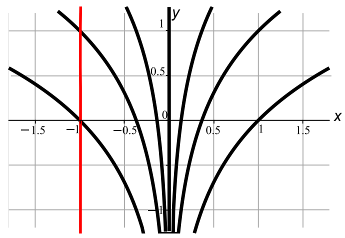
Soluciones del examen de mayo de Métodos II (C) (16-5-24)

Elegir CUATRO problemas entre 1, 2, 3, 4 y 5. Elegir DOS entre 6, 7 y 8.

1. Sea $u_y+xu_x=u-2e^{-y}$. Calcular la solución que cumple $u(-1,y)=0$ probando su unicidad. [1.6 ptos]

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$, $y-\ln|x|=C$. O mejor, $\frac{dx}{dy}=x$, $x=Ce^y$, $xe^{-y}=C$.



Más corto: $\begin{cases}\xi=xe^{-y}\\ \eta=y\end{cases}$, $u_\eta=u-2e^{-\eta}$, $u=p(\xi)\,e^{\eta}+e^{-\eta}=p\big(xe^{-y}\big)\,e^{y}+e^{-y}$.

O bien: $\begin{cases}\xi=xe^{-y}\\ \eta=x\end{cases}$, $e^{-y}=\frac{\xi}{\eta}\ \rightarrow\ u_\eta=\frac{u}{\eta}-\frac{2\xi}{\eta^2}\ \rightarrow\ u=q(\xi)\,\eta-\frac{\eta}{\xi}=q\big(xe^{-y}\big)x+e^{-y}$.

$u(-1,y)=p\big(-e^{-y}\big)\,e^{y}+e^{-y}=0$, $p(v)=-v^2$ ↘

$u(-1,y)=-q\big(-e^{-y}\big)+e^{-y}=0$, $q(v)=-v$ ↗ $\boxed{u(x,y)=\big(1-x^2\big)\,e^{-y}}$.

Única por el dibujo de las características o porque $T(y)=0\cdot1-1\cdot(-1)\neq0\ \ \forall y$.

2. Sea $\begin{cases}u_{tt}+4u_{tx}+4u_{xx}+u_t+2u_x=0\\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=g(x)\end{cases}$. **a]** Resolver el problema con la transformada de Fourier. **b]** Hallar su solución general a partir de la forma canónica. [1.6 ptos]

a] $\begin{cases}\hat u_{tt}+(1-4ik)\hat u_t-\big(2ik+4k^2\big)\hat u=0,\\ \hat u(k,0)=0,\ \hat u_t(k,0)=\hat g(k)\end{cases}$ $\mu=\frac{1}{2}\big[4ik-1\pm\sqrt{1}\,\big]=2ik,\,2ik-1$. $\hat u(k,t)=p(k)\,e^{2ikt}+q(k)\,e^{2ikt-t}\xrightarrow{ci}$

$\begin{cases}p+q=0\\ 2ik(p+q)-q=g\end{cases}$, $\hat u=\hat g(k)\,e^{2ikt}\big[1-e^{-t}\big]$, $\boxed{u(x,t)=g(x-2t)\big[1-e^{-t}\big]}$.

b] $B^2-4AC=0$ parabólica, $\begin{cases}\xi=x-2t\\ \eta=t\end{cases}\rightarrow\begin{cases}u_t=-2u_\xi+u_\eta\\ u_x=u_\xi\end{cases}$, $\begin{cases}u_{tt}=4u_{\xi\xi}-4u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\\ u_{xt}=-2u_{\xi\xi}+u_{\xi\eta}\\ u_{xx}=u_{\xi\xi}\end{cases}\rightarrow\ u_{\eta\eta}+u_\eta=0$ forma canónica

EDO lineal de 2° orden en la η con $\mu=0,-1\ \rightarrow\ u=p(\xi)+q(\xi)\,e^{-\eta}$, $\boxed{u(x,t)=p(x-2t)+q(x-2t)\,e^{-t}}$ solución general

Comprobamos por aquí: $\begin{cases}p(x)+q(x)=0,\ p'(x)+q'(x)=0 \searrow & p(x)=g(x)\\ -2p'(x)-2q'(x)-q(x)=g(x), & q(x)=-g(x)\uparrow\end{cases}\ \rightarrow\ u(x,t)=g(x-2t)\big(1-e^{-t}\big)$.

