Soluciones del examen de junio de 2017 de Métodos Matemáticos II (C)

Hacer 1 y 2 (de 1.5 puntos) y 4 y 5 (de 2 puntos). Elegir entre 3 y 3* y entre 6 y 6* (de 1.5 puntos)

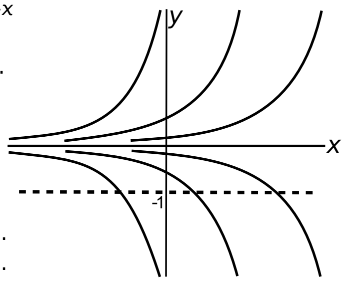
1. Hallar la solución de $yu_y + u_x = u - ye^{-x}$ que cumple el dato inicial $u(x,-1)=1$. [1.5 puntos]

$\frac{dy}{dx}=y \xrightarrow{\text{lineal}} y=Ce^x$. O bien $\begin{cases}\xi=ye^{-x}\\ \eta=y\end{cases} \to u_\eta=\frac{u-\xi}{\eta}$, $u=p(\xi)\eta+\xi=p(ye^{-x})y+ye^{-x}$

$\Big[\, u_p=\xi$ a ojo o $u_p \overset{\uparrow}{=} \eta\int\frac{-\xi}{\eta^2}\,d\eta$, $u_p \underset{\downarrow}{=} -e^{\eta}\int \xi e^{-\eta}\,d\eta \,\Big]$.

O bien $\begin{cases}\xi=ye^{-x}\\ \eta=x\end{cases}$, $u_\eta=u-\xi$, $u=p^*(\xi)\,e^{\eta}+\xi=p^*(ye^{-x})\,e^{x}+ye^{-x}$.

$u(x,-1)=1 \to \begin{matrix} p(-e^{-x})=-e^{-x}-1,\ p(v)=v-1 \\ p^*(-e^{-x})=e^{-2x}+e^{-x},\ p^*(v)=v^2-v\end{matrix} \to \boxed{u(x,y)=(y^2+y)e^{-x}-y}$.



[Es única por no ser $y=-1$ tangente a las características. O porque $T(x)=1\cdot(-1)-0\cdot 1\neq 0$. Queda $p(v)$ fijada sólo para $v<0$, pero p se evalúa en valores negativos cerca de la recta].

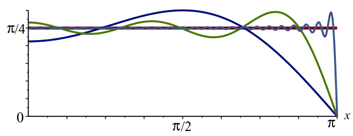
3. **a]** Escribir el desarrollo de la función $f(x)=\frac{\pi}{4}$ en serie de autofunciones del problema $\begin{cases}X''+\lambda X=0\\ X'(0)=X(\pi)=0\end{cases}$.
Precisar cuánto suma de la serie si: i) $x=\frac{\pi}{2}$, ii) $x=0$. [Para ii) hablar de extensiones o identificar la suma].

b] Resolver $\begin{cases}u_t-4u_{xx}=0,\ x\in(0,\pi),\ t>0\\ u(x,0)=f(x),\ u_x(0,t)=u(\pi,t)=0\end{cases}$ para: i) $f(x)=\frac{\pi}{4}$, ii) $f(x)=\cos\frac{x}{2}$. [0.8+1.2=2 puntos]

a] El formulario nos da $\lambda_n=\frac{(2n-1)^2}{4}$, $X_n=\left\{\cos\frac{(2n-1)x}{2}\right\}$, $n=1,2,\dots$, y la fórmula para calcular los c_n:

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos\frac{(2n-1)x}{2} \to c_n=\frac{1}{2}\int_0^1\cos\frac{(2n-1)x}{2}\,dx=\frac{1}{2n-1}\,\mathrm{sen}\,\frac{(2n-1)x}{2}\Big]_0^{\pi}=\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}.$$

Por tanto: $\boxed{\frac{\pi}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\cos\frac{(2n-1)x}{2}=\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\cos\frac{3x}{2}+\frac{1}{5}\cos\frac{5x}{2}-\cdots}$.



