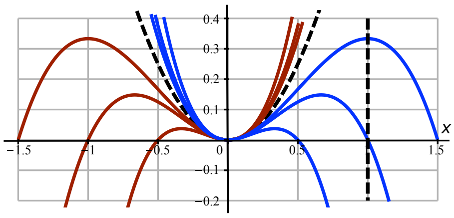
Soluciones del examen de mayo de Métodos II (C), 2021–22 (11-5-22)

Elegir tres problemas entre 1, 2, 3, 4 (de 1.8 ptos), y dos entre 5, 6, 7 (de 2.3 ptos)

1. Sea $(3y-x^2)u_y+xu_x=3u$. **a]** Hallar su solución general y la que cumple $u(1,y)=y$, probando su unicidad. **b]** Dar dos soluciones distintas que cumplan uno de estos dos datos: i) $u(x,x^2)=0$, ii) $u(x,x^2)=1$.



a] $\frac{dy}{dx}=\frac{3y}{x}-x$. $y=Cx^3-x^3\int\frac{dx}{x^2}=Cx^3+x^2$, $\frac{y}{x^3}-\frac{1}{x}=C$ características.

$\begin{cases}\xi=yx^{-3}-x^{-1}\\ \eta=x\end{cases}\to\begin{cases}u_y=x^{-3}u_\xi\\ u_x=(-3x^{-4}y+x^{-2})u_\xi+u_\eta\end{cases}$, $xu_\eta=3u$, $u_\eta=\frac{3}{\eta}u$.

Su solución es $u=p(\xi)\eta^3$, o sea, $u(x,y)=p\big(\frac{y}{x^3}-\frac{1}{x}\big)x^3$.

Con el dato: $u(1,y)=p(y-1)=y$, $p(v)=v+1$, $\boxed{u(x,y)=y-x^2+x^3}$.

Solución única por no ser tangente a las características, ya que, por ejemplo, $T(y)=0-1\cdot1=-1\neq0\ \forall y$.

b] Es dato sobre característica. $u(x,x^2)=p(0)x^3$ hace ii) imposible y proporciona infinitas soluciones para i) [pues se cumple $\forall p$ con $p(0)=0$]. Dos ejemplos cortos son $u=0$, $u=y-x^2$ [eligiendo $p(v)=0$, $p(v)=v$].

2. Sea $\begin{cases}21u_{tt}+2u_{tx}-3u_{xx}=0\\ u(x,0)=f(x),\,u_t(x,0)=3f'(x)\end{cases}$. Resolver el problema (con la $\mathcal{F}$ o a partir de la forma canónica), deducir la solución para $f(x)=x$ y comprobar esta solución.

$\begin{cases}21\hat{u}_{tt}-2\mathrm{i}k\hat{u}_t+3k^2\hat{u}=0\\ \hat{u}(k,0)=\hat{f}(k),\,\hat{u}_t(k,0)=-3\mathrm{i}k\hat{f}(k)\end{cases}$, $\mu^2-2\mathrm{i}k\mu+3k^2$, $\mu=\frac{\mathrm{i}k\pm\sqrt{-64k^2}}{21}=\frac{3\mathrm{i}k}{7},-\frac{\mathrm{i}k}{3}$, $\hat{u}=p(k)\,e^{3\mathrm{i}kt/7}+q(k)\,e^{-\mathrm{i}kt/3}$.

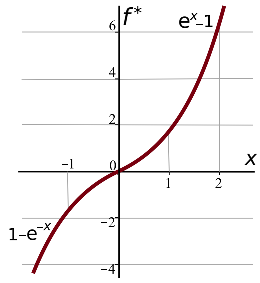
Con los datos: $\begin{matrix}p(k)+q(k)=\hat{f}(k), & q(k)=\hat{f}(k)-p(k)\searrow & & q(k)=\frac{9}{2}\hat{f}(k)\\ \frac{3\mathrm{i}k}{7}p(k)-\frac{\mathrm{i}k}{3}q(k)=-3\mathrm{i}k\hat{f}(k) & \big(\frac{3}{7}+\frac{1}{3}\big)p(k)=\big(\frac{1}{3}-3\big)\hat{f}(k), & p(k)=-\frac{7}{2}\hat{f}(k)\nearrow & \end{matrix}$.

