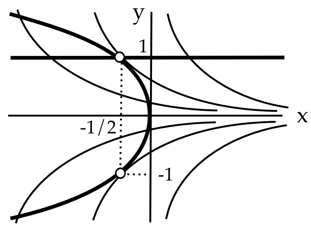
Ecuaciones Diferenciales II (C - piloto) **Soluciones del parcialillo 1 (6/3/08)**

1. Sea [E$_1$] $y^3u_y-u_x=2y^2u$. **a]** Hallar la solución general de [E$_1$] tomando i) $\eta=y$, ii) $\eta=x$.
b] Resolver [E$_1$] con el dato inicial $u(x,1)=2x$, estudiando la unicidad de la solución.
c] ¿En qué puntos del plano es tangente la curva $2x=-y^2$ a alguna característica de [E$_1$]?

a] $\frac{dy}{dx}=-y^3 \to \int \frac{2dy}{y^3}=-\frac{1}{y^2}=-2x+K \to\ 2x-\frac{1}{y^2}=K$ características.



i) $\begin{cases}\xi=2x-\frac{1}{y^2}\\ \eta=y\end{cases} \to\ y^3u_\eta=2y^2u\ ,\ u_\eta=\frac{2}{\eta}u\ \to\ u=p(\xi)\eta^2=p(2x-\frac{1}{y^2})y^2$.

ii) $\begin{cases}\xi=2x-\frac{1}{y^2}\\ \eta=x\end{cases} \to -u_\eta=2y^2u\ ,\ u_\eta=-\frac{2u}{2\eta-\xi}\ \to\ u=\frac{p(\xi)}{2\eta-\xi}=p(2x-\frac{1}{y^2})y^2$.

(con otros múltiplos de ξ puede salir una expresión algo diferente)

b] $u(x,1)=2x\ \to\ p(2x-1)=2x\ ,\ p(v)=v+1\ \to\ \boxed{u\,=\,2xy^2+y^2-1}$,

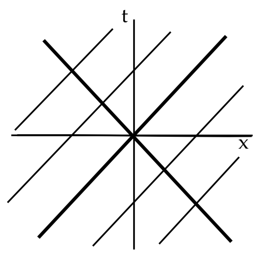
solución única porque x queda determinada de forma única en función de v , o porque la recta $y=1$ no es tangente en ningún punto a las características, como prueba el dibujo o la expresión:

$$\Delta=1\cdot 1^3-0\cdot(-1)=1\neq 0\ .$$

c] $G=\left(-\frac{y^2}{2},y\right)\ \to\ \Delta=(-y)\,y^3-1\,(-1)=1-y^4=0\ \to\ y=\pm 1 \to \boxed{\left(-\frac{1}{2},1\right)}$ y $\boxed{\left(-\frac{1}{2},-1\right)}$.

2. Sea [E$_2$] $u_{tt}+2u_{xt}+u_{xx}+u=0$. **a]** Escribirla en forma canónica y hallar su solución general.
b] Hallar (y simplificar) la solución de [E$_2$] que satisface $u(x,-x)=0\,,\,u_t(x,-x)=1$.
c] Escribir una solución de [E$_2$], distinta de la $u\equiv 0$, que cumpla $u(x,x)=u_t(x,x)=0$.

a] De coeficientes constantes y parabólica. $x-\frac{B}{2A}t=x-t=K$ características.



$$\begin{cases}\xi=x-t\\ \eta=t\end{cases} \to \begin{cases}u_t\,=\,-u_\xi+u_\eta\\ u_x\,=\,u_\xi\end{cases},\ \begin{cases}u_{tt}\,=\,u_{\xi\xi}-2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\\ u_{xt}\,=\,-u_{\xi\xi}+u_{\xi\eta}\\ u_{xx}\,=\,u_{\xi\xi}\end{cases} \to\ u_{\eta\eta}+u\,=\,0$$

$$\to\ u=p(\xi)\cos\eta+q(\xi)\,\mathrm{sen}\,\eta\ ,\ \boxed{u\,=\,p(x-t)\cos t+q(x-t)\,\mathrm{sen}\,t}$$

