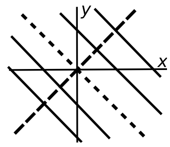
Soluciones del examen de mayo de Métodos II (A-C) 22–23 (12-5-23)

1. Sean la ecuación $u_y - u_x = \frac{3}{y}u + 2x$ y los datos: i) $u(x,-x)=0$, ii) $u(x,x)=0$. [1.8 ptos]
Hallar la única solución que cumple uno de ellos y precisar cuántas soluciones cumplen el otro.

$\frac{dy}{dx}=-1$. $\underset{\text{características}}{x+y=C}$. $\begin{cases}\xi=x+y\\ \eta=y\end{cases}$, $\begin{cases}u_y=u_\xi+u_\eta\\ u_x=u_\xi\end{cases}$, $u_\eta=\frac{3}{\eta}u+2\xi-2\eta$, $u=p(\xi)\eta^3+\eta^3\int\big(\frac{2\xi}{\eta^3}-\frac{2}{\eta^2}\big)d\eta$
$=p(\xi)\eta^3+2\eta^2-\xi\eta$.



Por tanto, $u(x,y)=p(x+y)\,y^3+y(y-x)$ es la solución general.

El dato i) sobre característica dará infinitas o ninguna. $u(x,-x)=2x^2-p(0)x^3=0$, $p(0)=\frac{2}{x}$ imposible. **Sin solución**. $\big[T(x)=1\cdot1-(-1)\cdot(-1)\equiv0$ dice que **es** característica (ser tangente a ellas no basta para fallar la unicidad)$\big]$.

El ii) da solución única por no ser tangente a las características $\big($lo confirma $T(x)=1\cdot1-1\cdot(-1)=2\neq0\ \forall x\big)$.
Imponiéndolo: $p(2x)x^3+0=0 \Rightarrow p(v)=0\ \forall v$. La solución única es $\boxed{u=y(y-x)}$ (fácil de comprobar).

2. Sea $\begin{cases}u_{tt}-2u_{tx}-3u_{xx}=0\\ u(x,0)=f(x),\,u_t(x,0)=0\end{cases}$. **a]** Resolver el problema con la transformada de Fourier. [2.2 ptos]
b] Hallar su solución general a partir de la forma canónica.
c] Si $f(x)=4-x^2$ si $x\in[-2,2]$ y 0 en el resto, dibujar $u(x,1)$.

a] $\begin{cases}\hat u_{tt}+2ik\hat u_t+3k^2\hat u=0\\ \hat u(k,0)=\hat f(k),\,\hat u_t(k,0)=0\end{cases}$, $\mu^2+2ik\mu+3k^2$, $\mu=-ik\pm\sqrt{-4k^2}=ik,-3ik$, $\hat u=p(k)\,e^{ikt}+q(k)\,e^{-3ikt}$.

Con los datos: $\begin{matrix}p(k)+q(k)=\hat f(k), & 4q(k)=\hat f(k),\ q(k)=\frac{1}{2}\hat f(k)\\ ik\,p(k)-3ik\,q(k)=0,\ p(k)=3q(k)^{\uparrow} & p(k)=\frac{3}{4}\hat f(k)\end{matrix}$. $\hat u=\frac{1}{4}\big[3\hat f(k)\,e^{ikt}+\hat f(k)\,e^{-3ikt}\big]$

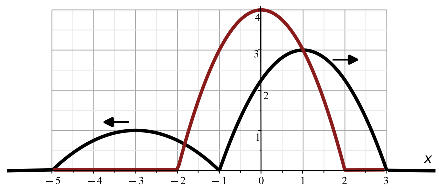
Y como $\mathcal{F}^{-1}[e^{ika}\hat f(k)]=f(x-a)$ la solución es $\boxed{u(x,t)=\frac{1}{4}f(x+3t)+\frac{3}{4}f(x-t)}$.

b] $B^2-4AC=16$ hiperbólica. $\begin{cases}\xi=x+3t\\ \eta=x-t\end{cases}\to u_{\xi\eta}=0$ [Sólo aparecen derivadas parciales de segundo orden. Si se calculasen, se acabaría obteniendo $-16u_{\xi\eta}=0$].

