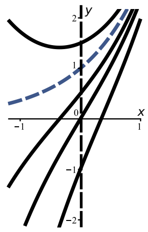
Soluciones del examen de junio de Métodos II (A) (8-6-21)

Hacer 3 de los 4 primeros problemas (de 1.7 pts), **el 5 es obligatorio** (2.5 pts) **y elegir 1 entre 6 y 7** (2.4 pts).

1. Sea $(y-2e^x)u_y - u_x = u$. **a]** Calcular su solución general y la única que satisface $u(0,y)=y$.
b] Dar 2 soluciones distintas que cumplan uno de estos datos: i) $u(x,e^x)=0$, ii) $u(x,e^x)=1$.



a] $\frac{dy}{dx}=-y+2e^x$ lineal, $y=Ce^{-x}+e^x$, $e^x y - e^{2x}=C$ características.

$\begin{cases}\xi=e^x y-e^{2x}\\ \eta=x\end{cases}$, $\begin{cases}u_y=e^x u_\xi\\ u_x=(e^x y-2e^{2x})u_\xi+u_\eta\end{cases}$ $\to u_\eta=-u$, $u(x,y)=p(\xi)\,e^{-\eta}=\boxed{p(e^x y-e^{2x})\,e^{-x}}$.

[Mucho peor eligiendo $\eta=y$].

$u(0,y)=p(y-1)=y$, $p(v)=v+1$, $\boxed{u(x,y)=y-e^x+e^{-x}}$. [Es única por no ser tangente $x=0$ a las características (y' siempre finita). O porque $T(y)=0\cdot(y-2)-1\cdot(-1)=1\neq 0\ \forall y$].

b] Dato sobre característica dará infinitas o ninguna solución [$T(x)=-1\cdot e^x+e^x\equiv 0$ confirma que es característica].
ii) $u(x,e^x)=p(0)\,e^{-x}=1$ es imposible y **no hay solución**. Pero i) $u(x,e^x)=0$ lo cumplen infinitas soluciones.
Una para cada $p\in C^1$ que cumpla $p(0)=0$. Por ejemplo, $p(v)\equiv 0 \to u\equiv 0$. $p(v)=v \to u=y-e^x$ ...

2. Resolver $\begin{cases}u_{tt}-u_{xt}+\frac{1}{4}u_{xx}+u_t-\frac{1}{2}u_x=0\\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=g(x)\end{cases}$. [A partir de la forma canónica o mediante la $\mathcal{F}$].

$B^2-4AC=0$ parabólica $\begin{cases}\xi=x+\frac{t}{2}\\ \eta=t\end{cases}$, $\begin{cases}u_t=\frac{1}{2}u_\xi+u_\eta\\ u_x=u_\xi\end{cases}$, $\begin{cases}u_{tt}=\frac{1}{4}u_{\xi\xi}+u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\\ u_{xt}=\frac{1}{2}u_{\xi\xi}+u_{\xi\eta}\\ u_{xx}=u_{\xi\xi}\end{cases}$ $\to u_{\eta\eta}+u_\eta=0$, $\mu(\mu+1)=0$, $u=p(\xi)+q(\xi)\,e^{-\eta}$.

se podría usar $\xi=2x+t$

$u(x,t)=p(x+\frac{t}{2})+q(x+\frac{t}{2})\,e^{-t}$, $u_t=\frac{p'}{2}+[\frac{q'}{2}-q]\,e^{-t}$

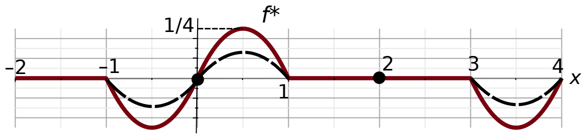
$\to u(x,0)=p(x)+q(x)=0 \to -q(x)=g(x)=p(x)$. $\boxed{u(x,t)=g(x+\frac{t}{2})[1-e^{-t}]}$.

