Ecuaciones Diferenciales II (C - piloto) **Parcialillo 1 (5/3/09)**

[Nota ≥ 0.7 se suma al final de febrero; suspenso ≥ 0.4 suma 0.3 ó 0.4 puntos al final de febrero].

1. Sea (E) $(y-2x)\,u_y+u_x=y$. **a]** Resolver (E) con el dato $u(0,y)=y-2$. ¿Es única la solución?
b] Imponer a (E) unos datos de Cauchy para los que no tenga solución. [0.7 puntos]

2. Sea (e) $u_{tt}-u_{xx}+Du_t+Eu_x=4$, con D y E constantes. [0.7 puntos]
a] Escribir (e) en forma canónica. ¿Para qué relaciones entre D y E es esta forma resoluble?
b] Para $D=-2$, $E=2$, hallar la o las soluciones de (e) con los datos: $u(0,t)=e^{2t}$, $u_x(0,t)=2$.

Ecuaciones Diferenciales II (C - piloto) **Parcialillo 23 (2/4/09)**

[Nota ≥ 1 se suma al final de febrero; suspenso ≥ 0.6 suma 0.4 ó 0.5 puntos al final de febrero].

1. Sea $\begin{cases} x^2y''-ay=3x-4 \\ y(1)+y'(1)=y(2)=0 \end{cases}$. Precisar cuántas soluciones tiene para: i) $a=2$, ii) $a=0$.
[Ayuda: $\ln 2$ es un número irracional]. [0.6 puntos]

2. Resolver $\begin{cases} u_t-u_{xx}=e^{-2t}\cos x,\ x\in(0,\frac{\pi}{2}),\ t>0 \\ u(x,0)=1,\ u_x(0,t)=0,\ u(\frac{\pi}{2},t)=1 \end{cases}$. [0.6 puntos]

3. Sea $f(x)=\begin{cases} 1,\ 0\leq x\leq 1 \\ 0,\ 1<x\leq 2 \end{cases}$. **a]** Hallar su desarrollo en serie de Fourier $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{2}$.
¿Cuánto debe sumar la serie para i) $x=1$, ii) $x=2$? Comprobarlo sustituyendo en la serie.
b] Resolver $\begin{cases} u_t-u_{xx}+\frac{u}{t+1}=0,\ x\in(0,2),\ t>0 \\ u(x,0)=f(x),\ u_x(0,t)=u_x(2,t)=0 \end{cases}$ por separación de variables. [0.8 puntos]

Ecuaciones Diferenciales II (C - piloto) **Parcialillo 34 (26/5/09)**

[Nota ≥ 1.3 se suma al final de febrero; suspenso ≥ 0.8 suma 0.5, 0.6 ó 0.7 puntos al final de febrero].

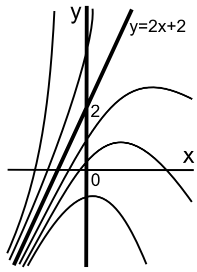
1. Resolver el problema plano $\begin{cases} \Delta u=9r,\ 1<r<2 \\ u(1,\theta)=2\,\mathrm{sen}^2\theta,\ u_r(2,\theta)=0 \end{cases}$. [0.9 puntos]

2. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0,\ x\geq 0, t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=e^{-x},\ u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=e^{-t} \end{cases}$. **a]** Hallar $u(2,3)$. [Ayuda: una buena $v(x,t)$ sale de separar variables y tomar $\lambda=-1$]. [1.1 puntos]
Elegir entre: **b$_1$]** Hallar $u(x,t)$, $x,t\geq 0$.
b$_2$] Dibujar aproximadamente $u(x,3)$.

3. Resolver con transformadas de Fourier $\begin{cases} u_{tt}-3u_{xt}+2u_{xx}=0,\ x,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=f(x),\ u_t(x,0)=0 \end{cases}$ y deducir la solución para $f(x)=x^2$ (comprobando el resultado). [0.6 puntos]

Ecuaciones Diferenciales I (C - piloto) **Soluciones del parcialillo 1 (5/3/09)**

1. Sea (E) $(y-2x)\,u_y+u_x=y$. **a]** Resolver (E) con el dato $u(0,y)=y-2$. ¿Es única la solución?
b] Imponer a (E) unos datos de Cauchy para los que no tenga solución.