Luego $u(\xi,\eta)=p(\xi)+q(\eta)$, $\boxed{u(x,t)=p(x+3t)+q(x-t)}$ solución general.

[Imponemos los datos para comprobar: $\begin{matrix}p(x)+q(x)=f(x)\\ 3p'(x)-q'(x)=0\end{matrix}$. $p=\frac{f}{4}$, $q=\frac{3f}{4}$].

c] Un cuarto de la onda inicial viaja hacia la izquierda a velocidad 3 y tres cuartos van a la derecha velocidad 1. Para $t=1$ la primera está en $[-5,-1]$ y la otra en $[-1,3]$. En el resto es $u(x,1)=0$.



3. Resolver mediante separación de variables: $\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=\operatorname{sen}x,\ x\in\big[0,\frac{\pi}{2}\big],\ t\in\mathbf{R}\\ u(x,0)=\pi x,\ u_t(x,0)=0\\ u(0,t)=u_x\big(\frac{\pi}{2},t\big)=0\end{cases}$. [2.4 ptos]

Es no homogéneo y probamos serie de autofunciones del homogéneo. El formulario da la EDO que aparece haciendo $u=XT$ y mirando los datos de contorno: $\begin{cases}X''+\lambda X=0\\ X(0)=X'\big(\frac{\pi}{2}\big)=0\end{cases}\to X_n=\{\operatorname{sen}(2n-1)x\}$, $n=1,2,\dots$

Llevamos $u=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\operatorname{sen}(2n-1)x$ a la EDP: $\sum_{n=1}^{\infty}\big[T_n''+(2n-1)^2T_n\big]\operatorname{sen}(2n-1)x=\operatorname{sen}x$ (ya desarrollada).

Y también a los datos iniciales:

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\operatorname{sen}(2n-1)x=\pi x=\sum_{n=1}^{\infty}b_nX_n,\ u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n'(0)\operatorname{sen}(2n-1)x=0 \Rightarrow T_n(0)=b_n,\ T_n'(0)=0\ \forall n,$$

siendo $b_n=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\pi x X_n\,dx=\frac{-4x\cos(2n-1)x}{2n-1}\Big]_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}\frac{4\cos(2n-1)x}{2n-1}=\frac{4(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}\to\ \pi x=4\operatorname{sen}x-\frac{4}{9}\operatorname{sen}3x+\cdots$

Debemos resolver un problema no homogéno: $\begin{cases}T_1''+T_1=1\ \to\ T_1=c_1\cos t+c_2\operatorname{sen}t+1\\ T_1(0)=4,\,T_1'(0)=0\ \to\ T_1=1+3\cos t\end{cases}$

E infinitos homogéneos: $\begin{cases}T_n''+(2n-1)^2T_n=0\\ T_n(0)=b_n,\,T_n'(0)=0\end{cases}\to\ T_n=b_n\cos(2n-1)t$, si $n\geq2$.

Luego $\boxed{u=(1+3\cos t)\operatorname{sen}x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)t\,\operatorname{sen}(2n-1)x}=(1+3\cos t)\operatorname{sen}x-\frac{4}{9}\cos3t\operatorname{sen}3x+\cdots$

Elegir entre 4 y 4*

4. Sea $x^2y''+x(7+2x)y'+9y=0$. ¿Existen soluciones analíticas no triviales en $x=0$? Calcular una solución no trivial cuyo desarrollo en torno a $x=0$ tiene un número finito de términos. [1.8 ptos]