$\begin{cases}\hat{u}_{tt}+ik\hat{u}_t-\frac{1}{4}k^2\hat{u}+\hat{u}_t+\frac{1}{2}ik\hat{u}=0\\ \hat{u}(k,0)=0,\ \hat{u}(k,0)=\hat{g}(k)\end{cases}$. $\mu^2+(1+ik)\mu-\frac{1}{4}k^2+\frac{1}{2}ik=0$, $\mu=\frac{-1-i\pm\sqrt{1}}{2}=-\frac{ik}{2},-1-\frac{ik}{2}$

$\to \hat{u}=p(k)\,e^{-ikt/2}+q(k)\,e^{-t}e^{-ikt/2}$, $\begin{cases}p(k)+q(k)=0\\ -\frac{ik}{2}[p(k)+q(k)]-q(k)=\hat{g}(k)\end{cases}$, $\hat{u}(k,t)=\hat{g}(k)\,e^{-ikt/2}[1-e^{-t}]^{\uparrow}$

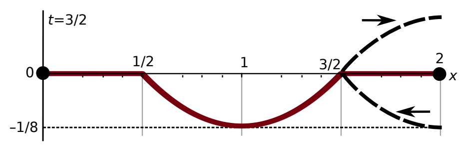
3. Sea $\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=0,\ x\in[0,2],\ t\in\mathbf{R}\\ u(x,0)=\begin{cases}x-x^2,\ x\in[0,1]\\ 0,\ x\in[1,2]\end{cases}\\ u_t(x,0)=u(0,t)=u(2,t)=0\end{cases}$. Utilizando D'Alembert: **a]** Hallar el valor de $u(1,\frac{3}{2})$.
b] Dibujar $u(x,\frac{3}{2})$. **c]** Dar la expresión de $u(x,\frac{3}{2})$.

Se comienza extendiendo f a f^* impar y 4-periódica.



a] $u(1,\frac{3}{2})=\frac{1}{2}[f^*(\frac{5}{2})+f^*(-\frac{1}{2})]=-\frac{1}{2}f(\frac{1}{2})=\boxed{-\frac{1}{8}}$.

b] Las $\frac{1}{2}f^*$ llevadas $\frac{3}{2}$ a izquierda y derecha se suman en $[0,2]$. Queda la que viene de $[-1,0]$ y se cancela (por ser las parábolas simétricas) lo que proviene de $[0,\frac{1}{2}]$ con lo que llega desde $[3,\frac{7}{2}]$.



c] En $[-1,0]$ es $f^*(x)=x(x+1) \Rightarrow u(x,\frac{3}{2})=\boxed{\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2})(x-\frac{3}{2})}$ en $[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$ y 0 en el resto de $[0,2]$.

4. Sea $x(x+1)y''+(x-1)y'=0$. Escribir 3 términos no nulos del desarrollo de una solución que se anule en $x=0$, haciendo uso de la regla de recurrencia. Estudiar si hay soluciones no acotadas cuando $x\to\infty$.

$x=0$ singular regular con $a^*(x)=\frac{x-1}{x+1}$, $b^*(x)=0$, $r=2,0$. Se anula en $x=0$:

$$y_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^{k+2} \ \to\ \sum_{k=0}^{\infty}\big[(k+2)(k+1)c_k x^{k+2}+(k+2)(k+1)c_k x^{k+1}+(k+2)c_k x^{k+2}-(k+2)c_k x^{k+1}\big]=0\ \to$$

$$x^1: 2c_0-2c_0=0,\ \forall c_0.\quad x^2: 4c_0+3c_1=0,\ c_1=-\tfrac{4}{3}c_0.$$

$$x^{k+1}: (k+1)^2c_{k-1}+k(k+2)c_k=0 \to c_k=-\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}c_{k-1} \ \to\ c_2=-\tfrac{9}{8}c_1=\tfrac{3}{2}c_0,\ \dots \to$$

$\boxed{y_1=x^2-\frac{4}{3}x^3+\frac{3}{2}x^4+\cdots}$ [$=2\ln(1+x)-\frac{2x}{1+x}$ (no acotada) ya que $v'=[\frac{1}{x}-\frac{2}{x+1}]v$, $v=\frac{Cx}{(x+1)^2}$, ...].