[A la derecha, un dibujo hecho con maple de 1 y las sumas de 2, 5 y 50 términos].

i) Como f es continua en $\frac{\pi}{2}$ la suma es $f\big(\frac{\pi}{2}\big)=\frac{\pi}{4}$. ii) Cada sumando es par y lo será la suma de la serie. Por ser la f extendida continua en 0 también sumará $\frac{\pi}{4}$. O es claro que $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$.
[Esos cosenos son impares respecto a π y por eso debe converger a 0 ahí, y lo hace por anularse los cosenos].

b] Separando variables en este problema homogéneo (está en formulario) y usando las condiciones de contorno:
$\begin{cases}X''+\lambda X=0\\ X'(0)=X(\pi)=0\end{cases}$ que da los λ_n y X_n de **a]**, y además $T'=-4\lambda_nT=-(2n-1)^2T \to T_n=\left\{e^{-(2n-1)^2t}\right\}$.

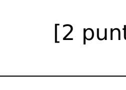
Probamos pues $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\,e^{-(2n-1)^2t}\cos\frac{(2n-1)x}{2}$. Y por el dato incial: $u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos\frac{(2n-1)x}{2}=f(x)$.

Para i) se deduce que los c_n son los de arriba, y por tanto es: $\boxed{u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\,e^{-(2n-1)^2t}\cos\frac{(2n-1)x}{2}}$.

Para ii) es $c_n=1$ y los demás $c_n=0$, con lo que la solución es ahora: $\boxed{u(x,t)=e^{-t}\cos\frac{x}{2}}$.

4. Resolver el problema plano $\begin{cases}\Delta u=-\frac{1}{r},\ 1<r<3,\ 0<\theta<\pi\\ u(1,\theta)=2+\cos\theta,\ u(3,\theta)=u_\theta(r,0)=u_\theta(r,\pi)=0\end{cases}$ [2 puntos]

Haciendo $u=R\Theta$ (formulario) sale: $\begin{cases}\Theta''+\lambda\Theta=0\\ \Theta'(0)=\Theta'(\pi)=0\end{cases} \to \lambda_n=n^2$, $\Theta_n=\{\cos n\theta\}$, $n=0,1,\dots$



Probamos: $u(r,\theta)=R_0(r)+\sum_{n=1}^{\infty}R_n(r)\cos n\theta \to R_0''+\frac{1}{r}R_0'+\sum_{n=1}^{\infty}\big[R_n''+\frac{1}{r}R_n'-\frac{n^2}{r^2}R_n\big]\cos n\theta=-\frac{1}{r}$.

Además: $u(1,\theta)=R_0(1)+\sum_{n=1}^{\infty}R_n(1)\cos n\theta=2+\cos\theta$, $u(3,\theta)=R_0(3)+\sum_{n=1}^{\infty}R_n(3)\cos n\theta=0$. Son no nulos:

$\begin{cases}r^2R_0''+rR_0=-r \xrightarrow{\bullet} R_0=c_1+c_2\ln r-r \xrightarrow{d.i.} c_1-1=2,\ c_1=3 \searrow\\ R_0(1)=2,\ R_0(3)=0 \qquad\qquad c_1+c_2\ln 3-3=0,\ c_2=0\end{cases}$, $R_0(r)=3-r$.

- Haciendo $R'=v \to v'=-\frac{v}{r}-\frac{1}{r}$. $e^{-\int dr/r}=e^{-\ln r}=\frac{1}{r}$. $v=\frac{C}{r}-\frac{1}{r}\int dr=\frac{C}{r}-1$, $R=K+C\ln r-r$.

  O viéndola como Euler: $\mu(\mu-1)+\mu=0$, $\mu=0$ doble. $R=c_1+c_2\ln r+R_p$. $R_p=Ar$ $\big(R_p=Ae^s\big) \to A=-1$.

  O hallando R_p con la fvc: $\begin{vmatrix}1 & \ln r\\ 0 & r^{-1}\end{vmatrix}=r^{-1}$, $R_p=-\ln r\int\frac{1\cdot r^{-1}}{r^{-1}}+1\int\frac{\ln r\cdot r^{-1}}{r^{-1}}=-r\ln r+r\ln r-r=-r$.

$\begin{cases}r^2R_1''+rR_1'-R_1=0 \xrightarrow{\text{Euler}} R_2=c_1r+c_2r^{-1} \xrightarrow{d.i.} c_1+c_2=1 \qquad c_1=-1/8\\ R_1(1)=1,\ R_1(3)=0 \qquad\qquad 3c_1+\frac{1}{3}c_2=0,\ c_2=-9c_1 \uparrow\end{cases} \to R_2(r)=\frac{1}{8}\big[\frac{9}{r}-r\big]$.