$r(r-1)+6r+9=0$, $r=-3$ doble. Ninguna analítica: $y_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{k-3}$, $c_0\neq 0$. $y_2=\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^{k-2}+y_1\ln x$.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\big[(k-3)(k-4)c_kx^{k-3}+7(k-3)c_kx^{k-3}+2(k-3)c_kx^{k-2}+9c_kx^{k-3}\big]=\sum_{k=0}^{\infty}\big[k^2c_kx^{k-3}-2(3-k)c_kx^{k-2}\big]=0$$

x^{-3}: $0c_0=0\ \forall c_0$, $\quad x^{-2}$: $c_1-6c_0=0$, $c_1=6c_0$, $\quad x^{k-3}$: $k^2c_k-2(4-k)c_{k-1}=0$, $c_k=\frac{2(4-k)}{k^2}c_{k-1}$.

$c_2=\frac{4}{4}c_1=6c_0$, $c_3=\frac{2}{9}c_2=\frac{4}{3}c_0$, $c_4=0=c_5=\cdots$, $\boxed{y=x^{-3}+6x^{-2}+6x^{-1}+\frac{4}{3}}$.

4*. Sea $\begin{cases}y''+4y'+\lambda y=0\\ y(0)=y'(b)=0,\ b>0\end{cases}$. **a]** Determinar si $\lambda=-5$ es o no autovalor y precisar cuántas soluciones de $y''+4y'-5y=5x-4$ cumplen esos datos de contorno.
b] Hallar b de modo que $\lambda=4$ sea autovalor y escribir la autofunción correspondiente. [1.8 ptos]

a] En forma autoadjunta: $\big(e^{4x}y'\big)'+\lambda e^{4x}y=0$. $q\equiv 0=\alpha\alpha'=\beta\beta'$ $\Rightarrow$ $\lambda=-5$ **no es autovalor**. O directamente:

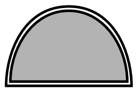
$\mu^2+4\mu-5=0$, $\mu=1,-5$. $y=c_1e^x+c_2e^{-5x}\xrightarrow{cc}\begin{matrix}c_1+c_2=0,\ c_2=-c_1\searrow\\ c_1e^b-5c_2e^{-5b}=0\end{matrix}\quad c_1\big(\overset{>0}{e^b}+\overset{>0}{5e^{-5b}}\big)=0$, $c_1=0=c_2$. No autovalor.

Como el homogéneo tiene sólo la solución trivial, el no homogéneo tiene **solución única**.

b] Si $\lambda=4$, $\mu=2$ doble, $y=(c_1+c_2x)\,e^{-2x}\xrightarrow{cc}\begin{matrix}c_1=0\downarrow\\ c_2(1-2b)e^{-2b}=0\end{matrix}$. Si $\boxed{b=\frac{1}{2}}$, $\forall c_2$. Autofunción $\boxed{\{x\,e^{-2x}\}}$.

Elegir entre 5 y 5*

5. Resolver el problema en el semicírculo $\begin{cases}u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0,\ r<1,\ 0<\theta<\pi\\ u_r(1,\theta)=4\cos^3\theta,\ u_\theta(r,0)=u_\theta(r,\pi)=0\end{cases}$. [1.8 ptos]



Es un problema de **Neumann**. Podría no tener soluciones y, si las tiene, aparecerá C.
El formulario nos da las ecuaciones que aparecen al hacer $u=R\Theta$ en la EDP:

$\Theta''+\lambda\Theta=0$, $\Theta'(0)=\Theta'(\pi)=0$ $\Rightarrow$ $\lambda_n=n^2$, $\Theta_n=\{\cos n\theta\}$, $n=0,1,2,\dots$ $\big[\{1\}$ entre ellas$\big]$.

Y la ecuación radial es: $r^2R''+rR'-\lambda_nR=0$, $\begin{matrix}n=0:\ R=c_1+c_2\ln r\ \xrightarrow{\text{R acot.}}\ R_0=\{1\}.\\ n>0:\ R=c_1r^n+c_2r^{-n}\ \longrightarrow\ R_n=\{r^n\}.\end{matrix}$

Imponemos a $u(r,\theta)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_nr^n\cos n\theta$ el dato final: $u_r(1,\theta)=0+\sum_{n=1}^{\infty}na_n\cos n\theta=4\cos^3\theta\overset{\text{formulario}}{=}3\cos\theta+\cos 3\theta$.