3. Sea $x^2y''+x\big(1-4x^2\big)y'+\big(12x^2-1\big)y=0$. Hallar una solución no trivial cuyo desarrollo en torno a $x=0$ es un polinomio, dando la regla de recurrencia. ¿Posee soluciones no acotadas en $x=0$? [1.6 ptos]

$r(r-1)+r-1=0$, $r=\pm1$. Acotada $y_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+1}$. No lo está, sea $d=0$ o no, $y_2=\frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k+d\,\underbrace{y_1\ln x}_{\to0,\ x\to0}$.

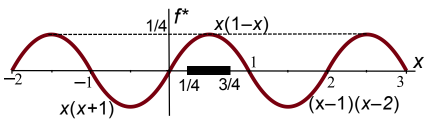
$\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)kc_kx^{k+1}+\sum_{k=0}^{\infty}\big[(k+1)c_kx^{k+1}-4(k+1)c_kx^{k+3}+12c_kx^{k+3}-c_kx^{k+1}\big]=0\ \rightarrow\ x^1:\ [1-1]c_0=0\ \ \forall c_0$.

$x^2:\ 3c_1=0,\ c_1=0$. $x^3:\ 8c_2+8c_0=0,\ c_2=-c_0$. $x^{k+1}:\ (k+2)kc_k+(16-4k)c_{k-2}=0$,

$\boxed{c_k=\frac{4(k-4)}{(k+2)k}c_{k-2}}\ \rightarrow\ c_3=c_5=\cdots=0,\ c_4=0=c_6=\cdots$. La solución es, tomando $c_0=1$, $\boxed{y_1=x-x^3}$.

4. Si $\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=0,\ x\in[0,1],\,t\in\mathbf{R}\\ u(x,0)=x(1-x),\ u_t(x,0)=u(0,t)=u(1,t)=0\end{cases}$, hallar con D'Alembert: **a]** El valor de $u\big(\frac{3}{4},\frac{9}{4}\big)$. **b]** $u\big(x,\frac{1}{4}\big)\ \forall x\in[3/4,1]$. [1.6 ptos]

$u(x,t)=\frac{f^*(x+t)+f^*(x-t)}{2}$ con f^* exensión impar y 2-periódica de $x-x^2$.

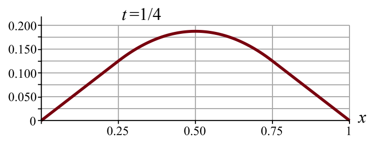


a] $u\big(\frac{3}{4},\frac{9}{4}\big)=\frac{1}{2}\big[f^*(3)+f^*\big(-\frac{3}{2}\big)\big]\underset{\text{2-per}}{=}\frac{1}{2}\big[f(1)+f\big(\frac{1}{2}\big)\big]=\boxed{\frac{1}{8}}$.

O como $u(x,t)$ es de periodo $\frac{2L}{c}=2$ en t podíamos haber hallado $u\big(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\big)$.

b] En $\big[\frac{3}{4},1\big]$ es $\frac{1}{2}\le x-\frac{1}{4}\le\frac{3}{4}$ y $1\le x+\frac{1}{4}\le\frac{5}{4}$ con lo que $u\big(x,\frac{1}{4}\big)$ será:

$\frac{1}{2}\big[f^*\big(x+\frac{1}{4}\big)+f\big(x-\frac{1}{4}\big)\big]=\frac{1}{2}\big[\big(x-\frac{3}{4}\big)\big(x-\frac{7}{4}\big)+\big(x-\frac{1}{4}\big)\big(\frac{5}{4}-x\big)\big]=\boxed{\frac{1}{2}(1-x)}$.



En el resto de $[0,1]$ sería $u\big(x,\frac{1}{4}\big)=\begin{cases}\frac{x}{2},\ 0\le x\le\frac{1}{4}\\ x-x^2-\frac{1}{16},\ \frac{1}{4}\le x\le\frac{3}{4}\end{cases}$ y el dibujo está a la derecha.

