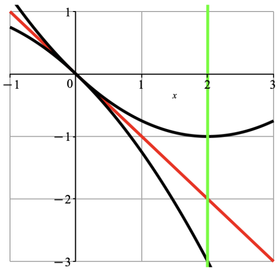
Soluciones del examen de mayo de Métodos II (C) (14-5-25)

Elegir TRES problemas entre 1, 2, 3 y 4. Elegir DOS entre 5, 6 y 7.

1. Sea la ecuación $(x+2y)u_y+xu_x=2u$ y los datos: i) $u(2,y)=2y$, ii) $u(x,-x)=x$. [1.8 ptos]
Calcular la solución que cumple el dato para el que hay solución única. ¿Cuántas soluciones cumplen el otro?

$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{x}y+1$ lineal, $y=Cx^2+x^2\int\frac{2}{x}=Cx^2-x$, $\frac{y+x}{x^2}=C$ ($y=-x$ la característica más simple).



Mejor: $\begin{cases}\xi=yx^{-2}+x^{-1}\\ \eta=x\end{cases}$, $\begin{cases}u_y=x^{-2}u_\xi\\ u_x=-(2yx^{-3}+x^{-2})u_\xi+u_\eta\end{cases}$, $u_\eta=\frac{2u}{\eta}$, $u=p(\xi)\,\eta^2=p\big(\frac{y+x}{x^2}\big)x^2$.

Mucho más largo con $\eta=y$.

Las T respectivas son: i) $T(y)=0\cdot(2+2y)-1\cdot 2=-2\neq 0$ para todo $y\Rightarrow$ **unicidad**.

ii) $T(x)=1\cdot(x-2x)-(-1)1\cdot x\equiv 0$. **Es una característica** (tangente en cada punto y además se sabía) y, por tanto, tendrá inifinitas o ninguna solución.

Imponemos i): $u(2,y)=p\big(\frac{y+2}{4}\big)4=2y$, $y=4v-2$, $p(v)=2v-1$, $\boxed{u(x,y)=2y+2x-x^2}$.

Para el ii): $u(x,-x)=p(0)x^2=x$, lo que es imposible. **No hay solución** con ese dato.

2. Sea $\begin{cases}u_{tt}-2u_{tx}+u_{xx}-u=0\\ u(x,0)=f(x),\ u_t(x,0)=f'(x)\end{cases}$. **a]** Resolver el problema con la transformada de Fourier. **b]** Hallar su solución general a partir de la forma canónica. [1.8 ptos]

a] $\begin{cases}\hat u_{tt}+2\mathrm{i}\,k\,\hat u_t-\big(1+k^2\big)\hat u=0,\\ \hat u(k,0)=\hat f(k),\ \hat u_t(k,0)=-ik\hat f(k)\end{cases}$ $\mu=-\mathrm{i}\,k\pm\sqrt{-k^2+1+k^2}=-\mathrm{i}\,k\pm 1$, $\hat u(k,t)=p(k)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt+t}+q(k)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt-t}\xrightarrow{ci}$

$\begin{cases}p+q=\hat f\\ -\mathrm{i}\,k(p+q)+p-q=-\mathrm{i}\,k\hat f,\ p=q\end{cases}$ $p(k)=q(k)=\frac{1}{2}\hat f(k)$. $\hat u(k,t)=\frac{1}{2}\hat f(k)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\big[\mathrm{e}^{t}+\mathrm{e}^{-t}\big]$, $\boxed{u(x,t)=\mathrm{ch}\,t\,f(x+t)}$.

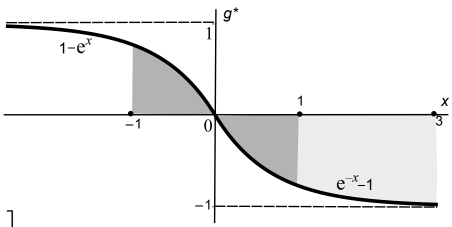
b] $B^2-4AC=0$ parabólica, $\begin{cases}\xi=x+t\\ \eta=t\end{cases}\to\begin{cases}u_t=u_\xi+u_\eta\\ u_x=u_\xi\end{cases}$, $\begin{cases}u_{tt}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\\ u_{xt}=u_{\xi\xi}+u_{\xi\eta}\\ u_{xx}=u_{\xi\xi}\end{cases}\to u_{\eta\eta}-u=0$ forma canónica