La solución es pues: $\boxed{u(r,\theta)=3-r+\frac{1}{8}\big[\frac{9}{r}-r\big]\cos\theta}$.

2. Hallar una corta solución no trivial de $x(2+x^2)y''+2y'-2xy=0$ que sea analítica en $x=0$, escribiendo la regla de recurrencia. [1.5 puntos]

$x^2y''+x\frac{2}{2+x^2}y'-\frac{2x^2}{2+x^2}y=0$, $x=0$ singular regular con $r=0$ doble. Es analítica la $y_1=\sum_{n=0}^{\infty}c_kx^k$ →

$\sum_2\big[2k(k-1)c_kx^{k-1}+k(k-1)c_kx^{k+1}\big]+\sum_1 2kc_kx^{k-1}+\sum_0 -2c_kx^{k+1}=\sum_0\big[2k^2c_kx^{k-1}+(k-2)(k+1)c_kx^{k+1}\big]=0$.

x^0: $2c_1=0$. x^1: $8c_2-2c_0=0$, $c_2=\frac14c_0$. x^{k-1}: $2k^2c_k+(k-4)(k-1)c_{k-2}=0$, $\boxed{c_k=-\frac{(k-4)(k-1)}{2k^2}c_{k-2}}$ regla de recurrencia

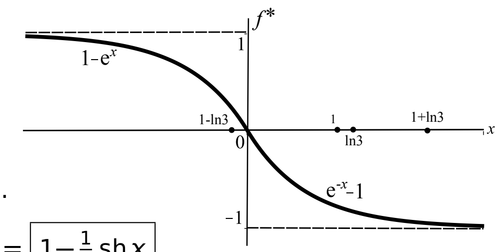
→ $c_3=c_5=\cdots=0$, y $c_4=0=c_6=\cdots$ → $\boxed{y_1=1+\frac14x^4}$. [La $y_2=x\sum b_kx^k+y_1\ln x$ no es analítica].

5. Sea $\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=0,\ x\geq0,\ t\in\mathbf{R}\\ u(x,0)=e^{-x},\ u_t(x,0)=0,\ u(0,t)=1\end{cases}$. Hallar y simplificar: i) $u(1,\ln3)$, ii) $u(x,\ln3)$ para todo x. [Usar una v sencilla y dar la expresión de las extensiones].

$w=u-1\to\begin{cases}w_{tt}-w_{xx}=0,\ x\geq0\\ w(x,0)=e^{-x}-1,\ w_t(x,0)=w(0,t)=0\end{cases}$ Para usar D'Alembert extendemos f a f^* impar en **R** y entonces su solución es $w=\frac12\big[f^*(x+t)+f^*(x-t)\big]$.

i) $w(1,\ln3)=\frac12\big[f^*(1+\ln3)+f^*(\overset{\leq0}{1-\ln3})\big]=\frac12\big[f(1+\ln3)-f(\ln3-1)\big]$

$=\frac16\big[e^{-1}-e^{1}\big]\to\boxed{u(1,\ln3)=1-\frac13\operatorname{sh}1}$.



ii) Si $x\geq\ln3$, la f^* está evaluada siempre en valores positivos:

$u=1+\frac12\big[f(x+\ln3)+f(x-\ln3)\big]=\frac12\big[e^{-x}e^{-\ln3}+e^{-x}e^{\ln3}\big]=\boxed{\frac53e^{-x}}$.

Para $x\leq\ln3$, es negativo $x-\ln3$: $u=1+\frac12\big[f(x+\ln3)-f(\ln3-x)\big]=\boxed{1-\frac13\operatorname{sh}x}$.

5*. Resolver utilizando la transformada de Fourier: $\begin{cases}u_{tt}-4u_{xx}=0\\ u(x,0)=f(x),\ u_t(x,0)=2f'(x)\end{cases}$.

$\begin{cases}\hat u_{tt}+4k^2\hat u=0\\ \hat u(k,0)=\hat f(k),\ \hat u_t(k,0)=-2ik\hat f(k)\end{cases}$, $\mu=\pm2ki$, $\hat u=p(k)e^{2kit}+q(k)e^{-2kit}\xrightarrow{c.i.}\begin{cases}p(k)+q(k)=\hat f(k)\\ 2ki\,p(k)-2ki\,q(k)=-2ki\hat f(k)\end{cases}$

→ $\hat u=\hat f(k)\,e^{-2ikt}$ → $\boxed{u(x,t)=f(x+2t)}$. [Fácilmente comprobable].