[Eligiendo $\eta=x$ se llega a $u_{\eta\eta}+u\,=\,0\ \to\ u\,=\,p^*(x-t)\cos x+q^*(x-t)\,\mathrm{sen}\,x$].

b] $u_t(x,t)\,=\,\left[q(x-t)-p'(x-t)\right]\cos t-\left[p(x-t)+q'(x-t)\right]\mathrm{sen}\,t$

$$\begin{cases}p(2x)\cos x-q(2x)\,\mathrm{sen}\,x=0\ _{[\bullet]}\ \to [2p'(2x)-q(2x)]\cos x-[p(2x)+2q'(2x)]\,\mathrm{sen}\,x=0\\ [q(2x)-p'(2x)]\cos x+[p(2x)+q'(2x)]\,\mathrm{sen}\,x=1\end{cases}$$

$\xrightarrow{1^a+2\times 2^a}\ q(2x)\cos x+p(2x)\,\mathrm{sen}\,x=2\ _{[\circ]}$; $\begin{array}{l}[\bullet]\times\cos+[\circ]\times\mathrm{sen}\to p(2x)=2\,\mathrm{sen}\,x\to p(v)=2\,\mathrm{sen}\,\frac{v}{2}\\ [\circ]\times\cos-[\bullet]\times\mathrm{sen}\to q(2x)=2\cos x\to p(v)=2\cos\frac{v}{2}\end{array}$

$$\to\ u=2\,\mathrm{sen}\,\tfrac{x-t}{2}\cos t+2\cos\tfrac{x-t}{2}\,\mathrm{sen}\,t=\boxed{2\,\mathrm{sen}\,\tfrac{x+t}{2}}$$ (solución única).

c] $\begin{cases}p(0)\cos x+q(0)\,\mathrm{sen}\,x=0\ \to\ p(0)=q(0)=0\\ \left[q(0)-p'(0)\right]\cos x-\left[p(0)+q'(0)\right]\mathrm{sen}\,x=0\end{cases} \to\ p(0)=p'(0)=q(0)=q'(0)=0\ \to$

Por ejemplo, podemos tomar $p(v)=v^2$ y $q(v)\equiv 0\ \to\ \boxed{u\,=\,(x-t)^2\cos t}$,

o, para usar sólo cosenos, $p(v)=1-\cos v\,,\ q(v)\equiv 0\ \to\ \boxed{u\,=\,[1-\cos(x-t)]\cos t}$ ...

Ecuaciones Diferenciales II (C - piloto) **Soluciones del parcialillo 2 (1/4/08)**

1. Sea $\begin{array}{l} y''+\lambda y=0 \\ y(0)=y'(\pi)=0 \end{array}$. **a]** Probar que sus autovalores y autofunciones $\{y_n\}$ coinciden con lo escrito en el formulario.

b$_1$] Desarrollar $f(x)=\begin{cases} x\,, & 0\le x<\frac{\pi}{2} \\ 0\,, & \frac{\pi}{2}\le x\le\pi \end{cases}$ en serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x)$, escribiendo en particular c_1 y c_2 (evaluando las funciones trigonométricas). **b$_2$]** ¿Cuánto vale $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n y_n(\frac{\pi}{2})$? Deducir de ello, y de que $\arctan 1=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots$, el valor de $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$.

a] Como $\alpha\alpha'=\beta\beta'=0$, $q(x)\equiv 0$, nos podemos limitar a los $\lambda\ge 0$.