$\hat{u}=\frac{9}{2}\hat{f}(k)\,e^{-\mathrm{i}kt/3}-\frac{7}{2}\hat{f}(k)\,e^{3\mathrm{i}kt/7}\xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}[e^{\mathrm{i}ka}\hat{f}(k)]=f(x-a)}\boxed{u(x,t)=\frac{9}{2}f\big(x+\frac{1}{3}t\big)-\frac{7}{2}f\big(x-\frac{3}{7}t\big)}\to\boxed{u=x+3t}$ si $f(x)=x$.

$B^2-4AC=256$ hiperbólica. $\begin{cases}\xi=x+\frac{1}{3}t\\ \eta=x-\frac{3}{7}t\end{cases}\to u_{\xi\eta}=0$ (sólo hay derivadas de segundo orden), $u=p(\xi)+q(\eta)$.

Luego $u(x,t)=p\big(x+\frac{1}{3}t\big)+q\big(x-\frac{3}{7}t\big)$, $u_t=\frac{1}{3}p'\big(x+\frac{1}{3}t\big)-\frac{3}{7}q'\big(x-\frac{3}{7}t\big)\to\begin{matrix}p(x)+q(x)=f(x)\\ \frac{1}{3}p'(x)-\frac{3}{7}q'(x)=3f'(x)\end{matrix}$. $p=\frac{9f}{2}$, $q=-\frac{7f}{2}$.

3. Sea el problema para la cuerda semiacotada: $\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=0,\ x\geq0,\ t\in\mathbf{R}\\ u(x,0)=e^x,\,u_t(x,0)=-x\\ u(0,t)=1.\end{cases}$ **a]** Hallar $u(1,2)$. **b]** Hallar $u(1,t)$ para $t\geq0$.



$\xrightarrow{w=u-1}\begin{matrix}w_{tt}-w_{xx}=0,\ x\geq0\\ w(x,0)=e^x-1\equiv f(x)\\ w_t(x,0)=-x\\ w(0,t)=0\end{matrix}$. f^* extensión impar de f, $g^*(x)=-x\ \forall x\to$

$w(x,t)=\frac{1}{2}\big[f^*(x+t)+f^*(x-t)\big]-\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}s\,ds$,

$u(x,t)=1+\frac{1}{2}\big[f^*(x+t)+f^*(x-t)\big]-xt$,

a] $u(1,2)=\frac{1}{2}\big[f^*(3)+f^*(-1)\big]-1=\frac{1}{2}\big[f(3)-f(1)\big]-1=\boxed{\frac{e^3}{2}-\frac{e}{2}-1}$.

b] $u(1,t)=1+\frac{1}{2}\big[f^*(1+t)+f^*(1-t)\big]-t=1-t+\frac{1}{2}\begin{cases}e^{1+t}+e^{1-t}-2\\ e^{t+1}-e^{t-1}\end{cases}=\boxed{\begin{cases}e\,\mathrm{ch}\,t-t,\ 0\leq t\leq1\\ 1+e^t\,\mathrm{sh}\,1-t,\ t\geq1\end{cases}}$.

4. Sea $2x^2y''+x(3-2x)y'-(1+2x)y=0$. Estudiar si posee soluciones no triviales analíticas en $x=0$. Hallar 4 términos no nulos del desarrollo de una solución acotada en $x=0$ (posible ayuda: $y_2=\frac{1}{x}$ es solución).

$r(r-1)+\frac{3}{2}r-\frac{1}{2}=(r+1)\big(r-\frac{1}{2}\big)=0$. Acotada $y_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+1/2}$, no lo está $y_2=\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^{k-1}$. Ninguna es analítica.