Sale fácil con D'Alembert, pero no se pide eso: $u=\frac12\big[f(x+2t)+f(x-2t)\big]+\frac14\big[2f(x+2t)-2f(x-2t)\big]=f(x+2t)$.

6. Sea $\begin{cases}x^2y''+xy'+\lambda y=0\\ y(1)=5y(2)-6y'(2)=0\end{cases}$. **a]** Escribir la ecuación en forma autoadjunta y precisar si $\lambda=-1$ y $\lambda=0$ son o no autovalores, dando la autofunción en el caso que lo sea.
b] Determinar cuántas soluciones de $x^2y''+xy'-y=x^2$ cumplen esas mismas condiciones de contorno.

a] $(xy')'+\frac1x\lambda y=0$ forma autoadjunta. Ecuación de Euler con $\mu(\mu-1)+\mu+\lambda=0$, $\mu=\pm\sqrt{-\lambda}$. La soluciones son:

$\lambda=-1$: $\mu=\pm1$, $y=c_1x+c_2x^{-1}$, $y'=c_1-c_2x^{-2}\xrightarrow{c.c.}\begin{cases}c_1+c_2=0\\ 4c_1+4c_2=0\end{cases}\to c_2=-c_1$. Autovalor, con $y_{-1}=\boxed{\{x-\frac1x\}}$.

$\lambda=0$: $\mu=0$ doble, $y=c_1+c_2\ln x$, $y'=c_2x^{-1}\xrightarrow{c.c.}\begin{cases}c_1=0\ \searrow\\ c_2(5\ln2-3)=0\end{cases}\to c_1=c_2=0$. No es autovalor.

b] El problema homogéneo tiene infinitas soluciones. $(xy')'-\frac1xy=x=f(x)$. $\int_1^2 f\,y_{-1}\,dx=\int_1^2(x^2-1)\,dx>0$.
⇒ el no homogéneo tiene **no tiene solución**. [Se podría ver a partir de la solución $y=c_1x+c_2x^{-1}+\frac13x^2$].

6*. Resolver el problema para la ecuación de Laplace en el espacio $\begin{cases}u_{rr}+\frac2ru_r+\frac1{r^2}\big[u_{\theta\theta}+\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}u_\theta\big]=0,\ r<2\\ u(2,\theta)=6\cos2\theta,\ \theta\in[0,\pi]\end{cases}$.

En formulario: $u=R\Theta\to(\operatorname{sen}\theta\,\Theta')'+\lambda\operatorname{sen}\theta\,\Theta=0\xrightarrow{\Theta\text{ acotada en }0,\pi}\Theta_n=\{P_n(\cos\theta)\}$, si $\lambda=n(n+1)$, $n=0,1,\ldots$
$P_0=1$, $P_1=x$, $P_2=\frac32x^2-\frac12$, ...

Y además $r^2R''+2rR'-n(n+1)R=0\xrightarrow{R\text{ acotada en }0}R_n=\{r^n\}\to u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^nP_n(\cos\theta)$.

Sólo falta por cumplir: $u(2,\theta)=a_0+2a_1\cos\theta+4a_2\big(\frac32\cos^2\theta-\frac12\big)+\cdots=6\cos2\theta=6\cos^2\theta-6\operatorname{sen}^2\theta$

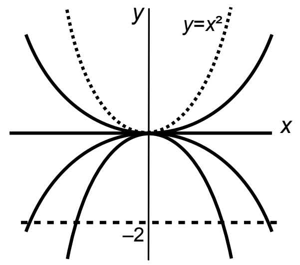
$=12\cos^2\theta-6=8\big(\frac32\cos^2\theta-\frac12\big)-2\to a_2=2$, $a_0=-2$.

La solución única del problema es, por tanto, $\boxed{u(r,\theta)=3r^2\cos^2\theta-r^2-2}$ $\big[=2z^2-x^2-y^2-2\big]$.

Soluciones del examen de septiembre de 2017 de Métodos Matemáticos II (C)

Hacer 1, 2 y 3 (de 1.6 puntos). Elegir entre 4 y 5 (1.4 puntos) y entre 6 y 7 (2 puntos). Hacer 8 (1.8 puntos).