Luego a_0 cualquiera (no hay condición sobre él), $a_1=3$, $3a_3=1$ y demás $a_n=0$.

Las infinitas soluciones soluciones son, pues, $\boxed{u(r,\theta)=C+3r\cos\theta+\frac{1}{3}r^3\cos 3\theta}$.

5*. Sea $\begin{cases}u_t-\big(u_{rr}+\frac{2}{r}u_r\big)=0,\ r\in(\pi,2\pi),\ t>0\\ u(r,0)=\frac{\operatorname{sen} r}{r},\ u(\pi,t)=u(2\pi,t)=0\end{cases}$. Resolverlo por separación de variables.
[El problema para R es resoluble haciendo $v=rR$]. [1.8 ptos]

Separando variables: $u(r,t)=R(r)T(t)\to\frac{T'}{T}=\frac{rR''+2R}{rR}=-\lambda\to\begin{cases}rR''+2R'+\lambda rR=0\\ R(\pi)=R(2\pi)=0\end{cases}$ y $T'=-\lambda T$.

Problema para R similar al primero singular del formulario. Con $v=rR$ la ecuación pasa a ser $v''+\lambda v=0$.

$\Big[$Lo comprobamos: $R'=\frac{v'}{r}-\frac{v}{r^2}$, $R''=\frac{v''}{r}-\frac{2v'}{r^2}+\frac{2v}{r^3}\to v''-\frac{2v'}{r}+\frac{2v}{r^2}+\frac{2v'}{r}-\frac{2v}{r^2}+\lambda v=v''+\lambda v=0\Big]$.

Y el problema: $\begin{cases}v''+\lambda v=0\\ v(\pi)=v(2\pi)=0\end{cases}\xrightarrow{\bullet}\lambda_n=n^2$, $v_n=\{\operatorname{sen} nr\}$, $R_n=\big\{\frac{\operatorname{sen} nr}{r}\big\}$, $n=1,2,\dots$, $T_n=\big\{e^{-n^2t}\big\}$.

- Llevando el intervalo al origen: $s=r-\pi\to\begin{cases}v''+\lambda v=0\\ v(0)=v(\pi)=0\end{cases}\xrightarrow{\bullet}v_n=\{\operatorname{sen} ns\}=\big\{\operatorname{sen}(nr-n\pi)\big\}=\{\operatorname{sen} nr\}$.

[Bastante más corto que aplicando directamente los datos de contorno a $v=c_1\cos wr+c_2\operatorname{sen} wr$].

Probamos entonces $u(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\,e^{-n^2t}\frac{\operatorname{sen} nr}{r}$, a la que sólo le falta cumplir el dato inicial:

$u(r,0)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\frac{\operatorname{sen} nr}{r}=\frac{\operatorname{sen} r}{r}$. El único c_n no nulo es $c_1=1$ y, por tanto, $\boxed{u(r,t)=e^{-t}\frac{\operatorname{sen} r}{r}}$.

Soluciones del examen extraordinario de Métodos II (C) (23-6-23)

Hacer los problemas 1, 4 y 5 y ELEGIR entre 2 y 2* y entre 3 y 3* (cada problema vale 2 puntos).