$$\lambda=0:\ y=c_1+c_2x\,,\ \left.\begin{array}{l} y(0)=c_1=0 \\ y'(1)=c_2=0 \end{array}\right\}\to y\equiv 0\,.\ \lambda=0 \text{ no autovalor.}$$

$$\lambda>0:\ y=c_1\cos wx+c_2\,\mathrm{sen}\,wx\,,\ \left.\begin{array}{l} y(0)=c_1=0\downarrow \\ y'(\pi)=wc_2\cos w\pi=0 \end{array}\right\}\to \begin{array}{l}\lambda_n=\frac{(2n-1)^2}{2^2},\ y_n=\left\{\mathrm{sen}\,\frac{(2n-1)x}{2}\right\} \\ n=1,2,\ldots\,. \end{array}$$

b$_1$] En el formulario tenemos escrito el valor de $\langle y_n,y_n\rangle=\frac{\pi}{2}$. Por tanto:

$$c_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\frac{(2n-1)x}{2}\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\,\mathrm{sen}\frac{(2n-1)x}{2}\,dx$$

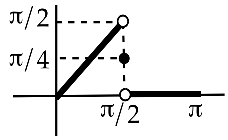
$$=-\frac{4x\cos\frac{(2n-1)x}{2}}{\pi(2n-1)}\Big]_0^{\pi/2}+\frac{4}{\pi(2n-1)}\int_0^{\pi/2}\cos\frac{(2n-1)x}{2}\,dx=\frac{8\,\mathrm{sen}\frac{(2n-1)\pi}{4}}{\pi(2n-1)^2}-\frac{2\cos\frac{(2n-1)\pi}{4}}{2n-1}\,.$$

En particular, $c_1=\frac{4\sqrt{2}}{\pi}-\frac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}\left(\frac{4}{\pi}-1\right)$ y $c_2=\frac{4\sqrt{2}}{9\pi}+\frac{\sqrt{2}}{3}=\sqrt{2}\left(\frac{4}{9\pi}+\frac{1}{3}\right)$.

b$_2$] La serie converge hacia $f(x)$ para los $x\in(0,\pi)$ en los que f es continua (en los extremos nosotros no lo sabemos), y hacia $\frac{1}{2}[f(x^+)+f(x^-)]$ en los que f es discontinua. Por tanto:

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\,\mathrm{sen}\,\frac{(2n-1)\pi}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{8\,\mathrm{sen}^2(\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4})}{\pi(2n-1)^2}-\frac{\mathrm{sen}\,\frac{(2n-1)\pi}{2}}{2n-1}\Big]=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}-\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi}{4}\Big[\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\Big]=\frac{\pi^2}{8}.$$



2. Discutir, según los valores de la constante a, cuántas soluciones tiene el problema:

$$\begin{cases} x^2y''-3xy'+3y=a-x^2 \\ y(1)=y'(1)\,,\ y(2)=2y'(2) \end{cases}$$

Veamos primero cuántas soluciones tiene el problema homogéno. La ecuación es de Euler.

$$\lambda(\lambda-1)-3\lambda+3=0\to\lambda=1,3\to y=c_1x+c_2x^3\to\begin{cases} c_1+c_2=c_1+3c_2 \\ 2c_1+8c_2=2c_1+24c_2 \end{cases}\to\ \begin{array}{r} c_2=0 \text{ y} \\ c_1 \text{ cualquiera.}\end{array}$$

Existen infinitas soluciones $\{x\}$ del homogéneo y, por tanto, el no homogéneo **no tiene solución única para ningún** a. Nos falta estudiar cuándo tiene infinitas o ninguna.

Para ello escribimos la ecuación en forma autoadjunta:

$$y''-\frac{3}{x}y'+\frac{3}{x^2}y=\frac{a}{x^2}-1\ \xrightarrow{\times e^{-\int 3/x}}\ \Big[\frac{y'}{x^3}\Big]'+\frac{3}{x^5}y=\frac{a}{x^5}-\frac{1}{x^3}=f(x)\,.$$

$$\int_1^2 f(x)\,y_h(x)\,dx=\int_1^2\Big[\frac{a}{x^4}-\frac{1}{x^2}\Big]dx=\Big[\frac{1}{x}-\frac{a}{3x^3}\Big]_1^2=\frac{1}{2}-1-\frac{a}{24}+\frac{a}{3}=\frac{7a}{24}-\frac{1}{2}=0 \text{ si } \boxed{a=\frac{12}{7}}\,.$$

Si $a=\frac{12}{7}$ el problema **tiene infinitas soluciones** y para cualquier otro a **no tiene solución**.