1. Resolver $\begin{cases} 2yu_y+xu_x=2u-2y^2 \\ u(-2,y)=4-y^2 \end{cases}$. ¿Cuántas soluciones de la ecuación cumplen $u(x,x^2)=0$? [1,6pt]



$\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x} \to y=Cx^2$. $\begin{cases} \xi=y/x^2 \\ \eta=y \end{cases} \to \begin{cases} u_y=\frac{1}{x^2}u_\xi+u_\eta \\ u_x=-\frac{2y}{x^3}u_\xi \end{cases} \to 2yu_\eta=2u-2y^2$, $u_\eta=\frac{u}{\eta}u-\eta$

$\to u=p(\xi)\,\eta-\eta\int d\eta=p(\xi)\,\eta-\eta^2$. $u(x,y)=p\big(\frac{y}{x^2}\big)y-y^2$, solución general.

Peor $\begin{cases} \xi=y/x^2 \\ \eta=x \end{cases} \to xu_\eta=2u-2y^2$, $u_\eta=\frac{2u}{\eta}-2\xi^2\eta^3 \to u=q(\xi)\,\eta^2-\xi^2\eta^4=q\big(\frac{y}{x^2}\big)x^2-y^2$.

Imponiendo el dato: $p\big(\frac{y}{4}\big)y-y^2=4-y^2$, $p\big(\frac{y}{4}\big)=\frac{4}{y}$, $p(v)=\frac{1}{v}$, $\boxed{u(x,y)=x^2-y^2}$.

o bien: $q\big(\frac{y}{4}\big)4-y^2=4-y^2$, $q\big(\frac{y}{4}\big)=1$, $q(v)\equiv 1$, $u(x,y)=x^2-y^2$.

$\big[$Solución única por no ser tangente $x=-2$ a las características ó porque $T(y)=0\cdot(2y)-(-2)\cdot 1\equiv 2\neq 0\big]$.

Para el otro dato (sobre característica) en principio puede haber infinitas o ninguna solución.

$\big[$Que $T(x)=1\cdot 2x^2-2x\cdot x\equiv 0$ nos confirma que es caracterítica, pues es tangente en cada punto$\big]$.

Imponemos el dato para saber lo que sucede: $p(1)x^2-x^4=0 \to p(1)=x^2$ $\big[$ó $q(1)=x^2\big]$. **Ninguna solución**.

2. Hallar 3 términos no nulos del desarrollo en torno a $x=0$ de **una** solución de $x^2y''-4xy'+(6-x^2)y=0$, dando la regla de recurrencia. [1.6pt]

$x=0$ es singular regular con $r^2-5r+6=0 \to r=3,2$. Hay solución de la forma $y_1=\sum_{n=0}^{\infty}c_kx^{k+3} \to$

$$\sum_0\Big[(k+3)(k+2)c_kx^{k+3}-4(k+3)c_kx^{k+3}+6c_kx^{k+3}-c_kx^{k+5}\Big]=\sum_0\Big[(k+1)kc_kx^{k+3}-c_kx^{k+5}\Big]=0$$

x^3: $0\cdot c_0=0$, c_0 indeterminado. x^4: $2c_1=0$, $c_1=0$. x^5: $6c_2-c_0=0$, $c_2=\frac{1}{6}c_0$.

x^{k+3}: $(k+1)kc_k-c_{k-2}=0$, $\boxed{c_k=\frac{1}{(k+1)k}c_{k-2}}$ regla de recurrencia $\to c_3=c_5=\cdots=0$, y además $c_4=\frac{1}{20}c_2=\frac{1}{120}c_0$, ...

$\to \boxed{y_1=x^3+\frac{1}{6}x^5+\frac{1}{120}x^7+\cdots}$. No es difícil ver que $y_1=x^2\big[x+\frac{1}{6}x^3+\cdots+\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\cdots\big]=x^2\,\mathrm{sh}\,x$.

3. Sea $\begin{cases} y''+2y'+\lambda y=0 \\ y(0)=y(\pi)=0 \end{cases}$. **a]** Hallar sus autovalores y sus autofunciones $\{y_n\}$. $\big[$Ayuda: todos los $\lambda_n>1\big]$. **b]** Calcular $\langle y_n,y_n\rangle$. [1.6pt]

a] Si $\lambda>1$: $\mu^2+2\mu+\lambda=0$, $\mu=-1\pm\sqrt{1-\lambda}=-1\pm i\,w$, con $w=\sqrt{\lambda-1} \to y=(c_1\cos wx+c_2\,\mathrm{sen}\,wx)\,e^{-x}$.

