81p2

39-23-38

1. Sea $(P_1)\begin{cases}(ty')'+\lambda\frac{y}{t}=0\\ y(1)=y(e)=0\end{cases}$

   i. ¿Es (P_1) un problema de Sturm-Liouville regular? Hallar los autovalores y las autofunciones. 2

   ii. Considerar ahora $(P_2)\begin{cases}(ty')'=f(t)\\ y(1)=y(e)=0\end{cases}$

   ¿Tiene (P_2) solución única? Calcular, si existe, la función de Green de (P_2). Hallar la solución de (P_2) si $f(t)=2/t$. 3

2. Sea (E) $t^2u_{tt}-x^2u_{xx}=0$.

   i. Escribirla en forma canónica y hallar su solución general . 3

   ii. Comprobar que existen infinitas soluciones de (E) que satisfacen los datos adicionales $u(x,x)=0$, $u_t(x,x)=0$. 2

   ¿Por qué no bastan estos dos datos para determinar de forma única una solución?

3. Sea $(P)\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=0 & x\in[0,\pi]\ ,t\in\mathbb{R}\\ u(x,0)=f(x)\\ u_t(x,0)=0\\ u(0,t)=u(\pi,t)=0\end{cases}$ con $f(x)=\begin{cases}\operatorname{sen}2x\ , & x\in[0,\frac{\pi}{2}]\\ 0\ , & x\in[\frac{\pi}{2},\pi]\end{cases}$

   i. Dibujar la gráfica de $\bar{f}$ extensión impar de f y utilizar dicha gráfica para dibujar la posición de la cuerda en el instante $t=3\pi/4$. Calcular $u(\pi/2,3\pi/4)$. 3

   ii. Comprobar que la serie de Fourier de la solución $u(x,t)$ es

   $$\frac{4}{3\pi}\operatorname{sen}x\cos t+\frac{1}{2}\operatorname{sen}2x\cos 2t+\frac{4}{\pi}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m-3)(2m+1)}\operatorname{sen}(2m-1)x\,.\cos(2m-1)t$$ 2

   (utilizar la serie obtenida en el caso general)(se recuerda que $2\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b=\cos(a-b)-\cos(a+b)$).

   iii. Si se considera ahora la ecuación $u_{tt}-u_{xx}=\operatorname{sen}x$ y los mismos datos adicionales, ¿cuál es el valor de $u(\pi/2,3\pi/4)$ para este problema no homogéneo?

4. Resolver separando variables el problema de Neumann en la corona:

$$\begin{cases}u_{rr}+\frac{u_r}{r}+\frac{u_{\theta\theta}}{r^2}=0 & r\in(1,2)\ ,\ \theta\in(-\pi,\pi)\\ u_r(1,\theta)=0\\ u_r(2,\theta)=\cos 2\theta & \theta\in(-\pi,\pi)\end{cases}$$ 4

Calcular $u(1,0)$ sabiendo que $u(2,0)=0$ ¿Es necesario este último dato? 1

5. Sea $(P)\begin{cases}u_t-(u_{rr}+\frac{u_r}{r})=0 & r<1\ ,\ t>0\\ u(r,0)=0\\ u(1,t)=1\\ u\text{ acotada}\end{cases}$

   i. Encontrar una solución $v(r)$ de la ecuación que satisfaga la condición $v(1)=1$ y utilizarla para convertir (P) en uno en que la condición sobre $r=1$ sea homogénea . 1

   ii. Resolver este segundo problema por separación de variables (dejar los coeficientes expresados en función de J_0). 3

   iii. Si (P) describe la evolución de las temperaturas de una placa circular (suponiendo que la distribución de temperaturas en cada instante no depende del argumento θ), ¿hacia qué valor tenderá la temperatura del punto $(1/2,0)$ cuando $t\to\infty$?

SEGUNDO PARCIAL

81j21

11-22-67

A(5). Sea $u_{tt}-e^{2t}u_{xx}-u_t=0$.

Escribirla en forma canónica y hallar su solución general .
Hallar la solución que satisface las condiciones iniciales

$$\begin{cases}u(x,0)=f(x)\\ u_t(x,0)=0\end{cases}$$

Dibujar en el plano x-t las características que pasan por el punto (0,0).

Si $f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } |x|\geq 1/2\\ 1-2|x| & \text{si } |x|\leq 1/2\end{cases}$ dibujar la solución en el instante $t=\ln 5$.

¿Cual es el dominio de influencia sobre la solución del valor inicial f en x=0 ? ¿Cual es el dominio de dependencia de los valores de f del punto (0,1) ? ¿es constante para esta ecuación la velocidad de propagación de las perturbaciones iniciales?