$x=\frac{1}{s} \to \frac{1}{s}(1+\frac{1}{s})[s^4\ddot{y}+2s^3\dot{y}]-s^2(\frac{1}{s}-1)\dot{y}=0$, $s(1+s)\ddot{y}+(1+3s)\dot{y}=0$, $r=0$ doble. La obvia $y_1=1$ es acotada, pero $y_2=s\sum_{k=0}^{\infty}c_k s^k+\ln s$ **no está acotada** para $s\to 0^+$ ($x\to\infty$). [Las series de $x=0$ no informan sobre el infinto].

5. Resolver por separación de variables $\begin{cases} u_t-2tu_{xx}=e^{-t^2}\cos x\,,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\ t>0 \\ u(x,0)=\cos 3x\,,\ u_x(0,t)=u\left(\frac{\pi}{2},t\right)=0 \end{cases}$.

La ecuación es nueva (no es exactamente la conocida con k constante) y empezamos separando en la homogénea:

$u=X(x)T(t)\,,\ \frac{X''}{X}=\frac{T'}{2tT}=-\lambda\ \to\ \begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X'(0)=X(\pi/2)=0 \end{cases}$, $X_n=\{\cos(2n-1)x\}$, $n=1,2,\dots$ [Y además $T'+2\lambda tT=0$].

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\cos(2n-1)x \xrightarrow{\text{EDP}} \sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n'+2(2n-1)^2tT_n\right]\cos(2n-1)x=e^{-t^2}\cos x \ \text{(ya desarrollada).}$$

$$\xrightarrow{\text{D.I.}}\ u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\cos(2n-1)x=\cos 3x\to T_2(0)=1 \text{ y demás } T_n(0)=0\,.$$

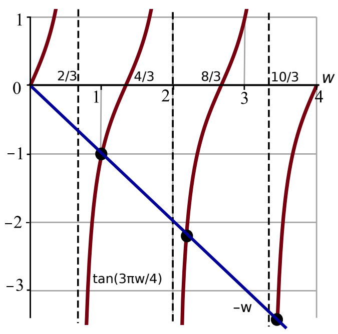
$\begin{cases} T_1'+2tT_1=e^{-t^2} \\ T_1(0)=0 \end{cases}\to T_1=Ce^{-t^2}+e^{-t^2}\int e^{t^2}e^{-t^2}=Ce^{-t^2}+t\,e^{-t^2}\xrightarrow{d.i.}C=0\,.$ $\begin{cases} T_2'+18tT_2=0 \\ T_2(0)=1 \end{cases}\to T_2=e^{-9t^2}\,.$

El resto de T_n son nulas, porque 0 es solución y el problema de valores iniciales tiene solución única.

La solución (única como se puede probar) es: $\boxed{u(x,t)=t\,e^{-t^2}\cos x+e^{-9t^2}\cos 3x}$.

6. Sea $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y(0)=y\left(\frac{3\pi}{4}\right)+y'\left(\frac{3\pi}{4}\right)=0 \end{cases}$. **a]** Probar que $\lambda_1=1$ es autovalor, dar su autofunción $\{y_1\}$ y escribir el término con y_1 del desarrollo de $f(x)=1$ en autofunciones del problema.
b] Hallar la constante a para la que $y''+y=3\,\text{sen}\,2x-a$ tiene infinitas soluciones con esos mismos datos.
c] Comprobar a partir de una gráfica que el segundo autovalor $\lambda_2>4$.

a] $y=c_1\cos x+c_2\,\text{sen}\,x\,.$ $\left.\begin{array}{l} c_1=0\ \to \\ c_2\left[\text{sen}\frac{3\pi}{4}+\cos\frac{3\pi}{4}\right]=c_2\left[\frac{1}{\sqrt2}-\frac{1}{\sqrt2}\right]=0 \end{array}\right\}\ \forall c_2$. Es autovalor.