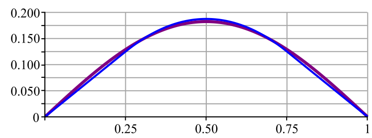
5. Sea $\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=0,\ x\in[0,1],\,t\in\mathbf{R}\\ u(x,0)=x-x^2,\ u_t(x,0)=u(0,t)=u(1,t)=0\end{cases}$. Resolverlo separando variables y ver que el primer término de la serie da $u\big(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\big)\approx\frac{4}{\pi^3}\approx0.13$. [1.6 ptos]

Del formulario y los datos nulos: $\begin{cases}X''+\lambda X=0\\ X(0)=X(1)=0\end{cases}\rightarrow X_n=\{\operatorname{sen}n\pi x\}$, $\begin{cases}T''+\lambda T=0\\ T'(0)=0\end{cases}\rightarrow T_n=\{\cos n\pi t\}$, $n=1,2,\dots$

Luego $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\overset{??}{c_n}\cos n\pi t\,\operatorname{sen}n\pi x$. Como $u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\operatorname{sen}n\pi x=x-x^2\ \rightarrow$

$c_n=\frac{2}{1}\int_0^1\big(x-x^2\big)X_n=\frac{-2\big(x-x^2\big)\cos n\pi x}{n\pi}\Big]_0^1+\frac{2}{n\pi}\int_0^1(1-2x)\cos n\pi x$

$=\frac{2}{n^2\pi^2}(1-2x)X_n\Big]_0^1-\frac{4}{n^2\pi^2}\int_0^1X_n=\frac{4\big[1-(-1)^n\big]}{n^3\pi^3}$ ($=0$ si n par).



$\boxed{u(x,t)=\frac{8}{\pi^3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos(2m-1)\pi t\ \operatorname{sen}(2m-1)\pi x}{(2m-1)^3}}=\frac{8}{\pi^3}\cos\pi t\,\operatorname{sen}\pi x+\cdots\xrightarrow{(3/4,1/4)}u\approx\frac{4}{\pi^3}$.

valor exacto 1/8=0.125

primer término y solución exacta si $t=\frac{1}{4}$

6. Sea $\begin{cases} x^2y''+xy'+\lambda y=0 \\ 2y(1)-y'(1)=y(2)-y'(2)=0 \end{cases}$. **a]** Determinar si $\lambda=-4$ y $\lambda=-1$ son o no autovalores, escribiendo su autofunción en caso de serlo.

b] Para uno de esos dos valores de λ hallar la constante a tal que $x^2y''+xy'+\lambda y=15x^3-a$ tenga infintas soluciones con esos mismos datos. [1.8 ptos]

a] Ecuación de Euler con $\mu=\pm\sqrt{-\lambda}$. Si $\lambda=-4$ es $y=c_1x^2+c_2x^{-2}$, $y=2c_1x-2c_2x^{-3}$. Imponiendo los datos:

$\begin{cases} 2y(1)-y'(1)=4c_2=0 \\ y(2)-y'(2)=\frac{1}{2}c_2=0 \end{cases}$, con c_1 cualquiera. **Es autovalor**, con autofunción $\boxed{y=\{x^2\}}$.

Si $\lambda=-1$, $y=c_1x+c_2x^{-1}$, $y=c_1-c_2x^{-2}$. $\begin{cases} 2y(1)-y'(1)=c_1+3c_2=0 \\ y(2)-y'(2)=c_1+\frac{3}{4}c_2=0 \end{cases}$. $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3/4 \end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow c_1=c_2=0$. **No autovalor**.

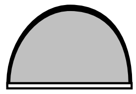
b] Para $\lambda=-1$ el no homogéneo tendrá solución unica. Para que haya infinitas debe ser $\lambda=-4$ y además:

$\big(xy'\big)'+\frac{\lambda}{x}y=15x^2-\frac{a}{x} \to 0=\int_1^2 x^2\big(15x^2-\frac{a}{x}\big)dx=\big[3x^5-\frac{a}{2}x^2\big]_1^2=93-\frac{3a}{2}$. Infinitas si $\boxed{a=62}$.