1. Sea $\begin{cases} u_{tt}+2u_{xt}+u_{xx}-u_t-u_x=0 \\ u(x,0)=f(x),\ u_t(x,0)=0 \end{cases}$. Resolver el problema (con la $\mathcal{F}$ o a partir de la forma canónica), deducir la solución para $f(x)=x$ y comprobar esta solución. [2 ptos]

$B^2-4AC=0$ parabólica, $\begin{cases}\xi=x-t\\ \eta=t\end{cases} \to \begin{cases}u_t=-u_\xi+u_\eta\\ u_x=u_\xi\end{cases},\ \begin{cases}u_{tt}=u_{\xi\xi}-2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\\ u_{xt}=-u_{\xi\xi}+u_{\xi\eta}\\ u_{xx}=u_{\xi\xi}\end{cases} \to\ u_{\eta\eta}-u_\eta=0$ forma canónica

EDO lineal de 2° orden en η con $\mu^2-\mu=0$, $\mu=0,1$. $u=p(\xi)+q(\xi)\,e^{\eta}$, $u(x,t)=p(x-t)+q(x-t)\,e^{t}$ solución general

$\begin{cases}p(x)+q(x)=f(x),\ p'(x)+q'(x)=f'(x)\searrow \\ -p'(x)-q'(x)+q(x)=0\,, \end{cases}$ $\begin{matrix}p(x)=f(x)-f'(x)\\ q(x)=f'(x)\uparrow\end{matrix}$ $\to\ \boxed{u(x,t)=f(x-t)+f'(x-t)\big[e^{t}-1\big]}$.

$\begin{cases}\hat u_{tt}-(1+2ik)\hat u_t+\big(ik-k^2\big)\hat u=0\,,\ \mu=\frac{1}{2}\big[1+2ik\pm\sqrt{1}\,\big]=1+ik\,, ik\,. \quad u(\hat k,t)=p(k)\,e^{t+ikt}+q(k)\,e^{ikt}\ \xrightarrow{ci} \\ \hat u(k,0)=\hat f(k),\ \hat u_t(k,0)=0\end{cases}$

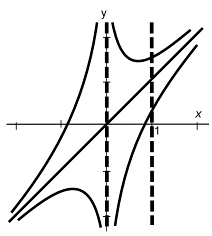
$\hat u=\hat f(k)\,e^{ikt}-ik\hat f(k)\,e^{ikt}\big[e^{t}-1\big]$, $\boxed{u(x,t)=f(x-t)+f'(x-t)\big[e^{t}-1\big]}$.

Cuando $f(x)=x\ \to\ \boxed{u=x-t-1+e^{t}}$. La comprobamos: $u_t=e^{t}-1$, $u_x=1$, $u_{tt}=e^{t}$, $u_{xt}=u_{xx}=0$. Cumple EDP.

Y tambien claramente los datos: $u(x,0)=x-1+1=x$, $u_t(x,0)=1-1=0$.

Elegir entre 2 y 2*

2. Sea la ecuación $(2x-y)u_y+xu_x=-yu$ y los datos: i) $u(0,y)=e^{y}$, ii) $u(1,y)=e^{y}$. [2 ptos]
Hallar la única solución que cumple uno de ellos y 2 distintas que cumplan el otro.



$\frac{dy}{dx}=\frac{2x-y}{x}$ resoluble como lineal: $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}+2\ \to\ y=\frac{C}{x}+\frac{1}{x}\int 2x\,dx=\frac{C}{x}+x$, $x(y-x)=C$.

O como exacta $(y-2x)+x\frac{dy}{dx}=0$, $M_y=1\equiv N_x$. $\begin{matrix}U_x=y-2x,\ U=xy-x^2+p(y)\\ U_y=x,\ U=xy+q(x)\end{matrix}$, $xy-x^2=C\uparrow$

O bien $y=xz\to xz'+z=2-z$. $\int\frac{dz}{z-1}=-\int\frac{2\,dx}{x}+C$, $\ln(z-1)=C-2\ln x$, $z-1=\frac{y}{x}-1=Cx^{-2}$.

$\begin{cases}\xi=xy-x^2\\ \eta=x\end{cases}$, $u_\eta=-\frac{y}{x}u=-\big(1+\frac{\xi}{\eta^2}\big)u$, $u=p(\xi)\,e^{\frac{\xi}{\eta}-\eta}=p\big(xy-x^2\big)\,e^{y-2x}$ solución general.