Imponiendo los datos: $y(0)=c_1=0 \to y(\pi)=e^{-\pi}c_2\,\mathrm{sen}\,w\pi=0 \to w_n=n$, $\boxed{\lambda_n=1+n^2}$.

Para esos valores c_2 queda indeterminado, con lo que laa autofunciones son $\boxed{y_n=\{e^{-x}\,\mathrm{sen}\,nx\}}$.

b] La ecuación en forma autoadjunta queda $\big[e^{2x}y'\big]'+e^{2x}\lambda y=0$, con lo que el peso es $r(x)=e^{2x}$.

Por tanto, $\langle y_n,y_n\rangle=\int_0^\pi r\,y_n^2\,dx=\int_0^\pi e^{2x}\,e^{-2x}\,\mathrm{sen}^2nx\,dx=\int_0^\pi\big(\frac{1}{2}-\frac{\cos 2nx}{2}\big)dx=\frac{\pi}{2}-\big[\frac{\mathrm{sen}\,2nx}{4n}\big]_0^\pi=\boxed{\frac{\pi}{2}}$.

4. Utilizando la $\mathcal{F}$ resolver $\begin{cases} u_t-2tu_{xx}-u_x=0 \\ u(x,1)=e^{-x^2/4} \end{cases}$. [1.4pt]

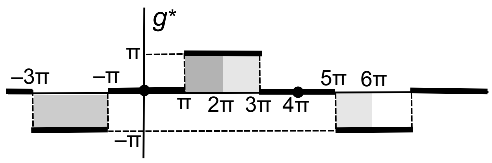
$\begin{cases} \hat{u}_t+2tk^2\hat{u}+ik\hat{u}=0 \\ \hat{u}(k,1)=\sqrt{2}\,e^{-k^2} \end{cases} \to \hat{u}=p(k)\,e^{-t^2k^2-ikt} \underset{c.i.}{\to} p(k)\,e^{-k^2-ik}=\sqrt{2}\,e^{-k^2}$, $p(k)=\sqrt{2}\,e^{ik}$, $\hat{u}(k,t)=\sqrt{2}\,e^{-t^2k^2}e^{ik(1-t)}$.

$\mathcal{F}^{-1}\big(\sqrt{2}\,e^{-t^2k^2}\big)=\frac{1}{t}\,e^{-x^2/4t^2}$ y $\mathcal{F}^{-1}\big[\hat{f}(k)\,e^{ika}\big]=f(x-a) \to \boxed{u(x,t)=\frac{1}{t}\,e^{-(x+t-1)^2/4t^2}}$.

5. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0,\ x\in[0,4\pi],\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=g(x)=\begin{cases} \pi,\ x\in[\pi,3\pi] \\ 0,\ \text{resto de } [0,4\pi] \end{cases} \\ u(0,t)=u(4\pi,t)=0 \end{cases}$ [el mismo que **6.**] Dibujar la extensión adecuada de $g(x)$ y calcular utilizando D'Alembert el valor de: i) $u(\pi,4\pi)$, ii) $u(3\pi,3\pi)$. [1.4pt]

Para aplicar D'Alembert debemos extender g de forma impar y 8π-periódica a una g^* definida en todo $\mathbf{R}$. Entonces será:

$u(x,t)=\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}g^*(s)\,ds$. En particular resulta:



i) $u(\pi,4\pi)=\frac{1}{2}\int_{-3\pi}^{5\pi}g^*=\boxed{0}$ (se cancelan los 2 rectángulos).

ii) $u(3\pi,3\pi)=\frac{1}{2}\int_0^{6\pi}g^*=\frac{1}{2}\int_\pi^{2\pi}\pi\,ds=\boxed{\frac{1}{2}\pi^2}$ (se cancelan las áreas de los 2 cuadrados de $[2\pi,3\pi]$ y $[5\pi,6\pi]$).

6. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\in[0,4\pi]\,,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=g(x)=\begin{cases}\pi\ ,\ x\in[\pi,3\pi] \\ 0\ ,\ \text{resto de } [0,4\pi]\end{cases} \\ u(0,t)=u(4\pi,t)=0 \quad \text{[el mismo que } \mathbf{5.}\text{]}\end{cases}$ Resolverlo por separación de variables. Hallar $u(\pi,4\pi)$ usando la serie solución. Aproximar $u(3\pi,3\pi)$ con los dos primeros términos no nulos de la serie $\big[32\sqrt{2}/9\approx 5.03\big]$. [1.9pt]

Haciendo $u=XT$ sale (formulario): $\begin{cases}X''+\lambda X=0\\ X(0)=X(4\pi)=0\end{cases} \to \lambda_n=\frac{n^2}{16}\,,\ X_n=\big\{\operatorname{sen}\frac{nx}{4}\big\}\,,\ n=1,2,\dots$ y además $T''+\lambda T=0$.