[Directamente. Como 0 y 2 no son 'autovalores' hay $y_p=A+Bx^2\to y=c_1x+c_2x^3+\frac{a}{3}+x^2$.
Los datos no se pueden cumplir para $a\neq\frac{12}{7}$ y para ese valor es $y=c_1x-\frac{3x^3}{14}+\frac{4}{7}+x^2$].

1. Resolver $\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0\,,\ x\in(0,1),\ t>0 \\ u(x,0)=0\,,\ u_x(0,t)=0,\ u_x(1,t)=2e^{-t} \end{cases}$ y hallar el $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t)$.

[Simplificaría los cálculos hallar una $v(x,t)=X(x)T(t)$ cumpliendo tanto la ecuación como las condiciones de contorno].

Conocemos las EDOs que aparecen al separar variables $u=XT$ en la EDP: $\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ T'+\lambda T=0 \end{cases}$ [•]

Necesitamos una v que cumpla las condiciones de contorno. Lo más habitual es probar rectas (no hay en este caso) y si no parábolas (en x):

$$v=A(t)x+B(t)x^2 \overset{c.c.}{\to} v=x^2e^{-t}\,.$$

Con ella conseguimos las condiciones homogéneas, pero la ecuación resulta ser no homogénea:

$$w=u-v \to [\mathrm{P}] \begin{cases} w_t - w_{xx} = (x^2+2)e^{-t} \\ w(x,0)=-x^2\,,\ w_x(0,t)=w_x(1,t)=0 \end{cases}$$

Buscamos una v mejor. Como e^{-t} está asociada a $\lambda=1$ en [•], sabemos que su producto por soluciones de $X''+X=0$ cumple la ecuación:

$$v=(c_1\cos x+c_2\operatorname{sen} x)\,e^{-t} \overset{c.c.}{\to} v^*=-\tfrac{2\cos x}{\operatorname{sen}1}\,e^{-t}\,.$$

$$w=u-v^* \to [\mathrm{P}^*] \begin{cases} w_t - w_{xx} = 0 \\ w(x,0)=\frac{2\cos x}{\operatorname{sen}1}\,,\ w_x(0,t)=w_x(1,t)=0 \end{cases}$$

$$X''+\lambda X\,,\ X'(0)=X'(1)=1 \to \lambda_n=n^2\pi^2,\ X_n=\{\cos n\pi x\},\ n=0,1,\dots \to T_n=\{e^{-n^2\pi^2t}\} \to$$

$$w=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_nT_nX_n \overset{d.i.}{\to} \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x=\frac{2\cos x}{\operatorname{sen}1} \ \to\ \frac{a_0}{2}=\int_0^1\frac{2\cos x}{\operatorname{sen}1}\,dx=2\,,$$

$$a_n=\frac{4}{\operatorname{sen}1}\int_0^1\cos x\cos n\pi x\,dxx=\frac{2}{\operatorname{sen}1}\int_0^1[\cos(n\pi+1)x+\cos(n\pi-1)]\,dx=\frac{2(-1)^n}{n\pi+1}-\frac{2(-1)^n}{n\pi-1}=\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2-1}$$

$$\boxed{u=2-\frac{2\cos x}{\operatorname{sen}1}\,e^{-t}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2-1}\,e^{-n^2\pi^2t}\cos n\pi x \underset{t\to\infty}{\to} 2}$$

[aislado a la izquierda y metemos cada vez menos calor por la derecha]

Más largo es hallar la solución de [P]: $w=T_0(t)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}T_n(t)\cos n\pi x \ \to$

$$T_0'+\sum_{n=1}^{\infty}[T_n'+n^2\pi^2T_n]\cos n\pi x=e^{-t}(x^2+2)=\tfrac{7}{3}e^{-t}+e^{-t}\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cos n\pi x\,,$$

pues $\int_0^1(x^2+2)\,dx=\frac{7}{3}$, y siendo $B_n=2\int_0^1(x^2+2)\cos n\pi x\,dx=-\frac{4}{n\pi}\int_0^1 x\operatorname{sen} n\pi x\,dx=\frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2}$.