EDO lineal de 2° orden en η con $\mu=\pm1\to u=p(\xi)\,\mathrm{e}^{\eta}+q(\xi)\,\mathrm{e}^{-\eta}$, $\boxed{u(x,t)=p(x+t)\,\mathrm{e}^{t}+q(x+t)\,\mathrm{e}^{-t}}$ solución general

Comprobamos la particular por aquí: $\begin{cases}p+q=f,\ p'+q'=f'\\ p'+q'+p-q=f',\ p=q\end{cases}$ $p(x)=q(x)=\frac{1}{2}f(x)$, $u(x,t)=\frac{1}{2}f(x+t)\big(\mathrm{e}^{t}-\mathrm{e}^{-t}\big)$.

3. Sea $\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=0,\ x\geq 0,\ t\in\mathbf{R}\\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=\mathrm{e}^{-x},\ u(0,t)=t\end{cases}$. Hallar con D'Alembert: **a]** $u(1,2)$, **b]** $u(1,t)\ \forall t\in[0,1]$. [La v para el cambio es clara]. [1.8 ptos]

$w=u-t\to\begin{cases}w_{tt}-w_{xx}=0\\ w_t(x,0)=\mathrm{e}^{-x}-1\equiv g(x),\ w(x,0)=w(0,t)=0\end{cases}$. Entonces será:



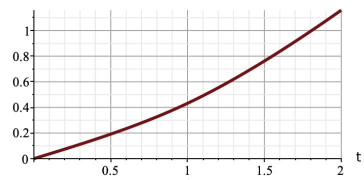
$u(x,t)=t+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}g^*(s)\,ds$ con g^* exensión impar de $\mathrm{e}^{-x}-1$.

a] $u(1,2)=2+\frac{1}{2}\int_{-1}^{3}g^*\underset{\text{impar}}{=}2+\frac{1}{2}\int_{1}^{3}\big(\mathrm{e}^{-x}-1\big)\,dx=\boxed{1+\frac{\mathrm{e}^{-1}}{2}-\frac{\mathrm{e}^{-3}}{2}}$.

[No se ha necesitado la expresión de g^* en $x\leq 0$, que es $-(\mathrm{e}^{+x}-1)=1-\mathrm{e}^{x}$].

b] En $t\in[0,1]$ es $1-t\geq 0$ y la integral no incluye valores negativos:

$u(1,t)=t+\frac{1}{2}\int_{1-t}^{1+t}\big(\mathrm{e}^{-x}-1\big)\,dx=t-t+\frac{1}{2}\big[\mathrm{e}^{t-1}-\mathrm{e}^{-t-1}\big]=\boxed{\mathrm{e}^{-1}\,\mathrm{sh}\,t}$.



En $[1,\infty)$ sería $u=t+\frac{1}{2}\int_{t-1}^{1+t}g=t-1+\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{sh}\,1$ (el dibujo en $[1,2]$ a la derecha).

4. Sea $xy''-2y'+xy=0$. Hallar, usando la regla de recurrencia, 3 términos no nulos del desarrollo en torno a $x=0$ de la solución y_1. ¿Dónde converge esta serie? ¿Están y_1 e y_2 acotadas en $x=0$? [1.8 ptos]

$a=-\frac{2}{x}\Rightarrow x=0$ singular. $x^2y''-2xy'+x^2y=0$, $a^*=-2$, $b^*=x^2$ analíticas (s.reg.). $r(r-1)-2r=0$, $r=3,0$.

Como a^* y b^* 'convergen' $\forall x$ el teorema de Frobenius asegura que también lo hacen las series solución.

$y_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+3}$. $y_2=\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k+dy_1\ln x$ ambas acotadas [aunque sea $d\neq 0$, pues $x^3\ln|x|\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0$].