Más largo imponiendo los datos a la solución general de la no homogénea: $y=c_1x^2+c_2x^{-2}+3x^3+\frac{a}{4}$.

7. Resolver el problema en el semicírculo $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=4\,,\ r<1\,,\ 0<\theta<\pi \\ u(1,\theta)=\cos 2\theta\,,\ u_\theta(r,0)=u_\theta(r,\pi)=0 \end{cases}$. [1.8 ptos]

Conocemos la EDO que da $u=R\Theta \to \begin{cases} \Theta''+\lambda\Theta=0 \\ \Theta'(0)=\Theta'(\pi)=0 \end{cases}$, $\lambda_n=n^2$, $\Theta_n=\{\cos n\theta\}$ $\big[\,\Theta_0=\{1\}\,\big]$.
$n=0,1,2,\ldots$



Se lleva $u(r,\theta)=R_0(r)+\sum_{n=1}^{\infty}R_n(r)\cos n\theta$ a la EDP y al otro dato de contorno:

$R_0''+\frac{1}{r}R_0'+\sum_{n=1}^{\infty}\big[R_n''+\frac{1}{r}R_n'-\frac{n^2}{r^2}R_n\big]\cos n\theta=4$ (ya desarrollada, todas homogéneas excepto la de R_0).

$R_0(1)+\sum_{n=1}^{\infty}R_n(1)\cos n\theta=\cos 2\theta \Rightarrow R_2(1)=1$ y $R_n(1)=0$ si $n\neq 2$. Y las soluciones han de estar acotadas.

Si $n\neq 0,2$ es $R_n\equiv 0$ (solución acotada de $r^2R_n''+rR_n'-n^2R_n=0$ con dato 0 y hay solución única). Sobreviven:

$\begin{cases} r^2R_0''+rR_0'=4r^2 \\ R_0 \text{ acot.}, R_0(1)=0 \end{cases} \xrightarrow{*} R_0=c_1+c_2\ln r+r^2 \xrightarrow{cc} c_2=0\,,\ c_1=-1$. $*\ R_p=Ar^2\,(Ae^{2s}) \to (2+2)A=4$ o $v'=-\frac{v}{r}+4$.
(mejor que fvc)

$\begin{cases} r^2R_2''+rR_2'-4R_2=0 \\ R_2 \text{ acot.}, R_2(1)=1 \end{cases} \to R_0=c_1r^2+c_2r^{-2} \xrightarrow{cc} \begin{matrix} c_2=0 \\ c_1=1 \end{matrix}$. $\boxed{u(r,\theta)=r^2-1+r^2\cos 2\theta}=2x^2-1$ [fácil de comprobar].

8. Sea $\begin{cases} u_t-2(u_{xx}+u_{yy})=0\,,\ (x,y)\in\big(0,\frac{\pi}{2}\big)\times\big(0,\frac{\pi}{2}\big), t>0 \\ u(x,y,0)=f(x,y) \\ u_y(x,0,t)=u\big(x,\frac{\pi}{2},t\big)=u(0,y,t)=u_x\big(\frac{\pi}{2},y,t\big)=0 \end{cases}$. Resolver este problema en 3 variables para una f general y dar su solución si $f(x,y)=\operatorname{sen}3x\cos y$. [1.8 ptos]

$u(x,y,t)=XYT \to XYT'-2[X''Y+XY'']T=0$. $\frac{X''}{X}=\frac{T'}{2T}-\frac{Y''}{Y}=-\lambda \to \begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ \frac{Y''}{Y}=\lambda+\frac{T'}{2T}=-\mu \end{cases} \to \begin{cases} Y''+\mu Y=0 \\ T'=-2[\lambda+\mu]T \end{cases}$

De las condiciones de contorno: $X(0)=X'\big(\frac{\pi}{2}\big)=Y'(0)=Y\big(\frac{\pi}{2}\big)=0$. Así pues: errata formulario ↑

$\begin{cases} \lambda_n=(2n-1)^2,\ X_n=\{\operatorname{sen}(2n-1)x\},\ n=1,2,\ldots \\ \mu_m=(2m-1)^2,\ Y_m=\{\cos(2m-1)y\},\ m=1,2,\ldots \end{cases} \to T_{nm}=\Big\{e^{-2[(2n-1)^2+(2m-1)^2]t}\Big\}$.