$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-2x}{1}\to y=Ce^x-2e^x\int e^{-x}x\,dx \underset{[\text{ó } y_p=Ax+B]}{\overset{\uparrow}{=}} Ce^x+2x+2\to (y-2x-2)e^{-x}=C\to$$

$$\begin{cases}\xi=(y-2x-2)e^{-x}\\ \eta=x \text{ (parece mejor)}\end{cases}\to u_\eta=y=\xi e^\eta+2\eta+2\to u=p(\xi)+\xi e^\eta+\eta^2+2\eta\,,$$

$$u=p\big([y-2x-2]e^{-x}\big)+y+x^2-2\,.$$

[Si hubiésemos escogido $\eta=y$ no se podría despejar la x de $\xi=(\eta-2x-2)e^{-x}$].

a] $p(y-2)+y-2=y-2$, $p(y-2)=0\to p(v)=0\ \forall v$, $\boxed{u=y+x^2-2}$.

Solución única según lo visto, o porque $x=0$ nunca es tangente a las características:

$\Delta=0\cdot(y-2\cdot 0)-1\cdot 1=-1\neq 0\ \forall x$ [o porque está claro en el dibujo].

b] Hay una característica sencilla: $y=2x+2$. Imponemos datos sobre ella:

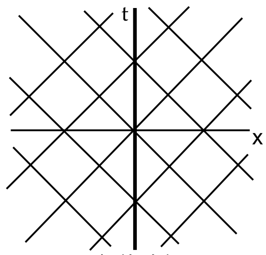
$u(x,2x+2)=p(0)+2x+x^2=f(x)\to$ salvo que escojamos $f(x)=K+2x+x^2$

(en ese caso existirían infinitas soluciones), el problema no tiene solución.

Por ejemplo, con $u(x,2x+2)=0$ no hay solución.

[Hallando $\Delta=1\cdot(2x+2-2x)-2\cdot 1=0\ \forall x$, confirmamos que es característica].

2. Sea (e) $u_{tt}-u_{xx}+Du_t+Eu_x=4$, con D y E constantes.
a] Escribir (e) en forma canónica. ¿Para qué relaciones entre D y E es esta forma resoluble?
b] Para $D=-2$, $E=2$, hallar la o las soluciones de (e) con los datos: $u(0,t)=e^{2t}$, $u_x(0,t)=2$.



solución única

a] Las características de esta ecuación son las de la ecuación de ondas (sólo dependen de las derivadas de segundo orden):

$$\begin{cases}\xi=x+t\\ \eta=x-t\end{cases}\to\begin{cases}u_t=u_\xi-u_\eta\\ u_x=u_\xi+u_\eta\end{cases},\ \begin{cases}u_{tt}=u_{\xi\xi}-2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\\ u_{xx}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\end{cases}\to$$

$$-4u_{\xi\eta}+(D+E)u_\xi+(E-D)u_\eta=4\to \textbf{si } \boxed{E=\pm D}\ \textbf{es resoluble.}$$

b] $u_{\xi\eta}-u_\eta=-1\xrightarrow{u_\eta=v} v_\xi=v-1\xrightarrow{v_p\text{ a ojo}} v=p^*(\eta)e^\xi+1\to u=q(\xi)+p(\eta)e^\xi+\eta\,.$

La solución general es, pues, $\boxed{u=q(x+t)+p(x-t)\,e^{x+t}+x-t}$.

Imponemos los datos $\big(u_x=q'(x+t)+p'(x-t)\,e^{x+t}+p(x-t)\,e^{x+t}+1\big)$:

$$\begin{cases}u(0,t)=q(t)+p(-t)\,e^t-t=e^{2t}\to q'(t)-p'(-t)e^t+p(-t)e^t=1+2e^{2t}\\ u_x(0,t)=q'(t)+p'(-t)\,e^t+p(-t)\,e^t+1=2 \qquad 2p'(-t)e^t\overset{\downarrow}{=}-2e^{2t},\ p'(-t)=-e^t,\ p'(v)=-e^{-v}\end{cases}$$

$$\to p(v)=e^{-v}+K\to q(t)=t-Ke^t\to u=x+t+e^{-x+t}e^{x+t}+x-t\,,\ \boxed{u=2x+e^{2t}}\,.$$