$\sum_0\big[(k+3)(k+2)c_kx^{k+2}-2(k+3)c_kx^{k+2}+c_kx^{k+4}\big]=\sum_0\big[(k+3)kc_kx^{k+2}+c_kx^{k+4}\big]=0\to\boxed{c_k=-\frac{c_{k-2}}{(k+3)k}}$.

x^2: $0\cdot c_0=0$, $\forall c_0$; x^3: $4c_1=0=c_3=\cdots$; x^4: $10c_2+c_0=0$, $c_2=-\frac{1}{10}c_0$; $c_4=-\frac{1}{7\cdot 4}c_2=\frac{1}{280}c_0$, ...

$\boxed{y_1=x^3-\frac{1}{10}x^5+\frac{1}{280}x^7-\cdots}$. [Tiene solución elemental: $y=c_1(\mathrm{sen}\,x-x\cos x)+c_2(\cos x+x\,\mathrm{sen}\,x)$].

5. Sea $\begin{cases} x^2y''-2xy'+\lambda y=2x^3 \\ y'(1)=4y(3)-3y'(3)=0 \end{cases}$. **a]** Estudiar si $\lambda=0$ y $\lambda=2$ son o no autovalores del problema homgéneo, escribiendo su autofunción $\{y_h\}$ en caso de serlo.
b] Para ambos valores de λ precisar cuántas soluciones tiene el problema no homogéneo. [2.3 ptos]

Ecuación de Euler con $\mu^2-3\mu+\lambda=0$. Forma autoadjunta: $y''-\frac{2}{x}y'+\frac{\lambda}{x^2}y=2x$, $e^{-2\ln x}$, $\left[\frac{y'}{x^2}\right]'+\frac{\lambda}{x^4}y=\frac{2}{x}$.

a] Si $\lambda=0$, $\begin{array}{l} y=c_1+c_2x^3 \\ y'=3c_2x^2 \end{array}$. Imponiendo datos: $\begin{cases} y'(1)=3c_2=0 \\ 4y(3)-3y'(3)=4c_1+27c_2=0 \end{cases} \to c_1=c_2=0$. **No es autovalor**.

Si $\lambda=2$, $\begin{array}{l} y=c_1x+c_2x^2 \\ y=c_1+2c_2x \end{array}$. $\begin{cases} y'(1)=c_1+2c_2=0 \\ 4y(3)-3y'(3)=9c_1+18c_2=0 \end{cases} \Rightarrow c_1=-2c_2$. **Es autovalor**, con $\boxed{y_h=\{x^2-2x\}}$.

b] Para $\lambda=0$ el problema no homogéneo tendrá solución unica por tener el homogéneo sólo la trivial $y\equiv 0$.
Para $\lambda=2$ el no homogéneo tendrá infinitas o ninguna dependiendo de si se anula o no la integral:

$$\int_1^3 \left(x^2-2x\right)\frac{2}{x}\,dx=\int_1^3(2x-4)\,dx=\left[x^2\right]_1^3-8=0.$$ **Tiene infinitas**.

Más largo imponiendo los datos a la solución general de la no homogénea: $y_p=Ax^3 \to y=c_1x+c_2x^2+x^3 \to$
$\begin{cases} y'(1)=c_1+2c_2+3=0 \\ 4y(3)-3y'(3)=9c_1+18c_2+27=0 \end{cases} \Rightarrow c_1=-2c_2-3$. Las infinitas son $y=c_2\left(x^2-2x\right)+x^3-3x$.

6. Resolver por separación de variables $\begin{cases} u_t-3t^2u_{xx}=e^{-4t^3}\cos 2x,\ x\in(0,\pi),\ t>0 \\ u(x,0)=2\operatorname{sen}^2x,\ u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=0 \end{cases}$. [2.3 ptos]

Por ser una EDP nueva empezamos separando variables en la homogénea $XT'=3t^2X''T$, $\frac{T'}{3t^2T}=\frac{X''}{X}=-\lambda$
$\to \begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X'(0)=X'(\pi)=0 \end{cases}$, $X_n=\{\cos nx\}$, $n=0,1,\dots$ autofunciones del homogéno (entre ellas $\{1\}$). [Y además $T'=-3t^2\lambda T$ ↑].