Luego $\boxed{u(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\overset{??}{c_{nm}}T_{nm}X_nY_m}$, y debe ser: $u(x,y,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}c_{nm}\operatorname{sen}(2n-1)x\cos(2m-1)y=f(x,y)$

$\to \boxed{c_{nm}=\frac{16}{\pi^2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}f(x,y)\operatorname{sen}(2n-1)x\cos(2m-1)y\,dx\,dy}$, $n,m\geq 1$.

En caso de ser $f(x,y)=\operatorname{sen}3x\cos y$, identificando y sin hacer ninguna integral, se tiene $c_{21}=1$ y el resto 0.

Y la solución, fácil de comprobar, es en este caso: $\boxed{u(x,y,t)=e^{-20t}\operatorname{sen}3x\cos y}$.

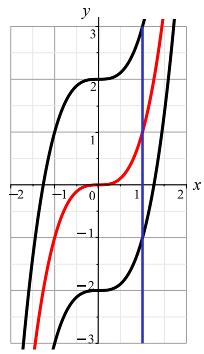
Soluciones del examen extraordinario de Métodos II (C) (25-6-24)

ELEGIR TRES problemas entre 1, 2, 3 y 4 (de 1.8 puntos) y ELEGIR DOS entre 5, 6 y 7 (de valor 2.3 puntos).

1. Sea $3x^2u_y+u_x=4yu$. **a]** Calcular la solución que cumple $u(1,y)=e^{3y-2}$ probando su unicidad. [1.8 ptos]
b] Dar un dato de Cauchy para el que la EDP tenga: i) infinitas soluciones, ii) ninguna solución.

$\frac{dy}{dx}=3x^2$, $y-x^3=C$. Mejor $\begin{cases}\xi=y-x^3\\ \eta=x\end{cases}$, $u_\eta=(4\xi+4\eta^3)u$, $u=p(\xi)e^{4\xi\eta+\eta^4}=p(y-x^3)e^{4xy-3x^4}$.

$\Big[$Peor: $\begin{cases}\xi=y-x^3\\ \eta=y\end{cases}$, $x=(\eta-\xi)^{1/3}$ $\to$ $u_\eta=\frac{4\eta-4\xi+4\xi}{3(\eta-\xi)^{2/3}}u \to u=p(\xi)e^{(\eta-\xi)^{4/3}+4\xi(\eta-\xi)^{1/3}}\uparrow\Big]$.



a] $u(1,y)=p(y-1)e^{4y-3}=e^{3y-2}$, $p(y-1)=e^{1-y}$, $p(v)=e^{-v}$, $\boxed{u(x,y)=e^{4xy-y+x^3-3x^4}}$.

Única por el dibujo de las características o porque $T(y)=0\cdot 3-1\cdot 1=-1\neq 0\ \ \forall y$.

b] Los datos los daremos sobre la característica $y=x^3$. $u(x,x^3)=p(0)\,e^{x^4}$.

Si i) $u(x,x^3)=0$ tendrá infinitas soluciones $\big[$una para cada $p\in C^1$ con $p(0)=0\big]$.

Y si ii) $u(x,x^3)=1$ ninguna lo cumple, pues para ninguna p puede ser $p(0)=e^{-x^4}$.

$\big[T(x)=1\cdot 3x^2-3x^2\cdot 1\equiv 0\ \ \forall x$ confirma que la curva es característica$\big]$.