Veamos si con cambios del tipo $u=e^{pt}e^{qx}w$ conseguimos resolver (e) en algún caso más:

$$\begin{cases}u_t=[pw+w_t]\,e^{pt+qx}\\ u_x=[qw+w_x]\,e^{pt+qx}\end{cases},\ \begin{cases}u_{tt}=[p^2w+2pw_t+w_{tt}]\,e^{pt+qx}\\ u_{xx}=[q^2w+2qw_x+w_{xx}]\,e^{pt+qx}\end{cases}\to$$

$$w_{tt}-w_{xx}+(2p+D)w_t+(E-2q)w_x+(p^2-q^2+pD+qE)w=4e^{-pt-qx}\,.$$

Para que la forma canónica tenga sólo una derivada primera hemos visto que debe ser

$E\overset{\downarrow}{=}D+2(p+q)$ o bien $E\overset{\downarrow}{=}-D-2(p-q)$, y además debe anularse lo que acompaña a u:

$(p+q)(D+p+q)=0$ $\quad(p-q)(D+p-q)=0\quad\to\quad E=\pm D$ en ambos casos (nada nuevo).

[En el caso **b]**, con $p=q=1$ acabamos en una ecuación de ondas: $w_{tt}-w_{xx}=4e^{-t-x}$].

1. Sea [P] $\begin{cases} x^2y''-ay=3x-4 \\ y(1)+y'(1)=y(2)=0 \end{cases}$. Precisar cuántas soluciones tiene para: i) $a=2$, ii) $a=0$. [Ayuda: $\ln 2$ es un número irracional].

Veamos primero cuántas soluciones tiene el homogéneo en ambos casos.

i) Para $a=2$ la ecuación es de Euler con $\mu(\mu-1)-2=0 \to y=c_1x^2+c_2x^{-1}$, $y'=2c_1x-c_2x^{-2}$.

Imponiendo los datos: $\begin{cases} y(1)+y'(1)=3c_1=0 \\ y(2)=4c_1+\frac{c_2}{2}=0 \end{cases} \to c_1=c_2=0 \to$ [P] tiene **solución única**.

[Se podría calcular esta solución única directamente o con la función de Green:

Con la fvc o tanteando $\cdots\ y=c_1x^2+c_2x^{-1}-\frac{3x}{2}+2 \xrightarrow{\text{datos}} y=\frac{1}{3}x^2-\frac{3}{2x}-\frac{3x}{2}+2$.

$$\begin{cases} y_1=x^{-1} \\ y_2=x^2-8x^{-1} \end{cases},\ \begin{vmatrix} x^{-1} & x^2-8x^{-1} \\ -x^{-2} & 2x+8x^{-2} \end{vmatrix}=3,\ p(x)=1,\ G(x,s)=\frac{1}{3}\begin{cases} s^{-1}(x^2-8x^{-1}),\ 1\le s\le x \\ x^{-1}(s^2-8s^{-1}),\ x\le s\le 2 \end{cases},\ f(s)=\frac{3}{s}-\frac{4}{s^2}$$

$$\to y=\frac{1}{3}(x^2-8x^{-1})\int_1^x\left(\frac{3}{s}-\frac{4}{s^2}\right)ds+\frac{1}{3x}\int_x^2\left(3s-4-\frac{24}{s^2}+\frac{32}{s^3}\right)ds=\frac{1}{3}x^2-\frac{3}{2x}-\frac{3x}{2}+2\ ].$$

ii) Para $a=0$ también es de Euler, o podemos 'resolverla' así: $y''=0 \to y'=c_1$, $y=c_1x+c_2$

$\to \begin{cases} y(1)+y'(1)=2c_1+c_2=0 \\ y(2)=2c_1+c_2=0 \end{cases} \to$ **el homogéneo tiene infinitas soluciones** $y_h=\{x-2\}$.

La ecuación en forma S-L es $(y')'=\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}$. Que [P] tenga infinitas o ninguna depende de:

$$\int_1^2(x-2)\left(\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}\right)dx=\int_1^2\left(3-\frac{10}{x}+\frac{8}{x^2}\right)dx=3-10\big[\ln x\big]_1^2-\Big[\frac{8}{x}\Big]_1^2=7-10\ln 2\neq 0.$$

Como esta integral es no nula, [P] **no tiene solución** para $a=0$.