Llevamos entonces a la EDP y al dato inicial la serie $u(x,t)=T_0(t)+\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\cos nx$ obteniendo:

$$T_0'+\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n'+3n^2t^2T_n\right]\cos nx=e^{-4t^3}\cos 2x,\quad T_0(0)+\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\cos nx=1-\cos 2x$$ (segundos miembros ya desarrollados).

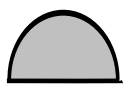
Como el resto son problemas para EDOs homogéneas continuas y con dato inicial 0 sólo hay que resolver:

$$\begin{cases} T_0'=0 \\ T_0(0)=1 \end{cases} \to T_0=1,\quad \begin{cases} T_2'+12t^2T_2=e^{-4t^3} \\ T_2(0)=-1 \end{cases} \to T_2=Ce^{-4t^3}+e^{-4t^3}\int e^{4t^3}e^{-4t^3}dt=(C+t)e^{-4t^3}\xrightarrow{di} C=-1.$$

Por tanto, $\boxed{u(x,t)=1+(t-1)e^{-4t^3}\cos 2x}$.

7. Resolver el problema en el semicírculo $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0,\ r<1,\ 0<\theta<\pi \\ u_r(1,\theta)=\pi\theta,\ u(r,0)=u_\theta(r,\pi)=0 \end{cases}$. [2.3 ptos]

Conocemos las EDO que da $u=R\Theta \to \begin{cases} \Theta''+\lambda\Theta=0 \\ \Theta(0)=\Theta'(\pi)=0 \end{cases}$, $\lambda_n=\frac{(2n-1)^2}{4}$, $\Theta_n=\left\{\operatorname{sen}\frac{2n-1}{2}\theta\right\}$, $n=1,2,\dots$



Y también $r^2R''+rR-\lambda_nR=0$, $\mu=\pm\sqrt{\lambda_n}$, que para los λ_n de arriba da: $R=c_1r^{n-\frac{1}{2}}+c_2r^{-n+\frac{1}{2}}$.

Y además las soluciones han de estar acotadas en el origen: $R_n=\left\{r^{n-\frac{1}{2}}\right\} \to u(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\overset{??}{c_n}\,r^{n-\frac{1}{2}}\operatorname{sen}\frac{2n-1}{2}\theta$.

Imponemos el último dato de contorno para hallar los c_n: $u_r(1,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2}c_n1^{n-\frac{3}{2}}\operatorname{sen}\frac{2n-1}{2}\theta=\pi\theta \to$

$$c_n=\frac{2}{2n-1}\,2\int_0^\pi\theta\operatorname{sen}\frac{(2n-1)\theta}{2}\,d\theta=\frac{8}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\theta}{2}\Big]_0^\pi+\frac{8}{(2n-1)^2}\int_0^\pi\cos\frac{(2n-1)\theta}{2}\,d\theta=\frac{16}{(2n-1)^3}\operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi}{2}.$$

La solución única de este problema mixto será entonces: $\boxed{u(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}\,r^{n-\frac{1}{2}}\operatorname{sen}\frac{2n-1}{2}\theta}$.

Soluciones del examen extraordinario de Métodos II (C) (24-6-25)

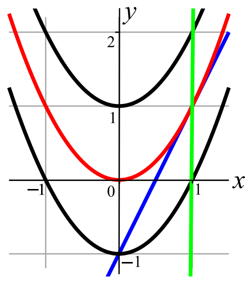
ELEGIR TRES problemas entre 1, 2, 3 y 4 y ELEGIR entre 5 y 5* y entre 6 y 6*.

1. Sea $2xu_y+u_x=3yu$ y los datos: i) $u(1,y)=e^y$, ii) $u(x,2x-1)=0$, iii) $u(x,x^2)=1$. [1.9 ptos]
Calcular la solución que cumple un dato que no plantee problemas de unicidad, razonando la elección.