$\Big[$Peor: $\begin{cases}\xi=xy-x^2\\ \eta=y\end{cases}$, $\eta^2-4\xi=(y-2x)^2\to u_\eta=\frac{y}{y-2x}u=\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2-4\xi}}u\to u=p(\xi)\,e^{\sqrt{\eta^2-4\xi}}=p(xy-x^2)\,e^{y-2x}\Big]$.

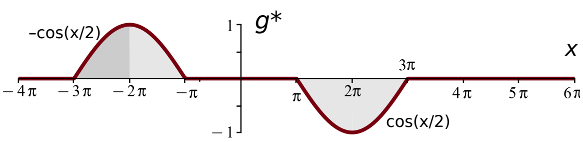
i) $u(0,y)=p(0)\,e^{y}=e^{y}\to p(0)=1$. Para cada p derivable que lo cumpla tenemos una solución. Hay infinitas.
[Dato sobre una característica]. Por ejemplo, tomando $p(v)\equiv 1$ y $p(v)=e^{v}$ es: $u=e^{y-2x}$ y $u=e^{xy-x^2+y-2x}$.

ii) $u(1,y)=p(y-1)\,e^{y-2}=e^{y}\ \Rightarrow\ p(v)=e^{2}\ \forall v$, $\boxed{u(x,y)=e^{y-2x+2}}$ [Solución única por no ser $x=1$ tangente a las características].

Utilizando la T: i) $T(y)=(-y)\cdot 0-0\cdot 1\equiv 0\ \Rightarrow$ característica. ii) $T(y)=(1-y)\cdot 0-1\cdot 1\equiv -1\neq 0\ \Rightarrow$ única.

2*. Sea $\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\geq 0\,, t\in\mathbf{R}\\ u_t(x,0)=\begin{cases}\cos\frac{x}{2}\,,\ x\in[\pi,3\pi]\\ 0\,,\ x\in[0,\pi]\cup[3\pi,\infty)\end{cases}\\ u(x,0)=u(0,t)=0\end{cases}$. **a]** Dibujar y dar la expresión de g^*. **b]** Calcular $u(2\pi,3\pi)$, $u(2\pi,4\pi)$ y $u(2\pi,t)$ para $t\geq 5\pi$. [2 ptos]

La extensión impar de g es: $g^*(x)=\begin{cases}-\cos\frac{x}{2}\,,\ x\in[-3\pi,\pi]\\ \cos\frac{x}{2}\,,\ x\in[\pi,3\pi]\\ 0\,,\ \text{resto de }\mathbf{R}\end{cases}$



Y entonces la solución viene dada por $u(x,t)=\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}g^*$.

En particular, $u(2\pi,3\pi)=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{5\pi}g^*=\frac{1}{2}\int_{\pi}^{3\pi}\cos\frac{x}{2}\,dx=\operatorname{sen}\frac{x}{2}\Big]_{\pi}^{3\pi}=\boxed{-2}$.

$u(2\pi,4\pi)=\frac{1}{2}\int_{-2\pi}^{6\pi}g^*=(g^*\text{ impar})=\frac{1}{2}\int_{2\pi}^{3\pi}\cos\frac{x}{2}\,dx=\operatorname{sen}\frac{x}{2}\Big]_{2\pi}^{3\pi}=\boxed{-1}$.

Y, por ser la extensión g^* impar e incluir el intervalo $[2\pi-t,2\pi+t]$ ambos cosenos cuando $t\geq 5\pi$, ya que $2\pi-t\leq -3\pi$ y $2\pi+t\geq 7\pi>3\pi$, será $u(2\pi,t)=\frac{1}{2}\int_{2\pi-t}^{2\pi+t}g^*=\boxed{0}$.

Elegir entre 3 y 3*

3. Hallar el desarrollo completo de una solución no nula acotada en $x=0$ de $xy''+2y'-xy=0$, a partir de la regla de recurrencia. [La ecuación es resoluble haciendo $v=xy$]. [2 ptos]

$r(r-1)+2r+0=0$, $r=0,-1$. Acotada $y_1=\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$. No lo está y no es analítica $y_2=\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{k-1}+dy_1 \ln x$.