Como $w(x,0)=T_0(0)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}T_n(0)\cos n\pi x=-x^2=-\frac{1}{3}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}B_n\cos n\pi x$, hay que resolver:

$$\begin{cases} T_0'=\frac{7}{3}e^{-t} \\ T_0(0)=-\frac{1}{3} \end{cases} \to T_0=2-\tfrac{7}{3}e^{-t}\,,\quad \begin{cases} T_n+n^2\pi^2T_n=B_ne^{-t} \\ T_n(0)=-B_n \end{cases} \to T_n=Ce^{-n^2\pi^2t}+T_{np}$$

$$T_{np}=Ae^{-t} \to T_{np}=\frac{B_n}{n^2\pi^2-1}e^{-t} \overset{d.i.}{\to} T_n=\frac{B_n[e^{-t}-n^2\pi^2e^{-n^2\pi^2t}]}{n^2\pi^2-1} \to$$

$$\boxed{u=2+(x^2-\tfrac{7}{3})\,e^{-t}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\left[\frac{e^{-t}}{n^2\pi^2}-e^{-n^2\pi^2t}\right]}{n^2\pi^2-1}\cos n\pi x \underset{t\to\infty}{\to} 2}$$

2. Hallar (en términos de funciones elementales) una solución acotada de:

$$\begin{cases} u_{rr}+\frac{u_r}{r}+\frac{u_{\theta\theta}}{r^2}+4u=0\,,\ r<1\,,\ 0<\theta<\pi \\ u(1,\theta)=\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\,,\ u(r,0)=u_\theta(r,\pi)=0 \end{cases}$$

[Separando variables y haciendo $s=2r$ aparece una ecuación cuya solución está en el formulario].

[Tanto cuidado con el lenguaje en el enunciado se debe a que no tenemos grantizada ni la unicidad].

Separando variables: $u=R\Theta \to R''\Theta+\frac{R'\Theta}{r}+\frac{R\Theta''}{r^2}+4R\Theta=0 \to \frac{r^2R''}{R}+\frac{rR'}{R}+4r^2=-\frac{\Theta''}{\Theta}=\lambda \to$

$\begin{cases} \Theta''+\lambda\Theta=0 \\ \Theta(0)=\Theta'(\pi)=0 \end{cases} \to \lambda_n=\frac{(2n-1)^2}{4},\ \Theta_n=\left\{\operatorname{sen}\frac{2n-1}{2}\theta\right\},\ n=1,2,\dots$ y $r^2R''+rR'+(4r^2-\lambda)R=0$.

Esta ecuación para la R se parece mucho a la de Bessel. Para quitar el 4 que sobra, como se hace habitualmente, se hace el cambio:

$$s=\sqrt{4}\,r=2r \;\to\; R'=2\frac{dR}{ds}\,,\ R''=4\frac{d^2R}{ds^2} \;\to\; s^2\frac{d^2R}{ds^2}+s\frac{dR}{ds}+(s^2-\lambda)R=0\,,$$

que para los λ_n de arriba es Bessel con $p=n-\frac{1}{2}$, cuyas soluciones acotadas en $r=0$ son las $\left\{J_{n-\frac{1}{2}}(s)\right\}=\left\{J_{n-\frac{1}{2}}(2r)\right\}=R_n$ (todas se pueden escribir en términos de funciones elementales).