$T''+\frac{n^2}{16}T=0 \to T=c_1\cos\frac{nt}{4}+c_2\operatorname{sen}\frac{nt}{4}$. Imponiendo ya $T(0)=0$ (de $u(x,0)=0$) tenemos $T_n=\big\{\operatorname{sen}\frac{nt}{4}\big\}$.

La solución será $u(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n\operatorname{sen}\frac{nt}{4}\operatorname{sen}\frac{nx}{4}$ donde sólo faltan calcular los c_n a partir del otro dato inicial:

$$u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4}\operatorname{sen}\frac{nx}{4}=g(x)\to c_n=\frac{4}{n}\frac{2}{4\pi}\int_0^{4\pi}g(x)\operatorname{sen}\frac{nx}{4}\,dx=\frac{2}{n}\int_\pi^{3\pi}\operatorname{sen}\frac{nx}{4}\,dx=\boxed{\frac{8}{n^2}\Big[\cos\frac{n\pi}{4}-\cos\frac{3n\pi}{4}\Big]}\,.$$

Deducimos que $u(\pi,4\pi)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n\underbrace{\operatorname{sen}n\pi}_{=0}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}=\boxed{0}$.

Los 2 primeros términos de la serie solución (es $c_2=0$ por serlo $\cos\frac{\pi}{2}$ y $\cos\frac{3\pi}{2}$), acompañan a c_1 y c_3:

$$u(3\pi,3\pi)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\operatorname{sen}^2\frac{3n\pi}{4}=8\Big[\underbrace{\cos\frac{\pi}{4}}_{\sqrt2/2}-\underbrace{\cos\frac{3\pi}{4}}_{-\sqrt2/2}\Big]\underbrace{\operatorname{sen}^2\frac{3\pi}{4}}_{1/2}+\frac{8}{9}\Big[\underbrace{\cos\frac{3\pi}{4}}_{-\sqrt2/2}-\underbrace{\cos\frac{9\pi}{4}}_{\sqrt2/2}\Big]\underbrace{\operatorname{sen}^2\frac{9\pi}{4}}_{1/2}+\cdots=4\sqrt2-\frac{4\sqrt2}{9}+\cdots$$

Quedándonos con los 2 primeros términos $\boxed{u(3\pi,3\pi)\approx\frac{32\sqrt2}{9}}$ $\big[\approx 5.03$, no muy lejos del valor exacto $\frac{\pi^2}{2}\approx 4.93\big]$.

7. Resolver separando variables $\begin{cases}u_t-u_{xx}=0\,,\ x\in[0,1]\,,\ t>0\\ u(x,0)=2-x^2\equiv f(x)\\ u_x(0,t)=u_x(1,t)+2u(1,t)=0\end{cases}$. [Probar gráficamente que el problema de contorno que aparece tiene infinitos autovalores positivos y simplificar el resultado de $\langle y_n,f\rangle$]. [2pt]

Separando variables en este problema homogéneo (está en formulario) y usando las condiciones de contorno:

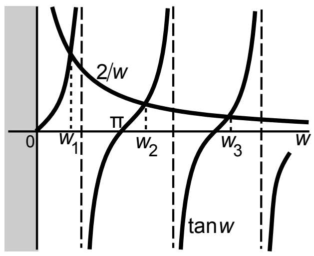
$\begin{cases}X''+\lambda X=0\\ X'(0)=X'(1)+2X(1)=0\end{cases}$ problema no conocido que da los λ_n y X_n, y además $T'=-\lambda_nT\to T_n=\big\{e^{-\lambda_nt}\big\}$.

Como $\alpha\alpha'=0$, $\beta\beta'=2$ y $q\equiv0$, no hay $\lambda<0$.

$\lambda=0$: $X=c_1+c_2x\xrightarrow{c.c.}\begin{cases}c_2=0\\ 2c_1+3c_2=0\end{cases}\to c_1=c_2=0$. No autovalor.

