Soluciones del examen de septiembre de Métodos II (E) (11-9-20)

Hacer 4 de los 6 problemas (cada uno vale 2.5 puntos), eligiendo al menos uno entre 1 y 2, otro entre 3 y 4 y otro entre 5 y 6.

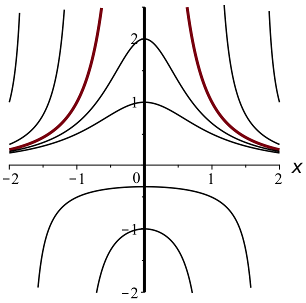
1. Sea $2xy^2u_y-u_x=2xyu$. [1.2+0.9+0.4] **a]** Calcular su solución general. **b]** Hallar la que cumple $u(0,y)=1$ probando su unicidad. **c]** Estudiar cuántas soluciones de la ecuación satisfacen $u(x,\frac{1}{x^2})=1$.

a] $\frac{dy}{dx}=-2xy^2$, $\boxed{\frac{1}{y}-x^2=C}$. $\begin{cases}\xi=\frac{1}{y}-x^2\\ \eta=y\end{cases}\to u_\eta=\frac{1}{\eta}u$, $u=p(\xi)\,\eta=\boxed{p\big(\frac{1}{y}-x^2\big)y}$.

Peor: $\begin{cases}\xi=\frac{1}{y}-x^2\\ \eta=x\end{cases}\to u_\eta=-\frac{2\eta}{\xi+\eta^2}u$, $u=\frac{p(\xi)}{\xi+\eta^2}=p\big(\frac{1}{y}-x^2\big)y$ (como arriba).

b] $u(0,y)=p\big(\frac{1}{y}\big)y=1$, $p(v)=v$, $\boxed{u(x,y)=1-x^2y}$. Única porque la recta $x=0$ no es tangente a las características. O porque $T(y)=0\cdot0-1\cdot(-1)=1\neq0\ \forall y$.

c] Dato sobre característica dará infinitas o ninguna solución. $u\big(x,\frac{1}{x^2}\big)=\frac{p(0)}{x^2}=1$. Imposible. **No hay solución**. $\big[T(x)=\frac{2}{x^3}-\frac{2}{x^3}\equiv0$ confirma que es característica$\big]$.



2. Hallar la solución general de $3u_{tt}-2u_{xt}-u_{xx}+8u_t-8u_x=0$ [A partir de la forma canónica o mediante la $\mathcal{F}$].

$B^2-4AC=16$ hiperbólica $\begin{cases}\xi=x+t\\ \eta=x-\frac{t}{3}\end{cases}$, $\begin{cases}u_t=u_\xi-\frac{1}{3}u_\eta\\ u_x=u_\xi+u_\eta\end{cases}$, $\begin{cases}u_{tt}=u_{\xi\xi}-\frac{2}{3}u_{\xi\eta}+\frac{1}{9}u_{\eta\eta}\\ u_{xt}=u_{\xi\xi}+\frac{2}{3}u_{\xi\eta}-\frac{1}{3}u_{\eta\eta}\\ u_{xx}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\end{cases}\to -\frac{16}{3}u_{\xi\eta}-\frac{32}{3}u_\eta=0$, $u_{\xi\eta}+2u_\eta=0$.

$v_\xi=-2v$, $v=p^*(\eta)\,e^{-2\xi}=u_\eta$, $u=p(\eta)\,e^{-2\xi}+q(\xi)$, $\boxed{u(x,t)=p\big(x-\frac{t}{3}\big)e^{-2x-2t}+q(x+t)}$.

$3\hat{u}_{tt}+2ik\hat{u}_t+k^2\hat{u}+8\hat{u}_t+8ik\hat{u}=0$. $3\mu^2+2(4+ik)\mu+k^2+8ik=0\to\mu=\frac{1}{3}\big[4+ik\pm2\sqrt{4-4ik-k^2}\big]=\frac{ik-8}{3},-ik$

$\to\hat{u}(k,t)=p(k)\,e^{(ik-8)t/3}+q(k)\,e^{-ikt}$, $\boxed{u(x,t)=p\big(x-\frac{t}{3}\big)e^{-8t/3}+q(x+t)}$ (otra forma equivalente).