Autofunción $\boxed{y_1=\{\text{sen}\,x\}}$. La ecuación está en forma autoadjunta y $r\equiv 1$.

$$1=c_1\,\text{sen}\,x+\sum_{n=2}^{\infty}c_ny_n\ \to\ c_1=\frac{\langle 1,y_1\rangle}{\langle y_1,y_1\rangle}=\frac{\int_0^{3\pi/4}\text{sen}\,x\,dx}{\int_0^{3\pi/4}\text{sen}^2x\,dx}=\frac{2+\sqrt2}{\int_0^{3\pi/4}(1-\cos 2x)\,dx}=\boxed{\frac{4(2+\sqrt2)}{3\pi+2}}\,.$$

b] $\int_0^{3\pi/4}(6\,\text{sen}\,x\cos x-a)\,\text{sen}\,x\,dx=\left[2\cos^3x+a\cos x\right]_0^{3\pi/4}=\frac{1}{\sqrt2}-a\left(\frac{1}{\sqrt2}+1\right)=0$

$\to\ a=\frac{1}{\sqrt2+1}=\boxed{\sqrt2-1}$. [Más largo usando $y=c_1\cos x+c_2\,\text{sen}\,x-\text{sen}\,2x-a$].

c] $y=c_1\cos wx+c_2\,\text{sen}\,wx\,,\ w=\sqrt{\lambda}\,.$ $y(0)=c_1=0\to c_2\left[\text{sen}\frac{3\pi w}{4}+w\cos\frac{3\pi w}{4}\right]=0\,.$

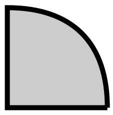
Los w_n son, por tanto, las soluciones de $\tan\frac{3\pi w}{4}=-w$ ($w=1$ lo cumple, claro), cuyas gráficas se ven arriba.

El siguiente corte w_2 entre ambas gráficas tiene lugar a la derecha de la asíntota en 2 $\Rightarrow\ \lambda_2=w_2^2>4$.

Y a la izquierda de $\frac{8}{3}\to\lambda_2<\frac{64}{9}$. Se logran mejores cotas con otras tangentes conocidas. Numéricamente es ≈ 4.76 .

7. Sea $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0\,,\ r<1\,,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2} \\ u(1,\theta)=f(\theta)\,,\ u(r,0)=u\left(r,\frac{\pi}{2}\right)=0 \end{cases}$. Hallar su solución si **a]** $f(\theta)=\text{sen}\,2\theta$ y el primer término de la serie solución para **b]** $f(\theta)=\cos\theta$.

El formulario nos da las ecuaciones que aparecen separando variables en la EDP:



$u=R\Theta\ \to\ \begin{cases} \Theta''+\lambda\Theta=0 \\ \Theta(0)=\Theta\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \end{cases}$, $\lambda_n=4n^2$, $\Theta_n=\{\text{sen}\,2n\theta\}$, $n=1,2,\dots$

Además: $r^2R''+rR'-\lambda R=0\to\mu^2=4n^2\,,\ R=c_1r^{2n}+c_2r^{-2n}\xrightarrow{\text{acotada}}R_n=\{r^{2n}\}\,.$

[La solución debe estar acotada cuando $r\to 0$ por estar el origen en el borde del recinto].

Probamos, pues, la serie $u(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\,r^{2n}\,\text{sen}\,2n\theta$ que debe cumplir además el dato de contorno final:

$$u(1,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\,\text{sen}\,2n\theta=f(\theta)\ \to\ c_n=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}f(\theta)\,\text{sen}\,2n\theta\,d\theta\,.$$

En el caso **a]** no hay que hacer integrales y basta identificar: $c_1=0$ y resto nulos. $\boxed{u(r,\theta)=r^2\,\text{sen}\,2\theta}$ [$=2xy$].