$\sum_{k=0}^{\infty}\big[2\big(k^2-\frac{1}{4}\big)c_kx^{k+1/2}+3\big(k+\frac{1}{2}\big)c_kx^{k+1/2}-c_kx^{k+1/2}-(2k+1)c_kx^{k+3/2}-2c_kx^{k+3/2}\big]=0\to$

$\sum_{k=0}^{\infty}\big[k(2k+3)c_kx^{k+1/2}-(2k+3)c_kx^{k+3/2}\big]=0$, $x^{1/2}$: c_0 cualquiera, $x^{3/2}$: $5c_1-3c_0=0$, $c_1=\frac{3}{5}c_0$,

$x^{5/2}$: $c_2=\frac{5}{14}c_1=\frac{3}{14}c_0$, $x^{7/2}$: $c_3=\frac{7}{27}c_2=\frac{1}{18}c_0$, ... Luego $\boxed{y_1=x^{1/2}\big[1+\frac{3}{5}x+\frac{3}{14}x^2+\frac{1}{18}x^3+\cdots\big]}$.

Haciendo uso de la ayuda: $e^{-\int a}=e^{\int[1-3/(2x)]}=\frac{e^x}{x^{3/2}}\to$

$y_1=\frac{1}{x}\int x^{1/2}e^xdx=\frac{1}{x}\int\big[x^{1/2}+x^{3/2}+\frac{1}{2}x^{5/2}+\frac{1}{6}x^{7/2}+\cdots\big]dx=\boxed{x^{1/2}\big[\frac{2}{3}+\frac{2}{5}x+\frac{1}{7}x^2+\frac{1}{27}x^3+\cdots\big]}$.

[Calculando la no acotada: $\sum_{k=0}^{\infty}\big[2(k-1)(k-2)b_kx^{k-1}+3(k-1)b_kx^{k-1}-b_kx^{k-1}-2(k-1)b_kx^k-2b_kx^k\big]=0$

$\to x^{-1}$: $0b_0=0$, x^0: $-b_1=0$, x^{k-1}: $k(2k-3)b_k=2(k-1)b_{k-1}$, $b_2=b_3=\cdots=0$, $y_2=\frac{1}{x}$].

5. Sea $\begin{cases} xy'' + 2y' + \lambda xy = 0 \\ y(\pi)+\pi y'(\pi)=y(2\pi)+2\pi y'(2\pi)=0 \end{cases}$. **a]** Precisar si $\lambda=0$ es o no autovalor del problema, dando la autofunción en caso afirmativo.

b] Hallar la autofunción para $\lambda=4$ [la solución general $y=c_1\frac{\cos 2x}{x}+c_2\frac{\operatorname{sen} 2x}{x}$ se obtiene haciendo $u=xy$].

c] Determinar si tiene o no soluciones la ecuación $xy''+2y'+4xy=2$ con esos mismos datos de contorno.

a] Si $\lambda=0$, con $y'=v$, $v'=-\frac{2}{x}v$, $v=Ce^{-\int 2/x}=\frac{C}{x^2}=y' \to y=\frac{C}{x}+K$. O Euler con $r(r-1)+2r=0$. O $u=xy$.

Imponiendo los datos de contorno: $\begin{matrix} y(\pi)+\pi y'(\pi)=K=0 \\ y(2\pi)+2\pi y'(2\pi)=K=0 \end{matrix}$. $\boxed{y_0=\{\frac{1}{x}\}}$ autofunción del autovalor $\lambda=0$.

b] Si $\lambda=4$, $y=c_1\frac{\cos 2x}{x}+c_2\frac{\operatorname{sen} 2x}{x}$, $y=c_1\big[\frac{-2\operatorname{sen} 2x}{x}-\frac{\cos 2x}{x^2}\big]+c_2\big[\frac{2\cos 2x}{x}-\frac{\operatorname{sen} 2x}{x^2}\big]$ para cumplir los datos:

$\begin{matrix} \frac{c_1}{\pi}-\pi\frac{c_1}{\pi^2}+\pi\frac{2c_2}{\pi}=0 \\ \frac{c_1}{2\pi}-2\pi\frac{c_1}{4\pi^2}+2\pi\frac{2c_2}{2\pi}=0 \end{matrix}$, luego $c_2=0$ y la autofunción es: $\boxed{y_4=\{\frac{\cos 2x}{x}\}}$.

c] Escribimos la ecuación en forma autoadjunta: $e^{\int \frac{2}{x}dx}=x^2$, $x^2y''+2xy'+4x^2y=2x$, $\big(x^2y'\big)'+4x^2y=2x$.

Como $\lambda=4$ es autovalor, hay solución sólo si es cero: $\int_\pi^{2\pi} 2x\frac{\cos 2x}{x}\,dx=\int_\pi^{2\pi} 2\cos 2x\,dx=\operatorname{sen} 2x\big]_\pi^{2\pi}=0$.

Luego **existen infinitas soluciones del problema**. [Se puede comprobar que son $y=\frac{1}{2x}+C\frac{\cos 2x}{x}$].

[Haciendo $u=xy$ en el problema se obtiene el sencillo $u''+\lambda u=0$, $u'(\pi)=u'(2\pi)=0$, ..., $u_4=\{\cos 2x\}$, y la ecuación de **c]** pasa a ser $[u']'+4u=2$ de clara solución general $u=c_1\cos 2x+c_2\operatorname{sen} 2x+\frac{1}{2}$].

6. Resolver $\begin{cases} u_t-u_{xx}=\operatorname{sen}^2 x\,,\ x\in(0,\pi)\,,\ t>0 \\ u(x,0)=0,\ u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=0 \end{cases}$ y estudiar si existe distribución estacionaria $\big[\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t)\big]$.

Separando variables: $X''+\lambda X=0$, $X'(0)=X'(\pi)=0$. $\lambda_0=0$, $X_0=\{1\}$, $\lambda_n=n^2$, $X_n=\{\cos nx\}$.

Llevamos entonces a la EDP y al dato inicial $u(x,t)=T_0(t)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}T_n(t)\cos nx$, obteniendo:

$$T_0'(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(T_n'+n^2T_n\Big)\cos nx=\operatorname{sen}^2 x=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cos 2x \quad \text{y} \quad T_0(0)+\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\cos nx=0.$$

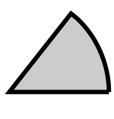
Por tanto, $T_0'=\frac{1}{2}$, $T_0(0)=0$, $T_2'+4T_2=-\frac{1}{2}$, $T_2(0)=0$, $T_n'+n^2T_n=0$, $T_n(0)=0$, $n=1,3,4,\dots$

con soluciones respectivas: $T_0(t)=\frac{1}{2}t$, $T_2(t)=\frac{1}{8}\big(e^{-4t}-1\big)$, $T_n(t)=0$, $n=1,3,4,\dots$

Luego $\boxed{u(x,t)=\frac{1}{2}t+\frac{1}{8}\big(e^{-4t}-1\big)\cos 2x} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow}\infty$, por lo que no hay distribución estacionaria de temperaturas.

[Metemos calor constantemente en $(0,\pi)$ a la varilla, inicialmente a 0°, con ambos extremos aislados. Para t gordos, $u\sim\frac{1}{2}t+\frac{1}{8}\cos 2x$. La varilla se va calentando indefinidamente, como era esperable].

7. Resolver el problema en el sector circular $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0\,,\ r<2\,,\ 0<\theta<\frac{\pi}{4} \\ u(2,\theta)=f(\theta)\,,\ u(r,0)=u_\theta\big(r,\frac{\pi}{4}\big)=0 \end{cases}$ para i) $f(\theta)=8\operatorname{sen} 6\theta$, ii) $f(\theta)=\pi$.