[Verlo directamente lleva algo más de tiempo:

$$y''=\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2} \to y'=3\ln x+\frac{4}{x}+c_1 \xrightarrow{\text{partes}} y=3x\ln x-3x+4\ln x+c_1x+c_2 \to$$

$\begin{cases} y(1)+y'(1)=2c_1+c_2+1=0 \\ y(2)=2c_1+c_2+10\ln 2-6=0 \end{cases}$, sistema que no tiene solución porque $1\neq 10\ln 2-6$].

2. Resolver $\begin{cases} u_t-u_{xx}=e^{-2t}\cos x,\ x\in(0,\frac{\pi}{2}),\ t>0 \\ u(x,0)=1,\ u_x(0,t)=0,\ u(\frac{\pi}{2},t)=1 \end{cases}$.

[A una varilla inicialmente a 1^o con el extremo izquierdo aislado empezamos a meterle y sacarle calor (cada vez menos) en su interior, mientras obligamos a que el extremo derecho se mantenga a 1^o].

Lo primero es hacer cero las condiciones de contorno. Una v que las cumple salta a la vista:

$$v=1 \xrightarrow{w=u-1} \begin{cases} w_t-w_{xx}=e^{-2t}\cos x \\ w(x,0)=0,\ w_x(0,t)=w(\frac{\pi}{2},t)=0 \end{cases},\ \text{problema no homogéneo.}$$

Hallemos las autofunciones del homogéneo. Sabemos que al separar variables $u=XT$ queda:

$X''+\lambda X=0$, que con los datos $X'(0)=X(\frac{\pi}{2})=0$ nos da: $X_n=\{\cos(2n-1)x\}$, $n=1,2,\ldots$.

Probamos: $w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\cos(2n-1)x \to \sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n'+(2n-1)^2T_n\right]\cos(2n-1)x=e^{-2t}\cos x$

La función de la derecha ya está desarrollada en esas autofunciones. Hay que resolver, pues:

$$\begin{cases} T_1'+T_1=e^{-2t} \\ T_1(0)=0 \end{cases}\ \text{y}\ \begin{cases} T_n'+(2n-1)^2T_n=0 \\ T_n(0)=0 \end{cases},\ n=2,\ldots\ \Big[\text{ya que } \sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\cos(2n-1)x=0\Big].$$

La solución de las últimas es obviamente $T_n\equiv 0$. Para la primera:

$$T_{1p}=Ae^{-2t} \to -2A+A=1,\ T_1=Ce^{-t}-e^{-2t}\ \left[\text{ó } T_1=Ce^{-t}+e^{-t}\int e^{-t}\right] \xrightarrow{T_1(0)=0} T_1(t)=e^{-t}-e^{-2t}.$$

La solución del problema inicial es, pues: $\boxed{u(x,t)=1+(e^{-t}-e^{-2t})\cos x}$

[$u \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 1$: toda la varilla tiende a ponerse a 1^o].

3. Sea $f(x)=\begin{cases}1,\ 0\le x\le 1\\ 0,\ 1<x\le 2\end{cases}$. **a]** Hallar su desarrollo en serie de Fourier $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{2}$.

¿Cuánto debe sumar la serie para i) $x=1$, ii) $x=2$? Comprobarlo sustituyendo en la serie.

b] Resolver $\begin{cases}u_t-u_{xx}+\frac{u}{t+1}=0\,,\ x\in(0,2),\ t>0\\ u(x,0)=f(x)\,,\ u_x(0,t)=u_x(2,t)=0\end{cases}$ por separación de variables.

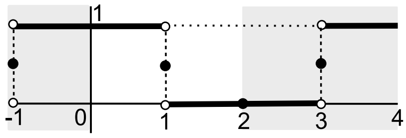
a] Los desarrollos en cosenos son: $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{L}$, con $a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$.

En este caso: $a_0=\frac{2}{2}\int_0^1 dx=1$, $a_n=\int_0^1\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx=\frac{2}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}$, y es $\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0 \text{ si } n \text{ par}\\ (-1)^m \text{ si } n=2m+1\end{cases}$.

