot c_0=0,\ c_0 \text{ indeterminado};$$

$$x^3:\ 6c_1-2c_1=0,\ c_1=0; \quad x^4:\ 12c_2+2c_0-2c_2-2c_0=0,\ c_2=0;$$

$$x^{k+2}:\ \big[(k+2)(k+1)-2\big]c_k+(k-2)c_{k-2}=0,\ \boxed{c_k=-\frac{k-2}{k(k+3)}c_{k-2}},\ c_1=c_2=0 \Rightarrow c_3=c_4=\cdots=0,\ \boxed{y_1=x^2}.$$

La otra solución $y_2=x^{-1}\sum b_kx^k+d\,x^2\ln x$ no es analítica (sea d nulo o no).

4a. Resolver $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=t\,\mathrm{sen}\,x\,,\ x\in[0,\pi],\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$ [el mismo que **4b.**] por separación de variables. [2pt]

Haciendo $u=XT$ en la homogénea sale (formulario): $\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=X(\pi)=0 \end{cases} \to X_n=\{\mathrm{sen}\,nx\}_{n=1,2,\dots}$ $\big[$y $T''+\lambda T=0\big]$.

Llevando $u(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}T_n(t)\,\mathrm{sen}\,nx$ a la EDP obtenemos: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\big[T_n''+n^2T_n\big]\mathrm{sen}\,nx=t\,\mathrm{sen}\,x$ (ya desarrollada).

De los datos iniciales deducimos: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}T_n(0)\,\mathrm{sen}\,nx=0$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty}T_n'(0)\,\mathrm{sen}\,nx=0 \Rightarrow T_n(0)=T_n'(0)=0\ \ \forall n$.

La única solución no nula la proporciona $\begin{cases} T_1''+T_1=t \to T_1=c_1\cos t+c_2\,\mathrm{sen}\,t+t \\ T_1(0)=T_1'(0)=0 \end{cases}$ $\big(T_{1p}=At+B$ o a ojo$\big)$

Imponiendo los datos: $T_1(0)=c_1=0$, $T_1'(0)=-c_2+1=0$. La solución es $\boxed{u(x,t)=(t-\mathrm{sen}\,t)\,\mathrm{sen}\,x}$.

4b. Resolver $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=t\,\mathrm{sen}\,x\,,\ x\in[0,\pi],\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$ [el mismo que **4a.**] mediante D'Alembert (hablando de extensiones): i) directamente, ii) haciendo $w=u-t\,\mathrm{sen}\,x$. [2pt]

b] i) Como $F(t,x)=t\,\mathrm{sen}\,x$ está definida sólo para $[0,\pi]$, para aplicar D'Alembert debemos extenderla de forma impar y 2π-periódica en x a todo $\mathbf{R}$. Pero F ya lo es, con lo que su extensión F^* es ella misma. Por tanto:

$$u(x,t)=\tfrac{1}{2}\int_0^t\!\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}\tau\,\mathrm{sen}\,s\,ds\,d\tau=\tfrac{1}{2}\int_0^t\tau\underbrace{\big(\cos[x-(t-\tau)]-\cos[x+(t-\tau)]\big)}_{=\mathrm{sen}\,x\ \mathrm{sen}(t-\tau)}d\tau=\mathrm{sen}\,x\,(t-\mathrm{sen}\,t)\,.$$

$$\text{pues } \int_0^t\tau\,\mathrm{sen}(t-\tau)\,d\tau=\tau\cos(t-\tau)\Big]_0^t-\int_0^t\cos(t-\tau)\,d\tau=t+\mathrm{sen}(t-\tau)\Big]_0^t=t-\mathrm{sen}\,t\,.$$

ii) Haciendo $w=u-t\,\mathrm{sen}\,x$ obtenemos un problema con $f=F=0$, $g(x)=-\mathrm{sen}\,x=g^*(x)$ (impar y 2π-periódica).