El formulario nos da las ecuaciones que aparecen al hacer $u=R\Theta$ en la EDP:

$\Theta''+\lambda\Theta=0$, $\Theta(0)=\Theta'\big(\frac{\pi}{4}\big)=0 \Rightarrow \lambda_n=2^2(2n-1)^2$, $\Theta_n(\theta)=\big\{\operatorname{sen}(4n-2)\theta\big\}$, $n=1,2,\dots$

Y la ecuación radial es: $r^2R''+rR'-\lambda_nR=0$, $R=c_1r^{4n-2}+\frac{c_2}{r^{4n-2}} \xrightarrow{R\,acot.} R_n=\big\{r^{4n-2}\big\}$.

Imponemos a $u(r,\theta)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_nr^{4n-2}\operatorname{sen}(4n-2)\theta$, el dato final: $u(2,\theta)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n2^{4n-2}\operatorname{sen}(4n-2)\theta=f(\theta)$.

En el caso i) es claro que $c_n=0$, si $n\neq 2$, y que $2^6c_2=8$. $\boxed{u(r,\theta)=\frac{1}{8}r^6\operatorname{sen} 6\theta}$.

En el ii) hay que desarrollar: $c_n=\frac{2}{2^{4n-2}\pi/4}\int_0^{\pi/4}\pi\operatorname{sen}(4n-2)\theta\,d\theta=\frac{8}{(4n-2)2^{4n-2}}\big[-\cos(4n-2)\theta\big]_0^{\pi/4}=\frac{1}{(2n-1)2^{4n-4}}$.

Por tanto, la solución única es en este segundo caso $\boxed{u(r,\theta)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^{4n-4}}r^{4n-2}\operatorname{sen}(4n-2)\theta}$.

Soluciones del examen extraordinario de Métodos II (C) (24-6-22)

Hacer los problemas 1, 2 y 3 (de 1.8 puntos cada uno) y ELEGIR DOS entre 4, 5 y 6 (de 2.3 puntos).

1. Sea $(2y+x)u_y+xu_x=2y+2x$. **a]** Hallar su solución general y la que verifica $u(1,y)=0$. **b]** Precisar en qué puntos del plano la recta $y=x-1$ es tangente a las características.

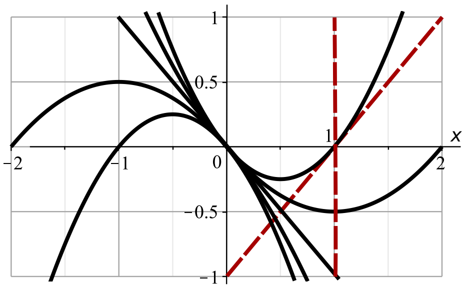
a] $\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x}+1$ lineal. $y=Cx^2+x^2\int\frac{dx}{x^2}=Cx^2-x$ características.

$\begin{cases}\xi=yx^{-2}+x^{-1}\\ \eta=x\end{cases} \to \begin{cases}u_y=x^{-2}u_\xi\\ u_x=-(2x^{-3}y+x^{-2})u_\xi+u_\eta\end{cases}$, $u_\eta=\frac{2y}{x}+2 \xrightarrow{y=\xi\eta^2-\eta}$

$u_\eta=2\xi\eta$, $u=\xi\eta^2+p(\xi)$, $\boxed{u(x,y)=y+x+p\big(\frac{y+x}{x^2}\big)}$ solución general.

Con el dato: $y+1+p(y+1)=0$, $p(v)=-v$, $\boxed{u(x,y)=(y+x)\big(1-\frac{1}{x^2}\big)}$.

b] $T(x)=1\cdot(2x-2-x)-1\cdot x=0 \to x=1$, tangencia en $\boxed{(1,0)}$.