2. Resolver, utilizando exclusivamente la transformada de Fourier, los dos problemas:

a] $\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=0,\ x,t\in\mathbf{R}\\ u(x,0)=2e^{-x^2},\ u_t(x,0)=0\end{cases}$ **b]** $\begin{cases}u_t-u_{xx}=0,\ x\in\mathbf{R},\ t>0\\ u(x,0)=2e^{-x^2},\ u \text{ acotada}\end{cases}$ [1.8 ptos]

a] $\begin{cases}\hat u_{tt}+k^2\hat u=0\\ \hat u(k,0)=\sqrt2\,e^{-k^2/4},\ \hat u_t(k,0)=0\end{cases}\xrightarrow{\mu=\pm ki}\hat u(k,t)=p(k)\,e^{ikt}+q(k)\,e^{-ikt}\xrightarrow{c.i.}$

$\begin{array}{l}p(k)+q(k)=\sqrt2\,e^{-k^2/4}\\ ik\big[p(k)-q(k)\big]=0\ \to\ q(k)=p(k)\end{array}\ \to\ p(k)=\frac{1}{\sqrt2}e^{-k^2/4}=q(k)$, $\hat u(k,t)=\frac{1}{\sqrt2}e^{-k^2/4}\big[e^{ikt}+e^{ik(-t)}\big]$.

Como $\mathcal{F}^{-1}\big[\frac{1}{\sqrt2}e^{-k^2/4}\big]=e^{-x^2}$, $\mathcal{F}^{-1}\big[\hat f(k)\,e^{ika}\big]=f(x-a)$, es $\boxed{u(x,t)=e^{-(x-t)^2}+e^{-(x+t)^2}}$ [la que daría D'Alembert]

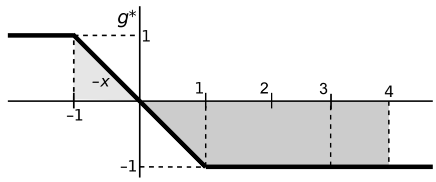
b] $\begin{cases}\hat u_t+k^2\hat u=0\\ \hat u(k,0)=\sqrt2\,e^{-k^2/4}\end{cases}\to\ \hat u(k,t)=p(k)\,e^{-k^2t}\xrightarrow{c.i.}\hat u(k,t)=\sqrt2\,e^{-k^2(t+1/4)}$. Es $\mathcal{F}^{-1}\big[e^{-ak^2}\big]=\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-x^2/4a}$,

con lo que la solución del problema es $\boxed{u(x,t)=\frac{2}{\sqrt{4t+1}}\,e^{-x^2/(4t+1)}}$.

3. Sea $\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=0,\ x\geq 0,\ t\in\mathbf{R}\\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=\begin{cases}1-x,\ x\in[0,1]\\ 0,\ x\in[1,\infty)\end{cases}\\ u(0,t)=t\end{cases}$. **a]** Hacer el dato de contorno 0 usando una v clara y dar la expresión de la g^* del problema para w. **b]** Calcular $u(1,2)$, $u(2,2)$ y $u(x,2)$ para $x\geq 3$. [1.8 ptos]

a] $v=t$ cumple la condición de contorno. $w=u-v=u-t$ $\to$

$\begin{cases}w_{tt}-w_{xx}=0-0=0,\ x\geq 0,\ t\in\mathbf{R}\\ w(x,0)=0,\ w_t(x,0)=\begin{cases}-x,\ x\in[0,1]\\ -1,\ x\in[1,\infty)\end{cases},\ w(0,t)=0\end{cases}$.



$\begin{cases}w_{tt}-w_{xx}=0,\ x,t\in\mathbf{R}\\ w(x,0)=0,\ w_t(x,0)=g^*(x)\end{cases}$, con g^* extensión impar $\to$

$w(x,t)=\frac12\int_{x-t}^{x+t}g^*(s)\,ds$. $u(x,2)=2+\frac12\int_{x-2}^{x+2}g^*(s)\,ds$.

b] $u(1,2)=2+\frac12\int_{-1}^{3}g^*=2-\frac12\int_1^3 1\,ds=\boxed{1}$. $u(2,2)=2+\frac12\int_0^4 g^*=2+\frac12\int_0^1+\frac12\int_1^4=2-\frac14-\frac32=\boxed{\frac14}$.

Para $x\geq 3$ es $u(x,2)=2+\frac12\int_{x-2}^{x+2}(-1)\,ds=2-2=\boxed{0}$. [No ha llegado la onda, que va a velocidad 1].

4. Hallar 4 términos del desarrollo de una solución no trivial de $xy''-(2+x)y=0$ que se anule en $x=0$, dando la regla de recurrencia. ¿Qué función elemental podría ser? Comprobarla. [1.8 ptos]

$r(r-1)=0$, $r=1,0$. Se anula $y_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+1}$. También acotada, sea $d=0$ o no, $y_2=\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k+d\,\underbrace{y_1\ln x}_{\to 0,\ x\to 0}$.