$\frac{dy}{dx}=2x$, $y-x^2=C$ características. Mejor: $\begin{cases}\xi=y-x^2\\ \eta=x\end{cases}$, $u_\eta=3(\xi+\eta^2)\,u$, $u=p(\xi)\,e^{3\xi\eta+\eta^3}$

$$u(x,y)=p(y-x^2)\,e^{3xy-2x^3}.$$

Más largo: $\begin{cases}\xi=y-x^2\\ \eta=y\end{cases}$, $u_\eta=\frac{3y}{2x}u=\frac{3}{2}\frac{\eta-\xi+\xi}{(\eta-\xi)^{1/2}}u$, $\frac{3}{2}\int\big[(\eta-\xi)^{1/2}\cdots\big]d\eta=(\eta-\xi)^{3/2}+\overset{\uparrow}{3}\xi(\eta-\xi)^{1/2}$.



Las T respectivas son: i) $T=0-1\neq0$, ii) $T=2x-2=0$ si $x=1$, iii) $T=2x-2x\equiv0$.
iii) es característica, ii) con problema de tangencia en $(1,1)$. Sólo i) asegura unicidad.

i) $u(1,y)=p(y-1)\,e^{3y-2}=e^y$, $p(y-1)=e^{2-2y}$, $p(v)=e^{-2v}$, $\boxed{u=e^{3xy-2y+2x^2-2x^3}}$.

[El dibujo de las características confirma tangencias. En concreto, para iii) no hay solución, pues $p(0)e^{x^3}=1$ es imposible.
Y para ii) se deduce que $p(-(x-1)^2)=0$, luego $p(v)$ es indeterminada si $v>0$, con lo que u lo es si $y>x^2$].

2. Sea $\begin{cases}u_{tt}+u_{xt}-2u_{xx}-u_t+u_x=0\\ u(x,0)=f(x),\ u_t(x,0)=f'(x)\end{cases}$. [1.9 ptos]

a] Resolver el problema sólo con la transformada de Fourier. [Observar un $(1+3ik)^2$ que aparece].
b] Hallar la solución general a partir de la forma canónica.

a] $\begin{cases}\hat u_{tt}-(1+ik)\,\hat u_t+(2k^2-ik)\,\hat u=0,\ \mu=\frac{1+ik\pm\sqrt{1+6ik-9k^2}}{2}=1+2ik,-ik,\ \hat u(k,t)=p(k)\,e^{2ikt+t}+q(k)\,e^{-ikt}\ \xrightarrow{ci}\\ \hat u(k,0)=\hat f(k),\ \hat u_t(k,0)=-ik\hat f(k)\end{cases}$

$\begin{cases}p+q=\hat f,\ q=\hat f-p\searrow\\ ik(2p-q)+p=-ik\hat f,\ (1+3ik)p=0,\ p(k)=0\nearrow\end{cases}$ $q(k)=\hat f(k)$. $\hat u(k,t)=\hat f(k)\,e^{-ikt}$, $\boxed{u(x,t)=f(x+t)}$.

b] $B^2-4AC=9$ hiperbólica, $\begin{cases}\xi=x+t\\ \eta=x-2t\end{cases}\to\begin{cases}u_t=u_\xi-2u_\eta\\ u_x=u_\xi+u_\eta\end{cases}$, $\begin{cases}u_{tt}=u_{\xi\xi}-4u_{\xi\eta}+4u_{\eta\eta}\\ u_{xt}=u_{\xi\xi}-u_{\xi\eta}-2u_{\eta\eta}\\ u_{xx}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\end{cases}\to$ $u_{\xi\eta}-\frac{1}{3}u_\eta=0$ forma canónica

$u_\eta=v\to v_\xi=\frac{1}{3}v$, $v=p^*(\eta)\,e^{\xi/3}=u_\eta\to u=p(\eta)\,e^{\xi/3}+q(\xi)$, $\boxed{u(x,t)=p(x-2t)\,e^{(x+t)/3}+q(x+t)}$ solución general

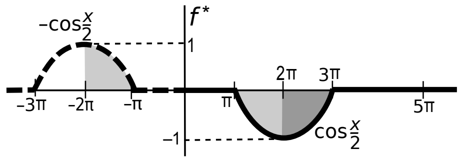
Se puede reescribir $u(x,t)=p^*(x-2t)\,e^t+q(x+t)$.