2. Sea $\begin{cases}9u_{tt}+12u_{tx}+4u_{xx}=0\\ u(x,0)=0,\, u_t(x,0)=g(x)\end{cases}$. Resolver el problema (mediante la $\mathcal{F}$ o a partir de la forma canónica), deducir la solución para $g(x)=3x$ y comprobar esta solución.

$B^2-4AC=0$ parabólica $\begin{cases}\xi=x-\frac{2t}{3}\\ \eta=t\end{cases}$ o bien $\xi=3x-2t$, $\begin{cases}u_t=-\frac{2}{3}u_\xi+u_\eta\\ u_x=u_\xi\end{cases}$, $\begin{cases}u_{tt}=\frac{4}{9}u_{\xi\xi}-\frac{4}{3}u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\\ u_{xt}=-\frac{2}{3}u_{\xi\xi}+u_{\xi\eta}\\ u_{xx}=u_{\xi\xi}\end{cases} \to u_{\eta\eta}=0$, $u=p(\xi)+q(\xi)\,\eta=p\big(x-\frac{2t}{3}\big)+tq\big(x-\frac{2t}{3}\big)$.

$u(x,0)=p(x)=0 \to u_t=q-\frac{2tq'}{3}$, $q(x)=g(x)$. $\boxed{u=t\,g\big(x-\frac{2t}{3}\big)}$.

$\begin{cases}9\hat{u}_{tt}-12\mathrm{i}\,k\hat{u}_t-4k^2\hat{u}=0\\ \hat{u}(k,0)=0,\ \hat{u}_t(k,0)=\hat{g}(k)\end{cases}$. $9\mu^2-12\mathrm{i}\,k\mu-4k^2=0$, $\mu=\frac{6\mathrm{i}\,k\pm\sqrt{-36k^2+36k^2}}{9}=\frac{2\mathrm{i}\,k}{3}$ doble. $\hat{u}=\big[p(k)+tq(k)\big]e^{2\mathrm{i}\,kt/3}$,

$\hat{u}(k,0)=p(k)=0 \to \hat{u}_t(k,0)=q(k)=\hat{g}(k)$, $\hat{u}(k,t)=t\hat{g}(k)\,e^{2\mathrm{i}\,kt/3}\uparrow$

Si $g(x)=3x$ la solución pasa a ser $\boxed{u(x,t)=3xt-2t^2}$.

La comprobamos: $u_t=3x-4t$, $u_{tt}=-4$, $u_{xt}=3$, $u_{xx}=0$, $9\cdot(-4)+12\cdot 3+4\cdot 0=0$, $u(x,0)=0$, $u_t(x,0)=3x$.

3. Sea $x^2y''+x(x-3)y'+4y=0$. Escribir 4 términos no nulos del desarrollo de una solución en torno a $x=0$ dando la regla de recurrencia. En $x=0$, ¿son todas las soluciones analíticas?, ¿están todas acotadas?

$x=0$ es singular, con $a^*(x)=x-3$ y $b^*(x)=4$ analíticas. Es singular regular con $r^2-4r+4=0$, $r=2$ doble. Es claro que $y_1=x^2\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k$ es analítica y acotada. También lo es que $y_2=x^3\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k+y_1\ln x$ es no analítica (seguro hay $\ln x$). Pero todas son acotadas en el origen pues también lo está y_2 $\big($puesto que $x^2\ln x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0\big)$.

$$y_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+2} \to \sum_{k=0}^{\infty}\big[(k+2)(k+1)c_kx^{k+2}+(k+2)c_kx^{k+3}-3(k+2)c_kx^{k+2}+4c_kx^{k+2}\big]=0$$

$\to$ x^2: $2c_0-6c_0+4c_0=0$, $\forall c_0$, como debía ocurrir.

x^3: $6c_1-9c_1+4c_1+2c_0=0$, $c_1=-2c_0$.

x^{k+2}: $k^2c_k+(k+1)c_{k-1}=0$, $\boxed{c_k=-\frac{k+1}{k^2}c_{k-1}}$ regla de recurrencia

$\to c_2=-\frac{3}{4}c_1=\frac{3}{2}c_0$, $c_3=-\frac{4}{9}c_2=-\frac{2}{3}c_0$, ... $\to \boxed{y_1=x^2-2x^3+\frac{3}{2}x^4-\frac{2}{3}x^5+\cdots}$.