$\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)kc_kx^k-\sum_{k=0}^{\infty}\big[2c_kx^{k+1}+c_kx^{k+2}\big]=0\ \to\ x^1:\ 2c_1-2c_0=0,\ c_1=c_0.\ \ x^2:\ 6c_2-2c_1-c_0=0,\ c_2=\frac12c_0$.

x^k: $(k+1)kc_k-2c_{k-1}-c_{k-2}=0$, $\boxed{c_k=\frac{2c_{k-1}+c_{k-2}}{(k+1)k}}\to c_3=\frac{2c_2+c_1}{12}=\frac16c_0$. $\boxed{y_1=x\big(1+x+\frac12x^2+\frac16x^3+\cdots\big)}$.

Parece ser $y_1=xe^x$. (Otro termino: $c_4=\frac{2c_3+c_2}{20}=\frac{1/3+1/2}{20}c_0=\frac{c_0}{24}$). $y_1'=(x+1)e^x$, $y_1''=(x+2)e^x$. Es solución.

ELEGIR DOS entre 5, 6 y 7

5. Sea $\begin{cases} y''+2y'+\lambda y=0 \\ y(0)=y'(\frac{\pi}{4})=0 \end{cases}$. **a]** Justificar que $\lambda=-3$ no es autovalor.
b] Probar que $\lambda_1=2$ lo es, dar su autofunción $\{y_1\}$ y calcular $\langle y_1,y_1\rangle$.
c] Basándose en una gráfica probar que siguiente autovalor λ_2 es menor que 37.

[2.3 ptos]

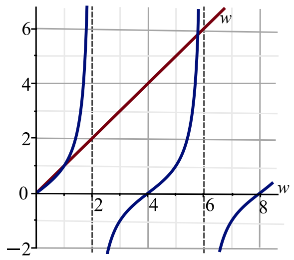
a] En forma autoadjunta $\left[e^{2x}y'\right]'+e^{2x}\lambda y=0$. $\alpha\alpha'=\beta\beta'=q=0 \Rightarrow$ todos los $\lambda\geq 0$ y $\lambda=-3$ no lo puede ser.

O bien $\mu^2+2\mu-3=(\mu-1)(\mu+3)=0$, $y=c_1e^{x}+c_2e^{-3x}$, $\begin{cases} c_1+c_2=0 \\ c_1e^{\pi/4}-3c_2e^{-3\pi/4}=0 \end{cases}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\pi/4} & -3e^{-3\pi/4} \end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow c_1=c_2=0$.

Si $\lambda>1$: $\mu^2+2\mu+\lambda=0$, $\mu=-1\pm i\,w$, con $w=\sqrt{\lambda-1} \to y=(c_1\cos wx+c_2\,\text{sen}\,wx)\,e^{-x}$.

b] $\lambda=2 \to y=(c_1\cos x+c_2\,\text{sen}\,x)\,e^{-x} \to \begin{cases} c_1=0 \searrow \\ \quad c_2e^{-\pi/4}\left(\cos\frac{\pi}{4}-\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)=0\ \forall c_2 \end{cases}$. Autofunción $\boxed{y_1=\{e^{-x}\,\text{sen}\,x\}}$.

$$\langle y_1,y_1\rangle=\int_0^{\pi/4} r\,y_1^2\,dx=\int_0^{\pi/4}e^{2x}\,e^{-2x}\,\text{sen}^2x\,dx=\int_0^{\pi/4}\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{\cos 2x}{2}\right)dx$$
$$=\frac{\pi}{8}-\left[\frac{\text{sen}\,2x}{4}\right]_0^{\pi/4}=\boxed{\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}}.$$



c] $\lambda>2 \to \begin{cases} c_1=0 \searrow \\ \quad c_2e^{-\pi/4}\left(w\cos\frac{\pi w}{4}-\text{sen}\,\frac{\pi w}{4}\right)=0 \end{cases}$. c_2 cualquiera cuando $\tan\frac{\pi w}{4}=w$.