3. Sea $\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=0,\ x\geq0,\ t\in\mathbf{R}\\ u(x,0)=\begin{cases}\cos\frac{x}{2},\ x\in[\pi,3\pi]\\ 0,\ \text{resto de }[0,\infty)\end{cases},\ u_t(x,0)=\operatorname{sen}x\\ u(0,t)=0\end{cases}$.

a] Escribir la expresión de las extensiones necesarias.
b] Dibujar $u(x,4\pi)$.
c] Dar la expresión de $u(\frac{7\pi}{2},t)$ para $t>7\pi$. [1.9 ptos]

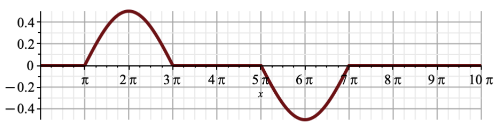
a] f ha de extenderse de forma impar (g ya lo es).

La expresión de la f^* será $f^*(x)=\begin{cases}-\cos\frac{x}{2}\ \text{ si } x\in[-3\pi,-\pi]\\ \cos\frac{x}{2}\ \text{ si } x\in[\pi,3\pi]\\ 0\ \text{ en el resto de }\mathbf{R}\end{cases}$



Y la solución será $u(x,t)=\frac{1}{2}\big[f^*(x+t)+f^*(x-t)\big]+\operatorname{sen}x\operatorname{sen}t$,

pues $\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\operatorname{sen}s\,ds=\frac{1}{2}\big[\cos(x-t)\overset{\|}{+}\cos(x+t)\big]$.



b] $u(x,4\pi)=\frac{1}{2}\big[f^*(x+4\pi)+f^*(x-4\pi)\big]$ será la mitad de la onda inicial trasladada 4π a izquierda y derecha (ya se reflejó la f).

c] Si $t>7\pi$ es $u(\frac{7\pi}{2},t)=\frac{1}{2}\big[f^*(\frac{7\pi}{2}+t)+f^*(\frac{7\pi}{2}-t)\big]+\operatorname{sen}\frac{7\pi}{2}\operatorname{sen}t=\boxed{-\operatorname{sen}t}$, pues f^* está evaluada a la izquierda y a la derecha de la zona en que $f^*\neq0$ [ya pasó la perturbación de la f que iba a velocidad 1].

4. Hallar 4 términos no nulos del desarrollo de una solución de $x^2y''+x(1-x)y'-y=0$ que se anule en $x=0$, dando la regla de recurrencia. Comprobarlos a partir de su solución general: $y=c_1\frac{e^x}{x}+c_2\frac{1+x}{x}$. [1.9 ptos]

$r(r-1)+r-1=0$, $r=\pm1$. Se anula $y_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+1}$. La otra no esá ni acotada: $y_2=\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^{k-1}+d\,y_1\ln x$.

$\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)kc_kx^{k+1}+\sum_{k=0}^{\infty}\big[kc_kx^{k+1}-(k+1)c_kx^{k+2}\big]=0\ \to\ x^1$: $0c_0=0$, c_0 libre. x^2: $2c_1+c_1-c_0=0$, $c_1=\frac{1}{3}c_0$.

x^{k+2}: $(k+2)kc_k-kc_{k-1}=0$, $\boxed{c_k=\frac{c_{k-1}}{k+2}}\to c_2=\frac{c_1}{4}=\frac{1}{12}c_0$, $c_3=\frac{c_2}{5}=\frac{1}{60}c_0$. $\boxed{y_1=x+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{60}x^4+\cdots}$.

La solución general sugiere $y=\frac{e^x-1-x}{x}=\frac{1}{2!}x+\frac{1}{3!}x^2+\frac{1}{4!}x^3+\frac{1}{5!}x^4+\cdots$, que es la y_1 dividida por un factor 2.

ELEGIR entre 5 y 5*

5. Sea $\begin{cases} y''+2y'+\lambda y=0 \\ y'(0)=y'(1)=0 \end{cases}$. **a]** Escribir la ecuación en forma autoadjunta y determinar si $\lambda=-3$ y $\lambda=2$ son o no autovalores, dando la autofunción en caso de serlo. **b]** Probar que $\lambda=0$ sí lo es, dar su autofunción $\{y_0\}$ y calcular el coeficiente de $\{y_0\}$ en el desarrollo de $f(x)=e^{-x}$ en serie de sus autofunciones. [2.4 ptos]

a] En forma autoadjunta $\left[e^{2x}y'\right]'+\lambda e^{2x}y=0$. $\alpha\alpha'=\beta\beta'=q=0 \Rightarrow$ todos los $\lambda\geq 0$ y $\lambda=-3$ no lo puede ser.