El desarrollo de nuestra $f(x)$ es, por tanto: $\boxed{\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}\cos\frac{(2m+1)\pi x}{2}}$.

i) En $x=1$ es f discontinua, y la serie de Fourier tenderá hacia
$\frac{1}{2}[f(1^-)+f(1^+)]=\frac{1}{2}$, como se comprueba fácil sustituyendo:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}\cos\frac{(2m+1)\pi}{2}=\frac{1}{2}\ \text{[los cosenos se anulan].}$$



ii) Como tiende en todo **R** hacia la extensión par y 4-periódica de f , en $x=2$ ha de tender hacia $f(2)=0$. Sustituyendo:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}\cos(2m+1)\pi=\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}=0\,,$$

puesto que la última serie $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$.

b] Separando variables: $u=XT\ \to\ \frac{X''}{X}=\frac{T'}{T}+\frac{1}{t+1}=-\lambda\ \to\ \begin{cases}X''+\lambda X=0\\ X'(0)=X'(2)=0\end{cases}$ y $T'+[\lambda+\frac{1}{t+1}]T=0$.

Los autovalores y autofunciones del problema de contorno sabemos que son:

$$\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{4}\,,\ X_n=\{\cos\frac{n\pi x}{2}\},\ n=0,1,\ldots\ \to\ T'+[\frac{n^2\pi^2}{4}+\frac{1}{t+1}]T=0\ \to\ T_n=\Big\{\frac{e^{-n^2\pi^2t/4}}{t+1}\Big\}\ \to$$

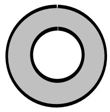
$$u(x,t)=\frac{a_0}{2(t+1)}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{e^{-n^2\pi^2t/4}}{t+1}\cos\frac{n\pi x}{2}\ \to\ u(x,0)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{2}=f(x)\ \to$$

$$\boxed{u(x,t)=\frac{1}{2(t+1)}+\frac{2}{\pi(t+1)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}e^{-(2m+1)^2\pi^2t/4}\cos\frac{(2m+1)\pi x}{2}}\ .$$

Ecuaciones Diferenciales II (C - piloto) **Soluciones del parcialillo 34 (26/5/09)**

1. Resolver el problema plano $\begin{cases}\Delta u=9r\,,\ 1<r<2\\ u(1,\theta)=2\,\mathrm{sen}^2\theta\,,\ u_r(2,\theta)=0\end{cases}$.

Separando variables en el homogéneo aparecen, como sabemos, estas ecuaciones:



$$\Theta''+\lambda\Theta=0 \quad \text{y} \quad r^2R''+rR'-\lambda R=0\,.$$

La que da las autofunciones siempre es Θ, para la que las condiciones de contorno son las implícitas $\begin{matrix}\Theta(0)=\Theta(2\pi)\\ \Theta'(0)=\Theta'(2\pi)\end{matrix}$ [o sea, Θ 2π-periódica] $\to$ $\Theta_n=\{\cos n\theta,\mathrm{sen}\,n\theta\}$, $n=0,1,\dots$.

Probamos, pues: $u(r,\theta)=a_0(r)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[a_n(r)\cos n\theta+b_n(r)\,\mathrm{sen}\,n\theta\right]\to$

$$a_0''+\tfrac{1}{r}a_0'+\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\big(a_n''+\tfrac{1}{r}a_n'-\tfrac{n^2}{r^2}a_n\big)\cos n\theta+\big(b_n''+\tfrac{1}{r}b_n'-\tfrac{n^2}{r^2}b_n\big)\,\mathrm{sen}\,n\theta\Big]=9r\ \to$$

$$r^2a_0''+ra_0'=9r^3\ ,\quad r^2a_n''+ra_n'-n^2a_n=0\ ,\quad r^2b_n''+rb_n'-n^2b_n=0\ ,\ n\geq 1\,.$$

Del dato de contorno $u(1,\theta)=1-\cos 2\theta$ deducimos que $a_0(1)=1\,,a_2(1)=-1$ y los otros 0.
Y del otro dato, $a_n'(2)=b_n'(2)=0$ $\forall n$.

Sólo dos de los problemas para las ecuaciones de Euler no tienen solución trivial:

$$\begin{cases}r^2a_0''+ra_0'=9r^3\\ a_0(1)=1,\,a_0'(2)=0\end{cases}\xrightarrow{a_{0p}=Ar^3} a_0=c_1+c_2\ln r+r^3 \xrightarrow{\text{c.c.}} \begin{matrix}c_1+1=1\\ \frac{c_2}{2}+12=0\end{matrix}\ \to\ a_0=r^3-24\ln r\,.$$

$\Big[$Más largo es hallar a_{0p} con la fvc: $\begin{vmatrix}1 & \ln r\\ 0 & 1/r\end{vmatrix}=\frac{1}{r}$, $a_{0p}=\ln r\int\frac{9r}{1/r}-\int\frac{9r\ln r}{1/r}=3r^3\ln r-3r^3\ln r+\int 3r^2\Big]$.