Elegir DOS entre 4, 5 y 6

4. Sea $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y(0)+y'(0)=y(\pi)+y'(\pi)=0 \end{cases}$. **a]** Probar que $\lambda=-1$ es autovalor y dar su autofunción y_{-1} . **b]** Calcular los autovalores $\lambda>0$, escribiendo sus autofunciones y_n . **c]** Precisar cuántas soluciones de $y''-y=\mathrm{e}^{2x}$ cumplen esos datos.

a] $\lambda=-1$, $y=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{-x}$, $y'=c_1\mathrm{e}^x-c_2\mathrm{e}^{-x}$ $\to$ $\begin{cases} y(0)+y'(0)=2c_1=0 \\ \qquad\qquad\downarrow \\ y(\pi)+y'(\pi)=c_2\mathrm{e}^{\pi}-c_2\mathrm{e}^{\pi}=0\ \forall c_2 \end{cases}$. Autovalor con $\boxed{y_{-1}=\{\mathrm{e}^{-x}\}}$.

b] Si $\lambda>0$ es $y=c_1\cos wx+c_2\,\mathrm{sen}\,wx$, $y=-c_1w\,\mathrm{sen}\,wx+c_2w\cos wx$, $w=\sqrt{\lambda}$. Imponiendo los datos:

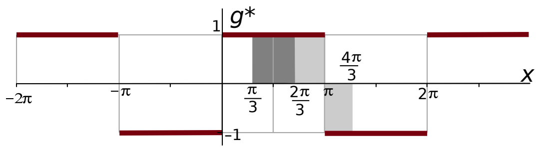
$\begin{cases} y(0)+y'(0)=c_1+wc_2=0,\ c_1=-wc_2 \\ \qquad\qquad\downarrow \\ y(\pi)+y'(\pi)=c_2(1+w^2)\,\mathrm{sen}\,w\pi=0,\ w_n=n \end{cases}$. Autovalores $\lambda_n=n^2$ con $\boxed{y_n=\{\mathrm{sen}\,nx-n\cos nx\}}$.

c] Como (por **a]**) el homogéneo tiene infinitas $\{\mathrm{e}^{-x}\}$, el no homogéneo tendrá infinitas o 0 soluciones según se anule o no (ecuación ya en forma autoadjunta): $\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{2x}\,dx=\mathrm{e}^{\pi}-1\neq 0$. **No tiene solución**.
Más largo calculando e imponiendo datos a la solución de la no homogéna $y=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{2x}$.

5. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0,\ x\in[0,\pi],\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=1 \\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$. **a]** Hallar el valor exacto de $u\big(\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{2}\big)$ utilizando D'Alembert. **b]** Separar variables y comprobar que con los 2 primeros términos no nulos de la serie solución se obtiene $u\big(\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{2}\big)\approx\frac{14}{9\pi}$ [$\approx$0,495].

a] Si g^* extensión impar y 2π-periódica de $g(x)\equiv 1$:

$$u\Big(\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{2}\Big)=\frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{4\pi/3}g^*(s)\,ds=\frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{2\pi/3}ds=\boxed{\frac{\pi}{6}}\ .$$



b] $\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=X(\pi)=0 \end{cases}$, $\lambda_n=n^2$, $X_n=\{\mathrm{sen}\,nx\}$, $n=1,2,\dots$, $T''+\lambda T=0$, $T(0)=0\to T_n=\{\mathrm{sen}\,nt\}$.