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-1}+\sum_{k=1}^{\infty} 2kc_k x^{k-1}-\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+1}=0 \ \to \ x^0: 2c_1=0, \quad x^1: 2c_2+4c_2-c_0=0,\ c_2=\tfrac{1}{6}c_0,$$

$$x^{k-1}: (k+1)kc_k-c_{k-2}=0, \ \boxed{c_k=\frac{c_{k-2}}{(k+1)k}} \ \to \ c_3=c_5=\cdots=0,\ c_4=\frac{c_2}{5\cdot 4}=\frac{c_0}{5!},\ c_6=\frac{c_4}{7\cdot 6}=\frac{c_0}{7!},\ \dots,\ c_{2k}=\frac{c_0}{(2k+1)!}.$$

La solución es, tomando $c_0=1$, $\boxed{y_1=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k+1)!}}=\frac{1}{x}\left[x+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+\cdots\right]=\frac{\operatorname{sh} x}{x}$. $\left[v''-v=0,\ y_2=\frac{\operatorname{ch} x}{x}\right]$.

3*. Sea $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y'(\frac{\pi}{2})=y(\pi)=0 \end{cases}$. **a]** Determinar si $\lambda=-1$ es o no es autovalor. **b]** Probar que $\lambda=1$ lo es y escribir su autofunción. [2 ptos]

c] Precisar para qué valor de a tiene infinitas soluciones $y''+y=x-a$ con esos mismos datos de contorno.

a] Ya en forma autoadjunta $(y')'+\lambda y=0$. $q\equiv 0=\alpha\alpha'=\beta\beta' \Rightarrow \lambda=-1$ no autovalor. O directamente:

$$y=c_1 e^x+c_2 e^{-x} \xrightarrow{cc} \begin{matrix} c_1 e^{\pi/2}-c_2 e^{-\pi/2}=0,\ c_2=e^{\pi}c_1 \downarrow & c_2=0 \\ c_1 e^{\pi}+c_2 e^{-\pi}=0 & c_1(e^{\pi}+1)=0,\ c_1=0 \uparrow \end{matrix}. \text{ No es autovalor.}$$

b] Si $\lambda=1$, $y=c_1\cos x+c_2 \operatorname{sen} x \xrightarrow{cc} \begin{matrix} -c_1=0 \\ -c_1=0 \end{matrix}$, $c_1=0$, $\forall c_2$. La autofunción asociada es: $\boxed{y_1=\{\operatorname{sen} x\}}$.

Podríamos dar todas las y_n: $s=x-\frac{\pi}{2}$, $y''+\lambda y=0$, $y'(0)=y(\frac{\pi}{2})=0$, $\lambda_n=(2n-1)^2$, $y_n=\{\cos(2n-1)s\}=\{\operatorname{sen}(2n-1)x\}$.

c] $(y')'+y=x-a$. Infinitas si: $\int_{\pi/2}^{\pi}(x-a)\operatorname{sen} x\,dx=(a-x)\cos x\Big]_{\pi/2}^{\pi}+\int_{\pi/2}^{\pi}\cos x\,dx=\pi-a-1=0 \to \boxed{a=\pi-1}$.

[Directamente. $y_p=x-a$ a simple vista, $y=c_1\cos x+c_2\operatorname{sen} x+x-a$. Imponiendo aquí los datos: $\begin{matrix} -c_1+1=0 \\ -c_1+\pi-a=0 \end{matrix}$. Cuando $\pi-a=1$ será $y=C\operatorname{sen} x+\cos x+x+1-\pi$, y para otros a es imposible].