$$\begin{cases}r^2a_2''+ra_2'-4a_2=0\\ a_2(1)=-1,\,a_2'(2)=0\end{cases}\to a_2=c_1r^2+c_2r^{-2}\xrightarrow{\text{c.c.}}\begin{matrix}c_1+c_2=-1\\ 4c_1-\frac{c_2}{4}=0\end{matrix}\ \to\ a_2=-\frac{r^2}{17}-\frac{16}{17r^2}\,.$$

La solución (única) es, por tanto, $\boxed{u(r,\theta)=r^3-24\ln r-\frac{1}{17}\Big[r^2+\frac{16}{r^2}\Big]\cos 2\theta}$.

[Separando en 2, el problema no homogéneo se podría mirar como en 1 variable al no depender de θ:
$\begin{cases}u''+\frac{1}{r}u'=9r\\ u(1)=u'(2)=0\end{cases}\to u=r^3-1-24\ln r$, y quedaría por resolver $\begin{cases}\Delta u=0\\ u(1,\theta)=2\,\mathrm{sen}^2\theta,\,u_r(2,\theta)=0\end{cases}$.
Como una solución de la EDP es $v=r^3$ también se podría hacer $w=u-v$ y acabar en un homogéneo].

3. Resolver con transformadas de Fourier $\begin{cases}u_{tt}-3u_{xt}+2u_{xx}=0\,,\ x,t\in\mathbf{R}\\ u(x,0)=f(x)\,,\ u_t(x,0)=0\end{cases}$ y deducir la solución para $f(x)=x^2$ (comprobando el resultado).

$$\begin{cases}\hat{u}_{tt}+3ik\hat{u}_t-2k^2\hat{u}=0\\ \hat{u}(k,0)=\hat{f}(k)\,,\,\hat{u}_t(k,0)=0\end{cases}\to\ \mu^2+3ik\mu-2k^2=0\,,\ \mu=-ik,-2ik\ \to\ \hat{u}(k,t)=p(k)\,\mathrm{e}^{-ikt}+q(k)\,\mathrm{e}^{-2ikt}$$

$$\xrightarrow{c.i.}\begin{cases}p(k)+q(k)=\hat{f}(k) & q(k)=-\hat{f}(k)\downarrow\\ -ikp(k)-2ikq(k)=0\,, & p(k)=-2q(k)=2\hat{f}(k)\end{cases}\ \to\ \hat{u}(k,t)=2\hat{f}(k)\,\mathrm{e}^{-ikt}-\hat{f}(k)\,\mathrm{e}^{-2ikt}\,.$$

Y como $\mathcal{F}^{-1}\big[\hat{f}(k)\,\mathrm{e}^{ika}\big]=f(x-a)$, la solución (única) es $\boxed{u(x,t)=2f(x+t)-f(x+2t)}$.

En el caso particular de que $f(x)=x^2$ queda $u=2x^2+4xt+2t^2-x^2-4xt-4t^2=\boxed{x^2-2t^2}$.

[Directamente no se podía usar la $\mathcal{F}$ por no tener x^2 transformada].

Comprobando: $u_{tt}-3u_{xt}+2u_{xx}=-4+2\cdot 2=0$, $u(x,0)=x^2$, $u_t(x,0)=-4\cdot 0=0$.

2. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\geq 0, t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=e^{-x}\,,\ u_t(x,0)=0\ . \\ u(0,t)=e^{-t} \end{cases}$ **a]** Hallar $u(2,3)$. [Ayuda: una buena $v(x,t)$ sale de separar variables y tomar $\lambda=-1$].
Elegir entre: **b₁]** Hallar $u(x,t)$, $x,t\geq 0$. **b₂]** Dibujar aproximadamente $u(x,3)$.

a] Busquemos una v (mejor que la inmediata $v=e^t$) que cumpla también la ecuación.