3. Sea $2x^2y''+x(3-x)y'-y=0$. **a]** Estudiar si la ecuación posee soluciones no triviales analíticas en $x=0$. **b]** Calcular una solución no acotada en $x=0$, escribiendo la regla de recurrencia. [0.9+1.6]

a] $r^2+\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}=0$, $r=\frac{1}{2},-1$. $y_1=x^{1/2}\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k$, $y_2=x^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k$, $c_0,b_0\neq0$. Ninguna analítica.

b] No acotada $y_2=\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^{k-1}\to\sum_{k=0}^{\infty}\big[2(k-1)(k-2)b_kx^{k-1}+3(k-1)b_kx^{k-1}-(k-1)b_kx^k-b_kx^{k-1}\big]=0\to$

x^{-1}: $(4-3-1)b_0=0$, b_0 cualquiera. x^0: $b_0-b_1=0$, $b_1=b_0$. x^1: $(3-1)b_2=0$, $b_2=0$.

x^{k-1}: $\big[2k^2-6k+4+3k-3-1\big]b_k-(k-2)b_{k-1}=0$. $\boxed{b_k=\frac{k-2}{k(2k-3)}b_{k-1}}\to b_k=0, k\geq2$. $\boxed{y_2=\frac{1}{x}+1}$.

4. Sea $\begin{cases}x^2y''-xy'+\lambda y=0\\ y'(1)=y(3)=0\end{cases}$. Escribir la ecuación en forma autoadjunta. Estudiar si i) $\lambda=-3$ y ii) $\lambda=\frac{3}{4}$ son o no autovalores, dando la autofunción en caso afirmativo. [0.5+0.8+1.2]

$\big[\frac{y'}{x}\big]'+\frac{\lambda}{x^3}y=0$. $\mu^2-2\mu+\lambda=0$, $\mu=1\pm\sqrt{1-\lambda}$. i) $\lambda=-3$, $y=c_1x^3+c_2x^{-1}$. $\left.\begin{matrix}3c_1-c_2=0\\ 27c_1+c_2/3=0\end{matrix}\right\}$ No autovalor. [O $\alpha\alpha'=\cdots=0$].

ii) $\lambda=\frac{3}{4}$, $\mu=\frac{3}{2},\frac{1}{2}$. $y=c_1x^{3/2}+c_2x^{1/2}$. $\left.\begin{matrix}\frac{3}{2}c_1+\frac{1}{2}c_2=0\\ 3\sqrt{3}c_1+\sqrt{3}c_2=0\end{matrix}\right\}c_2=-3c_1$. Autovalor con autofunción $\boxed{\{x^{3/2}-3x^{1/2}\}}$.

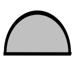
5. Resolver por separación de variables $\begin{cases}u_t-u_{xx}=t\,\mathrm{sen}\,x,\ x\in(0,\pi),\ t>0\\ u(x,0)=\mathrm{sen}\,2x,\ u(0,t)=u(\pi,t)=0\end{cases}$.

$u=X(x)T(t)\to\begin{cases}X''+\lambda X=0\\ X(0)=X(\pi)=0\end{cases}\to X_n=\{\mathrm{sen}\,nx\}$, $n=1,2,\dots$ [Y además $T'+\lambda T=0$ que ahora no usamos].

$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\,\mathrm{sen}\,nx\to\sum_{n=1}^{\infty}\big[T_n'+n^2T_n\big]\mathrm{sen}\,nx=t\,\mathrm{sen}\,x$. $u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\,\mathrm{sen}\,nx=\mathrm{sen}\,2x$.

$\begin{cases}T_1'+T_1=t\\ T_1(0)=0\end{cases}\to T_1=Ce^{-t}+t-1\xrightarrow{d.i.}C=1$, $\begin{cases}T_2'+4T_2=0\\ T_2(0)=1\end{cases}\to T_2=e^{-4t}$. $\boxed{u=\big(t-1+e^{-t}\big)\mathrm{sen}\,x+e^{-4t}\,\mathrm{sen}\,2x}$.

6. Resolver por separación de variables $\begin{cases}u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0,\ r<1,\ 0<\theta<\pi\\ u(1,\theta)=\theta^2,\ u_\theta(r,0)=u_\theta(r,\pi)=0\end{cases}$.



$\begin{cases}\Theta''+\lambda\Theta=0\\ \Theta'(0)=\Theta'(\pi)=0\end{cases}\to\lambda_n=n^2$, $\Theta_n=\{\cos n\theta\}$, $n=0,1,\dots$ $r^2R''+rR-n^2R=0$ y acotado $\to R_n=\{r^n\}$.

$u=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,r^n\cos n\theta\xrightarrow{u(1,\theta)=\theta^2}\boxed{u(r,\theta)=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}r^n\cos n\theta}$, pues $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\theta^2d\theta=\frac{2\pi^2}{3}$,

$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\theta^2\cos n\theta\,d\theta=\frac{2\theta^2}{\pi n}\,\mathrm{sen}\,n\theta\Big]_0^\pi-\frac{4}{n\pi}\int_0^\pi\theta\,\mathrm{sen}\,n\theta\,d\theta=\frac{4\theta}{\pi n^2}\cos n\theta\Big]_0^\pi-\frac{4}{n^2\pi}\int_0^\pi\cos n\theta\,d\theta=\frac{4(-1)^n}{n^2}$.