O bien $\mu^2+2\mu-3=(\mu-1)(\mu+3)=0$, $y=c_1e^x+c_2e^{-3x}$, $\begin{cases} c_1-3c_2=0 \\ c_1e-3c_2e^{-3}=0 \end{cases}$, $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ e & -3e^{-3} \end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow c_1=c_2=0$.

Si $\lambda=2$: $\mu^2+2\mu+2=0$, $\mu=-1\pm i$, $y=(c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x)\,e^{-x} \rightarrow y'=\left[(c_2-c_1)\cos x-(c_2+c_1)\operatorname{sen}x\right]e^{-x}$.

$\begin{cases} c_1-c_2=0 \searrow \\ \quad -2c_1e^{-1}\operatorname{sen}1=0 \rightarrow c_1=0 \nearrow \end{cases} c_2=0$. Tampoco es autovalor. $\left[\text{Lo son } \lambda_n=1+n^2\pi^2\right]$.

b] $\lambda=0 \rightarrow y=c_1+c_2e^{-2x}$, $y'=-2c_2e^{-2x} \rightarrow \begin{cases} -2c_2=0 \\ -2c_2e^{-2}=0 \end{cases}$. $c_2=0$, $\forall c_1$. Autovalor con autofunción $\boxed{y_0=\{1\}}$.

$\langle y_0,y_0\rangle=\int_0^1 e^{2x}1^2dx=\frac{1}{2}\left(e^2-1\right)$. Luego $c_0=\frac{\langle e^{-x},y_0\rangle}{\langle y_0,y_0\rangle}=\frac{2\int_0^1 e^x dx}{e^2-1}=\frac{2(e-1)}{e^2-1}=\boxed{\frac{2}{e+1}}$. $\left(e^{-x}=\frac{2}{e+1}+\sum_{n=1}^{\infty}c_ny_n\right)$.

5*. Resolver por separación de variables $\begin{cases} u_t-4u_{xx}=\cos\frac{x}{2}\,,\ x\in(0,\pi),\ t>0 \\ u(x,0)=0,\ u_x(0,t)=0,\ u(\pi,t)=\pi \end{cases}$. [La v del cambio es muy sencilla]. [2.4 ptos]

$w=u-\pi \rightarrow \begin{cases} w_t-4w_{xx}=\cos\frac{x}{2} \\ w(x,0)=-\pi,\ w_x(0,t)=w(\pi,t)=0 \end{cases}$. Las autofunciones del homogéneo las da $\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X'(0)=X(\pi)=0 \end{cases}$, $X_n=\left\{\cos\frac{(2n-1)x}{2}\right\}$, $n=1,2,\ldots$

Probamos, pues: $w(x,t)\overset{??}{=}\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\cos\frac{(2n-1)x}{2} \xrightarrow{EDP} \sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n'+(2n-1)^2T_n\right]\cos\frac{(2n-1)x}{2}=\cos\frac{x}{2}$ (ya desarrollada)

y además $w(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\cos\frac{(2n-1)x}{2}=-\pi \rightarrow T_n(0)=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\pi\cos\frac{(2n-1)x}{2}\,dx=\frac{4(-1)^n}{2n-1}\equiv b_n$.

Hay que revolver una EDO no homogénea e infinitas homogéneas:

$\begin{cases} T_1'=-T_1+1 \\ T_1(0)=-4 \end{cases} \rightarrow T_1=Ce^{-t}+1$ (y_p a ojo) $\xrightarrow{d.i.} T_1=1-5e^{-t} \searrow$

$\begin{cases} T_n'=-(2n-1)^2T_n \\ T_n(0)=b_n \end{cases} \rightarrow T_n=Ce^{-(2n-1)^2t} \xrightarrow{d.i.} C=b_n \rightarrow \boxed{u=\pi+\left(1-5e^{-t}\right)\cos\frac{x}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{2n-1}e^{-(2n-1)^2t}\cos\frac{(2n-1)x}{2}}$.