Para **b]** sí hay que integrar. El primer término (único que se pide) lo da:

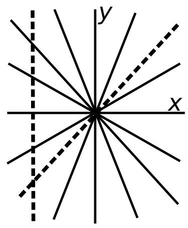
$$c_1=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,\text{sen}\,2\theta\,d\theta=\frac{8}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta\,d\theta=-\frac{8}{3\pi}\cos^3\theta\Big]_0^{\pi/2}=\frac{8}{3\pi}\ \to\ \boxed{u(r,\theta)=\frac{8}{3\pi}r^2\,\text{sen}\,2\theta+\cdots}\,.$$

[No sería demasiado largo dar la serie solución no pedida con todos sus términos].

Soluciones del examen de julio de Métodos II (A) (12-7-21)

Elegir TRES problema entre 1, 2, 3 y 4 (1.8 puntos cada uno) y hacer los problemas 5 y 6 (de 2.3 puntos).

1. Sea $yu_y+xu_x=2xyu$. **a]** Calcular su solución general. **b]** Hallar la que cumple $u(-1,y)=1$, probando su unicidad. **c]** Dar $f(x)$ para que el dato $u(x,x)=f(x)$ lo cumplan i) infinitas soluciones, ii) ninguna solución.



a] $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$, $y=Ce^{\ln x}$, $\boxed{\frac{y}{x}=C}$. $\begin{cases}\xi=\frac{y}{x}\\ \eta=y\end{cases}\to u_\eta=2xu=\frac{2\eta}{\xi}u$, $u(x,y)=p(\xi)\,e^{\eta^2/\xi}=\boxed{p\big(\frac{y}{x}\big)e^{xy}}$.

Parecido: $\begin{cases}\xi=\frac{y}{x}\\ \eta=x\end{cases}\to u_\eta=2yu=2\xi\eta u$, $u(x,y)=p(\xi)\,e^{\xi\eta^2}=p\big(\frac{y}{x}\big)e^{xy}$ (como arriba).

b] $u(-1,y)=p(-y)\,e^{-y}=1$, $p(v)=e^{-v}$, $\boxed{u(x,y)=e^{y\left(x-\frac{1}{x}\right)}}$. Única porque la recta $x=-1$ es claramente no tangente a las características. O porque $T(y)=0\cdot y-1\cdot(-1)=1\neq 0\ \forall y$.

c] $u(x,x)=p(1)\,e^{x^2}=f(x)$ sobre característica $\big[T(x)=1\cdot x-1\cdot x\equiv 0$ lo confirma$\big]$ dará infinitas o ninguna solución.

i) Por ejemplo, si $f(x)=0$ hay **infinitas soluciones**, una para cada $p\in C^1$ que satisfaga $p(1)=0$.
En particular, $p(v)\equiv 0\to u\equiv 0$. $p(v)=v-1\to u=\frac{y-x}{x}e^{xy}$ ... $\big[$Más en general, valdría toda $f(x)=Ke^{x^2}\big]$.

ii) Y, por ejemplo, $u(x,x)=1$ es imposible y **no hay solución**. $\big[$Cualquier $f(x)$ que no sea de la forma $\uparrow\big]$.

2. Resolver $\begin{cases}4u_{tt}-12u_{xt}+9u_{xx}=0\\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=g(x)\end{cases}$. **a]** A partir de la forma canónica. **b]** Mediante la $\mathcal{F}$.