Por tanto es: $w=-\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\mathrm{sen}\,s\,ds=\frac{1}{2}\big[\cos(x+t)-\cos(x-t)\big]=-\mathrm{sen}\,x\,\mathrm{sen}\,t$, $u=t\,\mathrm{sen}\,x-\mathrm{sen}\,x\,\mathrm{sen}\,t$.

5. a] Sea $\begin{cases} \Theta''+\lambda\Theta=0 \\ \Theta(-\frac{\pi}{4})=\Theta(\frac{\pi}{4})=0 \end{cases}$. i) Probar directamente que $\lambda=4$ es autovalor y hallar la autofunción asociada. ii) Haciendo $s=\theta+\frac{\pi}{4}$, escribir (usando el formulario) todos los λ_n y $\{\Theta_n\}$.

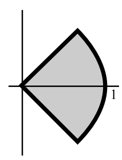
b] Sea $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0\,,\ r<1\,,\ -\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{4} \\ u_r(1,\theta)=f(\theta)\,,\ u\big(r,-\frac{\pi}{4}\big)=u\big(r,\frac{\pi}{4}\big)=0 \end{cases}$. Hallar, por separación de variables, la solución con: i) $f(\theta)=2\cos 2\theta$, ii) $f(\theta)=1$. [4pt]

a] i) Si $\lambda=4$ es $\Theta=c_1\cos 2\theta+c_2\,\mathrm{sen}\,2\theta \to \begin{cases} -c_2=0 \\ c_2=0 \end{cases}$, para cualquier c_2. Es autovalor y $\boxed{\Theta_1=\{\cos 2\theta\}}$.

ii) $s=\theta+\frac{\pi}{4} \to \begin{cases} \Theta''+\lambda\Theta=0 \\ \Theta(0)=\Theta(\pi/2)=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{formulario}} \lambda_n=4n^2,\ \Theta_n=\{\mathrm{sen}\,2ns\}$, $\boxed{\Theta_n=\big\{\mathrm{sen}\,2n\big(\theta+\frac{\pi}{4}\big)\big\}}$, $n=1,2,\dots$

$\Big[$En particular es $\Theta_1=\big\{\mathrm{sen}\big(2\theta+\frac{\pi}{2}\big)\big\}=\{\cos 2\theta\}$, $\Theta_2=\big\{\mathrm{sen}\big(4\theta+\pi\big)\big\}=\{-\mathrm{sen}\,4\theta\}=\{\mathrm{sen}\,4\theta\}$, $\dots\Big]$.

b] Separando varibles sabemos que aparecen $\begin{cases} \Theta''+\lambda\Theta=0 \\ \Theta(-\frac{\pi}{4})=\Theta(\frac{\pi}{4})=0 \end{cases} \xrightarrow{\textbf{a]}} \Theta_n=\big\{\mathrm{sen}\,2n\big(\theta+\frac{\pi}{4}\big)\big\}$.



y $r^2R''-rR'-\lambda R=0 \xrightarrow{\lambda=4n^2} R=c_1r^{2n}+c_2r^{-2n} \xrightarrow{R\text{ acotada}} R_n=\big\{r^{2n}\big\}$.

Probamos $u(r,\theta)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_nr^{2n}\Theta_n(\theta)$, que debe cumplir además $u_r(1,\theta)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}2nc_n\Theta_n(\theta)=f(\theta)$.

i) Si $f(\theta)=2\cos 2\theta$, es $2c_1=2$ y el resto 0. $\boxed{u(r,\theta)=r^2\cos 2\theta}$ $\big(=x^2-y^2$, la omnipresente función del examen$\big)$.

ii) Si $f(\theta)=1$, $2nc_n=\frac{2}{\pi/2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\Theta_n(\theta)\,d\theta=-\frac{2}{\pi n}\cos 2n\big(\theta+\frac{\pi}{4}\big)\Big]_{-\pi/4}^{\pi/4}=\frac{2(1-\cos n\pi)}{\pi n}$, $c_n=\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}$ $(=0$ si n par$)$.

La solución es en este caso $\boxed{u(r,\theta)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{2}{\pi(2m-1)^2}r^{4m-2}\Theta_{2m-1}(\theta)}$.