ELEGIR entre 6 y 6* (ecuaciones de Laplace en el plano)

6. Resolver $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0,\ 0<x<1,\ 0<y<\frac{\pi}{2} \\ u(x,0)=u\left(x,\frac{\pi}{2}\right)=0,\ u_x(0,y)=u_x(1,y)=2\operatorname{sen}2y \end{cases}$. [1.9 ptos]

El formulario dice que separando variables aparecen $\begin{cases} Y''+\lambda Y=0 \\ Y(0)=Y(\pi/2)=0 \end{cases}$, $\lambda_n=4n^2$, $Y_n=\left\{\operatorname{sen}2ny\right\}$, $n=1,2,\ldots$

y también $X''-\lambda X=0 \xrightarrow{\lambda=4n^2} X=c_ne^{2nx}+k_ne^{-2nx}$. Imponemos los dos últimos datos de contorno a la serie:

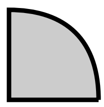
$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[c_ne^{2nx}+k_ne^{-2nx}\right]\operatorname{sen}2ny \rightarrow u_x(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}2n\left[c_ne^{2nx}-k_ne^{-2nx}\right]\operatorname{sen}2ny \xrightarrow{x=0,1} 2\operatorname{sen}2y.$$

Si $n>1$ es claro que serán $c_n=k_n=0$. Y para $n=1$ es: $\begin{matrix} 0\nearrow & c_1-k_1=1,\ c_1=1+k_1\downarrow & & c_1=\frac{1}{e^2+1} \\ 1\searrow & c_1e^2-k_1e^{-2}=1 & e^2+k_1[e^2-e^{-2}]=1,\ k_1\overset{\uparrow}{=}-\frac{e^2}{e^2+1} \end{matrix}$.

La solución única es, pues: $\boxed{u(x,y)=\frac{e^{2x}-e^{2-2x}}{e^2+1}\operatorname{sen}2y}$.

6*. Resolver $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=r^2\operatorname{sen}2\theta,\ r<1,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2} \\ u_r(1,\theta)=0,\ u(r,0)=u\left(r,\frac{\pi}{2}\right)=0 \end{cases}$. [1.9 ptos]

$u=R\Theta$ en homogénea $\rightarrow \Theta''+\lambda\Theta=0,\ \Theta(0)=\Theta\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \rightarrow \Theta_n=\left\{\operatorname{sen}2n\theta\right\}$, $n=1,2,\ldots$ $\left[\text{y además } r^2R''+rR'-\lambda R=0\right]$.



Llevamos a la EDP la serie $u(r,\theta)\overset{??}{=}\sum_{n=1}^{\infty}R_n(r)\operatorname{sen}2n\theta$: $\sum_{n=1}^{\infty}\left[R_n''+\frac{1}{r}R_n'-\frac{4n^2}{r^2}R_n\right]\operatorname{sen}2n\theta=r^2\operatorname{sen}2\theta$.
(ya desarrollada)

Falta el dato: $u_r(1,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}R_n'(1)\operatorname{sen}2n\theta=0 \rightarrow R_n'(1)=0$. Y utilizar la acotación de las soluciones.

Es claro que $R_n\equiv 0$ si $n>1$ (son soluciones de los problemas homogéneos y el problema dado tiene solución única).

Sólo es no nula R_1: $\begin{cases} r^2R_1''+rR_1'-4R_1=r^4,\ R_p\overset{\bullet}{=}Ar^4 \\ R_1 \text{ ac. en } 0,\ R_1'(1)=0 \end{cases} \rightarrow R_1=c_1r^2+c_2r^{-2}+\frac{1}{12}r^4 \rightarrow \boxed{u(r,\theta)=\frac{1}{12}\left(r^4-2r^2\right)\operatorname{sen}2\theta}$.

- $12A+4A-4A=1$, mejor que con la f.v.c.: $|W|=-4r^{-1}$, $R_p=-r^{-2}\int\frac{r^5}{4}+r^2\int\frac{r}{4}=\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{24}\right)r^4$.