$\lambda>0$: $X=c_1\cos wx+c_2\operatorname{sen}wx$, $w=\sqrt\lambda\xrightarrow{c.c.}\begin{cases}c_2=0\ \searrow\\ c_1[-w\operatorname{sen}w+2\cos w]=0\to\end{cases}$

Los w_n son las infinitas raíces de $\tan w=\frac{2}{w}$, $\lambda_n=w_n^2$ y $X_n=\{\cos w_nx\}$.



Probamos pues $u(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n e^{-w_n^2t}\cos w_nx$. Y por el dato incial:

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos w_nx=f(x)\to c_n=\frac{\langle y_n,f\rangle}{\langle y_n,y_n\rangle}\,.\ \langle y_n,y_n\rangle=\int_0^1\cos^2w_nx\,dx=\frac12+\frac{\operatorname{sen}2w_n}{4w_n}=\frac{2+\operatorname{sen}^2w_n}{4}\ \Big[\frac{\cos w_n}{w_n}=\frac{\operatorname{sen}w_n}{2}\Big].$$

$$\langle y_n,f\rangle=\int_0^1(2-x^2)\cos w_nx=\frac{2-x^2}{w_n}\operatorname{sen}w_nx\Big]_0^1+\frac{2}{w_n}\int_0^1x\operatorname{sen}w_nx=\frac{\operatorname{sen}w_n}{w_n}-\frac{2\cos w_n}{w_n^2}+\frac{2}{w_n^2}\int_0^1\cos w_nx=\frac{2\operatorname{sen}w_n}{w_n^3}\,.$$

La solución única del problema es: $\boxed{u(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{8\operatorname{sen}w_n}{w_n^3(2+\operatorname{sen}^2w_n)}e^{-w_n^2t}\cos w_nx}$.

8. Resolver por separación de variables $\begin{cases}u_{rr}+\frac1r u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=3\operatorname{sen}\frac\theta2\,,\ r<1\,,\ 0<\theta<\pi\\ u(1,\theta)=u(r,0)=u_\theta(r,\pi)=0\end{cases}$. [1.9pt]

Separando variables sabemos que aparece $\begin{cases}\Theta''+\lambda\Theta=0\\ \Theta(0)=\Theta'(\pi)=0\end{cases}\to\Theta_n=\Big\{\operatorname{sen}\frac{(2n-1)\theta}{2}\Big\}\,,\ n=1,2,\dots$.

[Y también $r^2R''+rR'-\lambda R=0$, que no se utiliza ahora por ser problema no homogéneo].

Probamos $u(r,\theta)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}R_n(r)\Theta_n(\theta)$, que llevamos a la EDP: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big[R_n''+\frac1rR_n'-\frac{(2n-1)^2}{4r^2}R_n\Big]\operatorname{sen}\frac{(2n-1)\theta}{2}=\overbrace{3\operatorname{sen}\frac\theta2}^{\text{ya desarrollada}}$.

Debe ser además $u(1,\theta)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}R_n(1)\Theta_n(\theta)=0\to R_n(1)=0\ \forall n$. Y la solución debe estar acotada en el origen.

La única R_n no nula saldrá de resolver el problema:

$\begin{cases}r^2R_1''+rR_1-\frac14R_1=3r^2\\ R_1\text{ acotada},\ R_1(1)=0\end{cases}\xrightarrow{\bullet}R_1=c_1r^{1/2}+c_2r^{-1/2}+\frac45r^2\xrightarrow{c.c.}c_2=0\,,\ c_1+\frac45=0\to\boxed{u(r,\theta)=\frac45\big[r^2-r^{1/2}\big]\operatorname{sen}\frac\theta2}$.

- Ecuación de Euler: $\mu(\mu-1)+\mu-\frac14=0$, $\mu=\pm\frac12$. $R_1=c_1r^{1/2}+c_2r^{-1/2}+R_p$.

  $R_p=Ar^2\ (R_p=Ae^{2s})\to 2A+2A-\frac14A=3$, $A=\frac45$.

  O con la fvc: $\begin{vmatrix}r^{1/2} & r^{-1/2}\\ r^{-1/2}/2 & -r^{-3/2}/2\end{vmatrix}=-r^{-1}$, $R_p=-r^{-1/2}\int\frac{r^{1/2}\cdot3}{r^{-1}}+r^{1/2}\int\frac{r^{-1/2}\cdot3}{r^{-1}}=-\frac65r^2+2r^2=\frac45r^2$.