$B^2-4AC=0$ parabólica $\begin{cases}\xi=x+\frac{3t}{2}\\ \eta=t\end{cases}$, $\begin{cases}u_t=\frac{3}{2}u_\xi+u_\eta\\ u_x=u_\xi\end{cases}$, $\begin{cases}u_{tt}=\frac{9}{4}u_{\xi\xi}+3u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\\ u_{xt}=\frac{3}{2}u_{\xi\xi}+u_{\xi\eta}\\ u_{xx}=u_{\xi\xi}\end{cases}\to 9u_{\eta\eta}=0$, $u=p(\xi)+q(\xi)\,\eta=p\big(x+\frac{3t}{2}\big)+tq\big(x+\frac{3t}{2}\big)$.

se podría usar $\xi=2x+3t$ $\quad u(x,0)=p(x)=0\to u_t=\frac{3tq'}{2}+q$, $q(x)=g(x)$. $\boxed{u=t\,g\big(x+\frac{3t}{2}\big)}$.

$\begin{cases}4\hat{u}_{tt}+12ik\hat{u}_t-9k^2\hat{u}=0\\ \hat{u}(k,0)=0,\ \hat{u}_t(k,0)=\hat{g}(k)\end{cases}$. $4\mu^2+12ik\mu-9k^2=0$, $\mu=-\frac{3ik}{2}$ doble. $\hat{u}(k,t)=\big[p(k)+tq(k)\big]e^{-3ikt/2}$,

$\hat{u}(k,0)=p(k)=0\to\hat{u}_t(k,0)=q(k)=\hat{g}(k)$, $\hat{u}(k,t)=t\hat{g}(k)\,e^{-3ikt/2}\uparrow$

3. **a]** Calcular una solución no trivial de $2x^2y''-x(3-4x)y'+2(1-3x)y=0$ que no sea analítica en $x=0$, dando la regla de recurrencia. **b]** Hallar el desarrollo hasta $\big(x-\frac{1}{4}\big)^2$ de la solución que cumple $y\big(\frac{1}{4}\big)=0$, $y'\big(\frac{1}{4}\big)=2$.

a] $r^2-\frac{5}{2}r+1=0$, $r=2,\frac{1}{2}$. $y_1=x^2\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_kx^k$, $y_2=x^{1/2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_kx^k$, $c_0,b_0\neq 0$. y_2 no analítica.

$$y_2=\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^{k+1/2}\ \to\ \sum_{k=0}^{\infty}\Big[2\big(k+\tfrac{1}{2}\big)\big(k-\tfrac{1}{2}\big)b_kx^{k+1/2}-3\big(k+\tfrac{1}{2}\big)b_kx^{k+1/2}+4\big(k+\tfrac{1}{2}\big)b_kx^{k+3/2}+2b_kx^{k+3/2}-6b_kx^{k+1/2}\Big]$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\big[(2k-3)kb_kx^{k+1/2}-4(k-1)b_kx^{k+3/2}\big]=0\ \to$$

$x^{1/2}:\ 0b_0=0$. $x^{3/2}:\ -b_1-4b_0=0$, $b_1=-4b_0$. $x^{k+1/2}:\ (2k-3)kb_k=4(k-2)b_{k-1}$. $\boxed{b_k=\frac{4(k-2)}{k(2k-3)}b_{k-1}}$.

Por tanto $b_2=0$, y todos los siguientes. La solución es, pues: $\boxed{y_2=x^{1/2}\big[1-4x\big]}$.

b] $\frac{1}{8}y''\big(\frac{1}{4}\big)-\frac{1}{2}y'\big(\frac{1}{4}\big)+\frac{1}{2}y\big(\frac{1}{4}\big)=0$, $y''\big(\frac{1}{4}\big)=4y'\big(\frac{1}{4}\big)=8$. $\boxed{y=2\big(x-\frac{1}{4}\big)+4\big(x-\frac{1}{4}\big)^2+\cdots}$ (la de arriba cambiada de signo).

4. Sea $\begin{cases}y''-y'+\lambda y=0\\ y'(-2)=y(0)=0\end{cases}$. **a]** Estudiar si i) $\lambda=-2$, ii) $\lambda=\frac{1}{4}$, son o no autovalores, dando la autofunción si lo es. **b]** Precisar cuántas soluciones tiene $y''-y'+\frac{1}{4}y=e^x-1$ con esos datos.

a] $\mu=\frac{1\pm\sqrt{1-4\lambda}}{2}$. i) $\lambda=-2$, $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}$, $y'=2c_1e^{2x}-c_2e^{-x}\to\begin{cases}y'(-2)=2c_1e^{-4}-c_2e^2=0 & c_1\big[2e^{-4}+e^2\big]=0\\ y(0)=c_1+c_2=0\ \to\ c_2=-c_1 & c_1=c_2=0\end{cases}$.