4. Resolver por separación de variables $\begin{cases} u_t-u_{xx}=0,\ x\in(0,1),\ t>0 \\ u(x,0)=0,\ u_x(0,t)=u_x(1,t)=1 \end{cases}$. [La $v(x)$ para el cambio es clara]. [2 ptos]

$v=x$ satisface las condiciones de contorno, $w=u-x \to \begin{cases} w_t-w_{xx}=0 \\ w(x,0)=-x,\ w_x(0,t)=w_x(1,t)=0 \end{cases}$.

El formulario nos da: $\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X'(0)=X'(1)=0 \end{cases} \to \lambda_n=n^2\pi^2$, $X_n=\{\cos n\pi x\}$, $n=0,1,2,\dots$ (entre ellas $\{1\}$).

Y además: $T'=-\lambda T \to T_n=\{e^{-n^2\pi^2 t}\}$. Esto nos lleva a probar la serie:

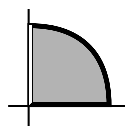
$$w(x,t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2\pi^2 t}\cos n\pi x. \text{ Del dato inicial: } w(x,0)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos n\pi x=-x \ \to$$

$$a_0=\frac{2}{1}\int_0^1 x\,dx=1,\quad a_n=-\frac{2}{1}\int_0^1 x\cos n\pi x\,dx=-\frac{2x\operatorname{sen} n\pi x}{n\pi}\Big]_0^1+\frac{2}{n\pi}\int_0^1 \operatorname{sen} n\pi x\,dx=\frac{2(1-\cos n\pi)}{n^2\pi^2}\ (=0 \text{ si n par}).$$

La solución única es pues: $\boxed{u(x,t)=x-\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}e^{-(2m-1)^2\pi^2 t}\cos(2m-1)x}$.

5. Resolver por separación de variables $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=3\operatorname{sen}\theta,\ r<1,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2} \\ u(1,\theta)=0,\ u(r,0)=u_\theta(r,\frac{\pi}{2})=0 \end{cases}$. [2 ptos]

Conocemos la EDO que da $u=R\Theta \to \begin{cases} \Theta''+\lambda\Theta=0 \\ \Theta(0)=\Theta'(\pi/2)=0 \end{cases}$, $\lambda_n=(2n-1)^2$, $\Theta_n=\{\operatorname{sen}(2n-1)\theta\}$. $n=1,2,\dots$



Se lleva $u(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty} R_n(r)\operatorname{sen}(2n-1)\theta$ a la EDP y al otro dato de contorno:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[R_n''+\frac{1}{r}R_n'-\frac{(2n-1)^2}{r^2}R_n\right]\operatorname{sen}(2n-1)\theta=3\operatorname{sen}\theta \quad \text{(ya desarrollada, todas homogéneas excepto la de } R_1\text{)}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} R_n(1)\operatorname{sen}(2n-1)\theta=0 \Rightarrow R_n'(1)=0\ \forall n. \text{ Y además las soluciones han de estar acotadas en el origen.}$$

Si $n>1$ es $R_n\equiv 0$ (es solución acotada de $r^2R_n''+rR_n'-(2n-1)^2R_n=0$ con dato 0 y el problema tiene solución única).

Sobrevive $\begin{cases} r^2R_1''+rR_1'-R_1=3r^2 \\ R_1 \text{ acotada}, R_1(1)=0 \end{cases} \xrightarrow{*} R_1=c_1 r+c_2 r^{-1}+r^2 \xrightarrow{cc} \begin{matrix} c_2=0 \\ c_1=-1 \end{matrix}$. $\boxed{u(r,\theta)=(r^2-r)\operatorname{sen}\theta}$ [Fácil de comprobar].

* $R_p=Ar^2\ (Ae^{2s}) \to (2+2-1)A=3,\ A=1$, mucho mejor que: $\begin{vmatrix} r & r^{-1} \\ 1 & -r^{-1} \end{vmatrix}=-\frac{2}{r},\ R_p=-r^{-1}\int\frac{r\cdot 3}{2r^{-1}}+r\int\frac{r^{-1}\cdot 3}{2r^{-1}}=r^2$.