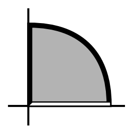
A la serie $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\,\mathrm{sen}\,nt\,\mathrm{sen}\,nx$ sólo le falta cumplir $u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}nc_n\,\mathrm{sen}nx=1\ \to$

$$nc_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{sen}\,nx\,dx=\frac{2}{n\pi}\big[1-\cos n\pi\big],\ c_n=\frac{2}{\pi n^2}\big[1-(-1)^n\big]\ \ \Big[=\frac{4}{\pi},\,0,\,\frac{4}{9\pi},\,0,\,\frac{4}{25\pi},\,\dots\Big]$$

La solución es, por tanto, la serie $u(x,t)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\,\mathrm{sen}(2n-1)t\,\mathrm{sen}(2n-1)x$.

$$u\Big(\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{2}\Big)=\frac{4}{\pi}\Big[\mathrm{sen}\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sen}\frac{5\pi}{6}+\frac{1}{9}\,\mathrm{sen}\frac{5\pi}{2}\,\mathrm{sen}\frac{3\pi}{2}+\cdots\Big]=\frac{4}{\pi}\Big[\frac{1}{2}-\frac{1}{9}+\cdots\Big]\approx\boxed{\frac{14}{9\pi}}\approx 0{,}495\,.\ \ \Big[\text{El exacto } \frac{\pi}{6}\approx 0.524\Big].$$

6. Resolver por separación de variables $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=8r\cos\theta,\ r<1,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2} \\ u(1,\theta)=u_\theta(r,0)=u\big(r,\frac{\pi}{2}\big)=0 \end{cases}$.



Conocemos la EDO que da $u=R\Theta$ $\to$ $\begin{cases} \Theta''+\lambda\Theta=0 \\ \Theta'(0)=\Theta(\pi/2)=0 \end{cases}$, $\underset{n=1,2,\dots}{\lambda_n=(2n-1)^2}$, $\Theta_n=\{\cos(2n-1)\theta\}$.

Se lleva $u(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}R_n(r)\cos(2n-1)\theta$ a la EDP y al otro dato de contorno:

$\sum_{n=1}^{\infty}\Big[R_n''+\frac{1}{r}R_n'-\frac{(2n-1)^2}{r^2}R_n\Big]\cos(2n-1)\theta=8r\cos\theta$ (ya desarrollada, todas homogéneas excepto la de R_1).

$\sum_{n=1}^{\infty}R_n(1)\cos(2n-1)\theta=0\ \Rightarrow\ R_n'(1)=0\ \forall n$. Y además las soluciones han de estar acotadas en el origen.

Si $n>1$ es $R_n\equiv 0$ (es solución acotada de $r^2R_n''+rR_n'-(2n-1)^2R_n=0$ con dato 0 y el problema tiene solución única).

Sólo sobrevive R_1 , dada por $\begin{cases} r^2R_1''+rR_1'-R_1=8r^3 \\ R_1 \text{ acotada},\ R_1(1)=0 \end{cases}\xrightarrow{*}R_1=c_1r+c_2r^{-1}+r^3\xrightarrow{cc}\begin{matrix} c_2=0 \\ c_1+c_2+1=0,\ c_1=-1 \end{matrix}$.

$*$ $R_p=Ar^3$ $\big(A\mathrm{e}^{3s}\big)\to(6+3-1)A=8$, $A=1$, mucho mejor que con la fórmula de variación de constantes:

$$\begin{vmatrix} r & r^{-1} \\ 1 & -r^{-1} \end{vmatrix}=-2r^{-1},\ R_p=-r^{-1}\int\frac{r\cdot 8r}{2r^{-1}}+r\int\frac{r^{-1}\cdot 8r}{2r^{-1}}=-r^3+2r^3=r^3\,.$$

La solución es, por tanto: $\boxed{u(r,\theta)=\big(r^3-r\big)\cos\theta}$ [Fácil de comprobar].