No es autovalor. $\big[$Se podía decir escribiendo $\big(e^{-x}y'\big)'+\lambda e^{-x}=0$ y observando que $\alpha\alpha'=\beta\beta'=q=0\big]$.

ii) $\lambda=\frac{1}{4}$, $\mu=\frac{1}{2}$ doble, $\begin{matrix}y=(c_1+c_2x)\,e^{x/2}\\ y'=\big(\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{2}x+c_2\big)e^{x/2}\end{matrix}\to\begin{cases}y'(-2)=c_1/2e=0\\ y(0)=c_1=0\end{cases}$, $c_1=0$ y $\forall c_2$.

Es, por tanto, **autovalor** con autofunción asociada $\boxed{\{x\,e^{x/2}\}}$.

b] $\big[e^{-x}y'\big]'+\frac{1}{4}e^{-x}y=1-e^{-x}$. El no homogéneo tendrá infinitas o 0 soluciones según se anule o no:

$\int_{-2}^{0}xe^{x/2}\big[1-e^{-x}\big]dx=2x\big[e^{x/2}+e^{-x/2}\big]_{-2}^{0}-2\int_{-2}^{0}\big[e^{x/2}+e^{-x/2}\big]dx=\frac{8}{e}\neq 0$. **No tiene solución**.

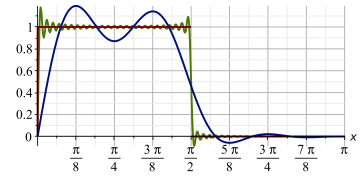
Más largo imponiendo datos a la solución de la no homogéna $y=(c_1+c_2x)\,e^{x/2}+4e^x-4$.

5. a] Desarrollar $g(x)=\begin{cases}1\,,\ 0\le x\le \pi/2\\ 0\,,\ \pi/2<x\le\pi\end{cases}$ en serie de $\{\operatorname{sen} nx\}$ en $[0,\pi]$. ¿Cuánto suma la serie para $x=\frac{\pi}{2}$?

Sea $\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\in[0,\pi]\,,\ t\in\mathbf{R}\\ u_t(x,0)=g(x)\,,\ u(x,0)=u(0,t)=u(\pi,t)=0\end{cases}$.

b] Hallar $u\big(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\big)$ exactamente utilizando D'Alembert.

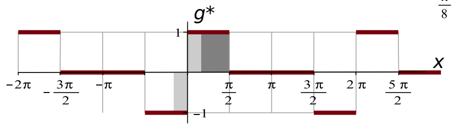
c] Resolver separando variables y aproximar el valor con 2 términos no nulos de la serie solución $[24\sqrt{3}/25\pi\approx 0{,}53]$.



a] $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen} nx\,dx=-\frac{2\cos nx}{n\pi}\Big]_0^{\pi/2}$. $g(x)=\frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\big(1-\cos\frac{n\pi}{2}\big)\operatorname{sen} nx$.

Debe sumar $\frac{1}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$. Y lo hace: $\frac{2}{\pi}\big[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{3}+\cdots\big]=\frac{2}{\pi}\arctan 1=\frac{1}{2}$.

b] Si g^* extensión impar y 2π-periódica de g:



$$u\big(\tfrac{\pi}{3},\tfrac{\pi}{2}\big)=\tfrac{1}{2}\int_{-\pi/6}^{5\pi/6}g^*(s)\,ds=\tfrac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/2}ds=\boxed{\tfrac{\pi}{6}}.$$

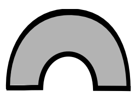
c] $\begin{cases}X''+\lambda X=0\\ X(0)=X(\pi)=0\end{cases}$, $\lambda_n=n^2$, $X_n=\{\operatorname{sen} nx\}$, $n=1,2,\dots$, $T''+\lambda T=0\,,\ T(0)=0\to T_n=\{\operatorname{sen} nt\}$.