Separando variables: $\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ T''+\lambda T=0 \end{cases} \xrightarrow{\lambda=-1} \begin{array}{l} X=c_1e^x+c_2e^{-x} \\ T=k_1e^t+k_2e^{-t} \end{array} \to$ cumple ecuación y $u(0,t)=e^{-t}$ la

$$v=e^{-x-t} \xrightarrow{w=u-v} \begin{cases} w_{tt}-w_{xx}=0\,,\ x\geq 0 \\ w(x,0)=0\,,\ w_t(x,0)=e^{-x} \\ w(0,t)=0 \end{cases} \to \begin{cases} w_{tt}-w_{xx}=0\,,\ x\in\mathbf{R} \\ w(x,0)=0\,,\ w_t(x,0)=g^*(x) \text{ (impar)} \end{cases}$$

$$\to\ w(2,3)=\tfrac{1}{2}\int_{-1}^{5}g^* \underset{\text{impar}}{=} \tfrac{1}{2}\int_{1}^{5}g = -\tfrac{1}{2}e^{-x}\Big|_1^5=\tfrac{1}{2}\left[e^{-1}-e^{-5}\right] \to \boxed{u(2,3)=\tfrac{1}{2}\left[e^{-1}+e^{-5}\right]}\ .$$

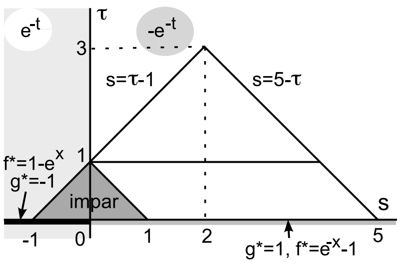
[Es bastante más largo con la v mala:

$$v=e^{-t} \xrightarrow{w=u-v} \begin{cases} w_{tt}-w_{xx}=-e^{-t}\,,\ x\geq 0 \\ w(x,0)=e^{-x}-1\,,\ w_t(x,0)=1\,,\ w(0,t)=0 \end{cases} \to$$

$$\begin{cases} w_{tt}-w_{xx}=F^*(x)\,,\ x\in\mathbf{R} \\ w(x,0)=f^*(x)\,,\ w_t(x,0)=g^*(x) \end{cases},\ \begin{array}{c} F^*, f^*, g^* \\ \text{impares} \end{array} \to$$

$$w=\tfrac{1}{2}\left[f^*(-1)+f^*(5)\right]+\tfrac{1}{2}\int_{-1}^{5}g^*+\tfrac{1}{2}\int_0^3\!\!\int_{\tau-1}^{5-\tau}F^*$$

$$=\tfrac{1}{2}\left[f(5)-f(1)\right]+\tfrac{1}{2}\int_1^5 1-\tfrac{1}{2}\int_0^1\!\!\int_{1-\tau}^{5-\tau}e^{-\tau}-\tfrac{1}{2}\int_1^3\!\!\int_{\tau-1}^{5-\tau}e^{-\tau}=\cdots\ ].$$



b₁] La solución viene dada por $u(x,t)=e^{-x-t}+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}g^*$, siendo $g^*(x)=\begin{cases} e^{-x}\,,\ x\geq 0 \\ -e^{x}\,,\ x\leq 0 \end{cases}$.

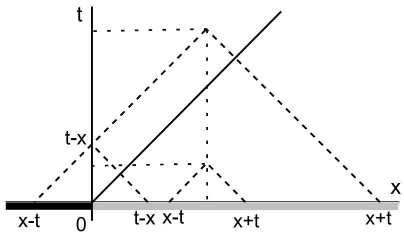
Como, por ejemplo, muestra el dominio de dependencia, hay que distingir dos casos:

Si $x\leq t$, $w(x,t)=\frac{1}{2}\int_{t-x}^{x+t}e^{-s}ds=\frac{1}{2}\left[e^{x-t}-e^{-x-t}\right]$

$$\to\ u(x,t)=\tfrac{e^{-t}}{2}\left[e^x+e^{-x}\right]=\boxed{e^{-t}\operatorname{ch}x}\ .$$

Si $x\geq t$, $w(x,t)=\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}e^{-s}ds=\frac{1}{2}\left[e^{t-x}-e^{-x-t}\right]$

$$\to\ u(x,t)=\tfrac{e^{-x}}{2}\left[e^t+e^{-t}\right]=\boxed{e^{-x}\operatorname{ch}t}\ .$$



b₂] Para dibujar (sin repetir los cálculos de arriba), identificamos la ondas que viajan:

$G(x)\equiv\frac{1}{2}\int_0^x g^*=\frac{1}{2}\left[1-e^{-x}\right]$, para $x\geq 0$ y es par. G va hacia la izquierda y $-G$ a la derecha.