Probamos pues: $u=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n\,J_{n-\frac{1}{2}}(2r)\operatorname{sen}\frac{2n-1}{2}\theta$, a la que sólo le falta satisfacer:

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n\,J_{n-\frac{1}{2}}(2)\operatorname{sen}\frac{2n-1}{2}\theta=\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \;\to\; c_1=\frac{1}{J_{\frac{1}{2}}(2)} \text{ y los demás } c_n=0 \;\to\; u=\frac{1}{J_{\frac{1}{2}}(2)}\,J_{\frac{1}{2}}(2r)\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\,.$$

Podemos escribir la solución anterior en términos de funciones elementales.

Como (salvo constante) $J_{\frac{1}{2}}(2r)=\frac{\operatorname{sen}2r}{\sqrt{2r}}$ $\left[\frac{\cos 2r}{\sqrt{2r}}\right.$ no está acotada en $\left.r=0\right]$ y $J_{\frac{1}{2}}(2)=\frac{\operatorname{sen}2}{\sqrt{2}}$,

$$\boxed{u(r,\theta)=\frac{\operatorname{sen}2r}{\operatorname{sen}2\sqrt{r}}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}$$

Comprobemos el resultado, ya que es tan corto. Los datos adicionales, casi a ojo:

$u(1,\theta)=\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$, $u(r,0)=0$ $[\operatorname{sen}0=0]$, $u_\theta(r,\pi)=0$ $[\cos\frac{\pi}{2}=0]$.

Y la ecuación:

$$\left(r^{-1/2}\operatorname{sen}2r\right)'=-\tfrac{1}{2}r^{-3/2}\operatorname{sen}2r+2r^{-1/2}\cos 2r\,,$$

$$\left(r^{-1/2}\operatorname{sen}2r\right)''=\tfrac{3}{4}r^{-5/2}\operatorname{sen}2r-2r^{-3/2}\cos 2r-4r^{-1/2}\operatorname{sen}2r \;\to$$

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}{\operatorname{sen}2}\Big(\left[\tfrac{3}{4}r^{-5/2}-4r^{-1/2}-\tfrac{1}{2}r^{-5/2}-\tfrac{1}{4}r^{-5/2}+4r^{-1/2}\right]\operatorname{sen}2r+\left[-2r^{-3/2}+2r^{-3/2}\right]\cos 2r\Big)=0\,.$$

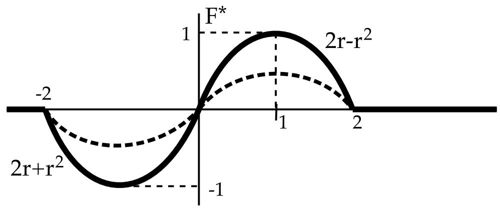
1. Sean $[\mathrm{P}_v]\begin{cases} v_{tt}-v_{rr}=0\,,\ r\geq 0,\ t\in\mathbf{R} \\ v(r,0)=\begin{cases} 2r-r^2,\ r\in[0,2] \\ 0 \text{ en el resto}\end{cases}\equiv F(r) \\ v_t(r,0)=v(0,t)=0\end{cases}$ y $[\mathrm{P}_u]\begin{cases} u_{tt}-u_{rr}-\frac{2}{r}u_r=0\,,\ r\geq 0,\ t\in\mathbf{R} \\ u(r,0)=\begin{cases} 2-r\,,\ r\in[0,2] \\ 0 \text{ en el resto}\end{cases}\equiv f(r) \\ u_t(r,0)=0\end{cases}$.

a] Hallar $v(6,3)$, $v(2,3)$ y $u(4,3)$. **b]** Dibujar y hallar la expresión de $v(r,3)$.
c] Hallar el valor máximo de $u(r,3)$ $\left[\sqrt{15}\approx 3.873\right]$.