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\operatorname{sen} nt\operatorname{sen} nx.\quad u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}nc_n\operatorname{sen} nx=g(x)\ \to\ c_n=\frac{2}{\pi n^2}\Big[1-\cos\frac{n\pi}{2}\Big]\ \ \Big[=\frac{2}{\pi},\frac{1}{\pi},\frac{2}{9\pi},0,\frac{2}{25\pi},\dots\Big]$$

$$u\big(\tfrac{\pi}{3},\tfrac{\pi}{2}\big)=\tfrac{2}{\pi}\big[\operatorname{sen}\tfrac{\pi}{3}+\tfrac{1}{25}\operatorname{sen}\tfrac{5\pi}{3}+\cdots\big]=\tfrac{\sqrt{3}}{\pi}\big[1-\tfrac{1}{25}+\cdots\big]\approx\boxed{\tfrac{24\sqrt{3}}{25\pi}}\approx 0{,}53.$$ [El exacto $\frac{\pi}{6}\approx 0.5236$].

6. Resolver por separación de variables $\begin{cases}u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=\frac{5}{r^2}\cos\theta\,,\ 1<r<2\,,\ 0<\theta<\pi\\ u_r(1,\theta)=1\,,\ u(2,\theta)=u_\theta(r,0)=u_\theta(r,\pi)=0\end{cases}$.

El formulario dice que: $u=R\Theta\ \to\ \begin{cases}\Theta''+\lambda\Theta=0\\ \Theta'(0)=\Theta'(\pi)=0\end{cases}$, $\lambda_n=n^2$, $\Theta_n=\{\cos n\theta\}$, $n=0,1,2,\dots$



Se lleva $u(r,\theta)=R_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}R_n(r)\operatorname{sen} n\theta$ a la EDP y a los otros dos datos de contorno:

$$R_0+\tfrac{1}{r}R_0+\sum_{n=1}^{\infty}\big[R_n''+\tfrac{1}{r}R_n'-\tfrac{n^2}{r^2}R_n\big]\cos n\theta=\tfrac{5}{r^2}\cos\theta$$ (ya desarrollada, todas homogéneas excepto la de R_1).

De los datos sale: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}R_n'(1)\cos n\theta=1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}R_n(2)\cos n\theta=0\ \Rightarrow\ R_0'(1)=1$, $R_n'(1)=0$, $n\ge 1$, $R_n(2)=0\ \forall n$.

Si $n>1$ es $R_n\equiv 0$ (es solución de $r^2R_n''+rR_n'-n^2R_n=0$ con ambos datos 0 y el problema tiene solución única).

Sólo quedan R_0, solución de $\begin{matrix}r^2R_0''+rR_1'=0\\ R_0'(1)=1,R_0(2)=2\end{matrix}\ \to\ R_0=c_1+c_2\ln r\ \xrightarrow{cc}\ c_2=1,\ c_1=-\ln 2$.

Y también R_1, dada por $r^2R_1''+rR_1'-R_1=5\ \xrightarrow{*}\ R_1=c_1r+c_2r^{-1}-5\ \xrightarrow{cc}\ \begin{matrix}R_1'(1)=c_1-c_2=0\\ R_1(2)=2c_1+\frac{1}{2}c_2-5=0\end{matrix}\ \to\ c_1=c_2=2$.

$*$ R_p a ojo, mucho mejor que con la fórmula de variación de constantes

La solución es, por tanto: $\boxed{u(r,\theta)=\ln\frac{r}{2}+\big(2r+2r^{-1}-5\big)\cos\theta}$ [No difícil de comprobar].