El primer corte es si $w=1$. El segundo se tiene antes de la asíntota de $w=6$.
Luego $w_2<6$. Y, por tanto, $\lambda_2=w_2^2+1<37$.

6. Resolver por separación de variables $\begin{cases} u_t-\frac{2}{t}u_{xx}=3\,\text{sen}\,x,\ x\in(0,\pi),\ t>1 \\ u(x,1)=\text{sen}\,2x,\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$. [2.3 ptos]

$u=XT$ en EDP homogénea $\to \frac{X''}{X}=\frac{tT'}{2T}=-\lambda$, $\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=X(\pi)=0 \end{cases}$, $X_n=\{\text{sen}\,nx\}$, $n=1,2,\dots$ Probamos, pues:

$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\,\text{sen}\,nx \xrightarrow{EDP} \sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n'+\frac{2n^2}{t}T_n\right]\text{sen}\,nx=\underset{\text{(ya desarrollada)}}{3\,\text{sen}\,x}$, con $u(x,1)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(1)\,\text{sen}\,nx=\underset{\text{(ya desarrollada)}}{\text{sen}\,2x}$.

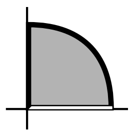
Todas las $T_n\equiv 0$, salvo las dos primeras (son problemas de EDOs homogéneas con dato inicial 0) menos:

$\begin{cases} T_1'=-\frac{2}{t}T_1+3 \\ T_1(1)=0 \end{cases} \to T_1=\frac{C}{t^2}+\frac{1}{t^2}\int 3t^2dt=\frac{C}{t^2}+t \xrightarrow{d.i.} T_1=t-\frac{1}{t^2}$.

$\begin{cases} T_2'=-\frac{8}{t}T_2 \\ T_2(1)=1 \end{cases} \to T_2=Ct^{-8} \xrightarrow{d.i.} C=1$. La solución es $\boxed{u(x,t)=\left(t-\frac{1}{t^2}\right)\text{sen}\,x+\frac{1}{t^8}\,\text{sen}\,2x}$.

7. Sea $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0,\ r<2,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2} \\ u(2,\theta)=f(\theta),\ u_\theta(r,0)=u(r,\frac{\pi}{2})=0 \end{cases}$. Calcular su solución para i) $f(\theta)=\cos 3\theta$ y dos términos de su serie solución para ii) $f(\theta)=\pi$. [2.3 ptos]

$u=R\Theta \to \begin{cases} \Theta''+\lambda\Theta=0,\ \Theta'(0)=\Theta(\frac{\pi}{2})=0 \to \lambda_n=(2n-1)^2,\ \Theta_n=\{\cos(2n-1)\theta\} \\ r^2R''+rR'-\lambda R=0 \qquad\qquad\quad\ \downarrow \\ \qquad\qquad\qquad R=c_1r^{2n-1}+c_2r^{1-2n} \xrightarrow{ac} R_n=\{r^{2n-1}\} \end{cases}$ $n=1,2,\dots$



La solución será de la forma $u(r,\theta)\overset{??}{=}\sum_{n=1}^{\infty}c_nr^{2n-1}\cos(2n-1)\theta$. Falta solo el últimos dato:

$u(2,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n2^{2n-1}\cos(2n-1)\theta=f(\theta)$. En el caso i) basta identificar y en el ii) hay que integrar.

Para i) es claro que sólo es no nulo el c_2: $8c_2=1 \to \boxed{u(r,\theta)=\frac{1}{8}r^3\cos 3\theta}$.

Para ii) los coeficientes vienen dados por $c_n=\frac{4}{\pi 2^{2n-1}}\int_0^{\pi/2}\pi\cos(2n-1)\theta\,d\theta=\frac{4}{(2n-1)2^{2n-1}}\,\text{sen}\,\frac{(2n-1)\pi}{2}$.

Por tanto: $u=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{(2n-1)2^{2n-1}}r^{2n-1}\cos(2n-1)\theta$. Y los dos términos: $\boxed{u(r,\theta)=2r\cos\theta-\frac{1}{6}r^3\cos 3\theta+\cdots}$.