Sabemos que haciendo $v=ru$ se transforma P_u en P_v y que las soluciones de P_v vienen dadas por

$$\begin{cases} v_{tt}-v_{rr}=0\,,\ x,t\in R \\ v(r,0)=F^*(r)\,,\ v_t(r,0)=0\end{cases}$$

con F^* extensión impar de F respecto del origen.



a] La fórmula de D'Alembert nos dice que: $v(r,t)=\frac{1}{2}\left[F^*(r+t)+F^*(r-t)\right]$. Por tanto:

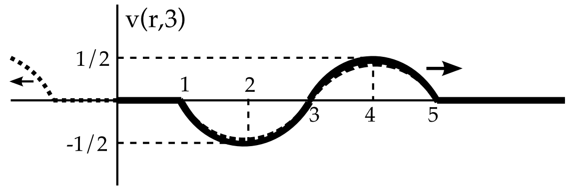
$$v(6,3)=\tfrac{1}{2}\left[F^*(9)+F^*(3)\right]=\tfrac{1}{2}\left[F(9)+F(3)\right]=\boxed{0}$$ (ya nos lo diría el dominio de influencia).

$$v(2,3)=\tfrac{1}{2}\left[F^*(5)+F^*(-1)\right]\underset{\substack{\uparrow \\ F^*\text{ impar}}}{=}\tfrac{1}{2}\left[F(5)-F(1)\right]=\tfrac{1}{2}[0-1]=\boxed{-\tfrac{1}{2}}\,.$$

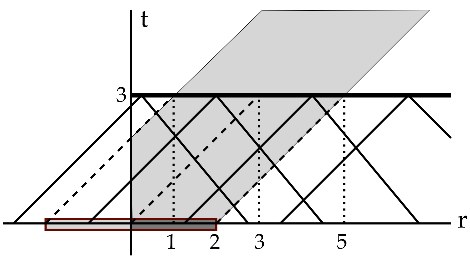
Y como $u(r,t)=\frac{v(r,t)}{r}$, es: $u(4,3)=\frac{1}{2\cdot 4}\left[F^*(7)+F^*(1)\right]=\frac{1}{8}\left[F(7)+F(1)\right]=\frac{1}{8}[0+1]=\boxed{\frac{1}{8}}\,.$

[Hallar este valor con Poisson-Kirchoff sería complicado, pues habría que integrar $2-r$ sobre la intersección con la esfera $r\leq 2$ de la superficie esférica de radio 3 centrada en un punto situado a distancia 4 del origen].

b] Para dibujar $v(r,3)$ basta trasladar la onda viajera $\frac{1}{2}F^*(r)$ tres unidades a izquierda y derecha y sumar las gráficas resultantes en $r\geq 0$.
La que va hacia la izquierda se sale de $[0,\infty)$ y sólo queda la mitad de la F^* trasladada a $[1,5]$:



Para dar la expresión analítica de $v(r,3)$ debemos distinguir 4 posibilidades, como se puede ver en el dibujo de los dominios de dependencia de la derecha.



$$v(r,3)=\begin{cases} 0 \text{ si } x\in[0,1] \\ (r-3)+\frac{1}{2}(r-3)^2=\frac{1}{2}(r-1)(r-3) \text{ si } r\in[1,3] \\ (r-3)-\frac{1}{2}(r-3)^2=-\frac{1}{2}(r-3)(r-5) \text{ si } r\in[3,5] \\ 0 \text{ si } x\in[5,\infty)\end{cases}$$

[Coherente con los dos primeros valores de **a]** y el dibujo].

c] La gráfica de $u(r,3)=\frac{v(r,3)}{r}$ tendrá su máximo en un punto de $[3,5]$ donde su expresión es:

$$\tfrac{1}{2}\left(-r+8-\tfrac{15}{r}\right)\xrightarrow{\frac{d}{dr}}\tfrac{1}{2}\left(-1+\tfrac{15}{r^2}\right)=0\to r=\sqrt{15}\ (\text{algo}<4)\to \text{Valor máximo}=\boxed{4-\sqrt{15}}\,.$$

[Este valor (≈ 0.127) es un poquito mayor que el valor calculado en **a]** de $u(4,3)=1/8=0.125$. Al dividir por r el máximo de v se traslada un poquito a la izquierda de 4 y vale un poco más que el valor ahí].

2. Sea $\begin{cases} u_t - u_{xx} = (x^2-1)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \,,\ x\in\mathbf{R}\,,\ t>0 \\ u(x,0)=0\,,\ u \text{ acotada} \end{cases}$ $\left[\begin{array}{c}\text{El término no homogéneo es la} \\ \text{derivada segunda de } \mathrm{e}^{-x^2/2}\end{array}\right].$

Hallar su solución (en términos de funciones elementales) y el $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t)$:

a] Aplicando la transformada de Fourier directamente.

b] Haciendo un cambio para convertir la ecuación en homogénea y evaluando la integral del formulario mediante un cambio de variable.

a] Como $\mathfrak{I}[f''] = -k^2 \hat{f}$ y $\mathfrak{I}[\mathrm{e}^{-ax^2}] = \frac{1}{\sqrt{2a}}\,\mathrm{e}^{-k^2/4a} \xrightarrow{a=1/2} \mathrm{e}^{-k^2/2}$:

$$\begin{cases} \hat{u}_t + k^2\hat{u} = -k^2 \mathrm{e}^{-k^2/2} \\ \hat{u}(k,0)=0 \end{cases} \underset{x_p \text{ a ojo}}{\to} \hat{u}(k,t) = p(k)\,\mathrm{e}^{-k^2 t} - \mathrm{e}^{-k^2/2} \underset{d.i.}{\to} \hat{u}(k,t) = \mathrm{e}^{-k^2/2}\,\mathrm{e}^{-k^2 t} - \mathrm{e}^{-k^2/2}$$

$$\to\ u(x,t) = \mathfrak{I}^{-1}\big[\mathrm{e}^{-k^2(t+\frac{1}{2})}\big] - \mathrm{e}^{-x^2/2} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{1+2t}}\,\mathrm{e}^{-x^2/(4t+2)} - \mathrm{e}^{-x^2/2}} \underset{t\to\infty}{\to} -\mathrm{e}^{-x^2/2} \quad (\bullet)$$

b] Con la pista dada es claro que $v = -\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ satisface la ecuación. Haciendo $w = u - v$:

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} = 0 \\ u(x,0) = \mathrm{e}^{-x^2/2} \end{cases} \xrightarrow{\text{formulario}} w = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-s^2/2}\,\mathrm{e}^{-(x-s)^2/4t} ds\,.$$

Para evaluar la integral completamos cuadrados buscando $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-p^2} dp = \sqrt{\pi}$:

$$-\frac{(2t+1)s^2 - 2xs + x^2}{4t} = -\frac{\Big[\sqrt{2t+1}\,s - \frac{x}{\sqrt{2t+1}}\Big]^2}{\big(2\sqrt{t}\,\big)^2} - \frac{x^2}{4t} + \frac{x^2}{4t(2t+1)} = -\Big[\frac{\sqrt{2t+1}\,s}{2\sqrt{t}} - \frac{x}{2\sqrt{t}\sqrt{2t+1}}\Big]^2 - \frac{x^2}{4t+2}$$

Llamando p al último corchete, con lo que $dp = \frac{\sqrt{2t+1}}{2\sqrt{t}} ds$, tenemos:

$$w = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{2t+1}}\,\mathrm{e}^{-x^2/(4t+2)} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-p^2} dp = \frac{1}{\sqrt{2t+1}} \mathrm{e}^{-x^2/(4t+2)}\,.$$

Y, deshaciendo el cambio, llegamos a la solución de arriba.

$(\bullet)$ [Estamos todo el rato sacando calor en $[-1,1]$ y dándolo (menos cantidad según nos alejamos) fuera de ese intervalo. Las temperaturas acaban siendo negativas y menores cerca del origen].