B(5). Resolver el problema no homogéneo:

$$\begin{cases}u_{xx}+u_{yy}=2x\cos^2 y & \text{en } (0,\pi)\times(0,\pi)\\ u_y(x,0)=u_y(x,\pi)=u(0,y)=0\\ u(\pi,y)=5+\cos y\end{cases}$$

(comprobar que la solución obtenida satisface el problema)

Segundo parcial

81s21

44-31-25

A(3). Sea el problema de contorno

$$(P_1)\quad\begin{cases}y''+2y'+y+\lambda y=0\\ y(0)=y(1)=0\end{cases}$$

Hallar los autovalores y las autofunciones asociadas.

B(2). Sea $(P_2)\begin{cases}u_{tt}-c^2u_{xx}=0\ , & x\in[0,4]\ ,\ t\in\mathbb{R}\\ u(x,0)=f(x)\\ u_t(x,0)=0\\ u(0,t)=u(4,t)=0\end{cases}$ con $f(x)=\begin{cases}x/3\ , & x\in[0,3]\\ 4-x\ , & x\in[3,4]\end{cases}$

Dibujar la gráfica de $\bar{f}$ extensión impar de f y utilizar dicha gráfica para dibujar $u(x,2/c)$.

C(5). Hallar la solución de

$$(P_3)\begin{cases}u_{rr}+\frac{u_r}{r}+\frac{u_{\theta\theta}}{r^2}=r & ,\ r<2\ ,\ \theta\in(0,\pi)\\ u_\theta(r,0)=u_\theta(r,\pi)=0\\ u(2,\theta)=3\\ u\text{ acotada .}\end{cases}$$

82p2

60-24-16

A. Sea $\begin{cases} t^2y'' + 2ty' = f(t) \\ y(1) + y'(1) = 0;\ y(2) = 0 \end{cases}$

Hallar la función de Green y utilizarla para calcular la solución si $f(t) = t$.

B. Sea (B) $u_t - 2tu_x + \dfrac{2tu}{1+t^2} = 0$.

i. Hallar la solución de (B) que satisface $u(x,0) = f(x)$.

ii. En el caso particular en que $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}^2 \pi x & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$

dibujar $u(x,2)$.

iii. Escribir un problema de Cauchy para la ecuación (B) que tenga infinitas soluciones (y comprobarlo).

C. Resolver $(P_C) \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & x \in [0,1/2],\ t > 0 \\ u(x,0) = 0 \\ u_x(0,t) = 0,\ u(1/2,t) = 1 \end{cases}$

Suponiendo que (P_C) discribe la evolución de las temperaturas de una varilla, hallar la distribución estacionaria hacia la que tienden las temperaturas de la varilla.

D. Resolver $\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = y \cos x & \text{en } (0,\pi)\times(0,1) \\ u_x(0,y) = u_x(\pi,y) = 0 \\ u_y(x,0) = u_y(x,1) = 0 \end{cases}$

¿Hay unicidad?

E. Sea $\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 \\ u(r,0) = 0 \\ u_t(r,0) = \begin{cases} 1 - r^2 & \text{si } |r| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |r| \geq 1 \end{cases} \end{cases}$

y considerémoslo como un problema i) en una dimensión; ii) en dos dimensiones; iii) en tres dimensiones (en los tres casos r representa la distancia de un punto (de la recta, del plano o del espacio) al origen).

Hallar $u(0,t)$ para $t \geq 0$ en los tres casos i), ii) y iii).

82j2

27-41-32

A (3). Sea el problema para la cuerda semiacotada

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & x \geq 0,\ t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = g(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x, & \text{si } x \in [\pi, 2\pi] \\ 0, & \text{si } x \in [0,\pi] \text{ o } x \in [2\pi, \infty) \end{cases} \\ u(0,t) = 0 \end{cases}$$

Dibujar la posición de la cuerda en los instantes $t = \pi$, $t = 2\pi$, $t = 3\pi$, $t = 4\pi$ (conviene dibujar la función

$$G(x) = \frac{1}{2}\int_0^x \bar{g}(s)\,ds$$

donde $\bar{g}$ es la extensión impar de g respecto a 0).

Hallar y dibujar $u(3\pi, t)$.

B(4). Resolver separando variables:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} - 4u_x - 4u = 0, & t > 0,\ x \in [0,\pi] \\ u(x,0) = e^{-2x} \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

C (3). Comprobar que si $f(x) \to 0$ cuando $|x| \to \infty$ entonces $\widehat{(f'(x))} = -ik\hat{f}(x)$.

Si $h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,t] \\ 0 & \text{en el resto de } \mathbb{R} \end{cases}$ calcular $\hat{h}(k)$

Sea $\begin{cases} u_t + u_x = g(x) \\ u(x,0) = 0 \end{cases}$; resolverlo utilizando transformadas de Fourier (suponer u y g suficientemente regulares y tendiendo a cero suficientemente bien en el ∞, con lo que existirán las transformadas).

Comprobar el resultado resolviendo el problema directamente a partir de las características.

METODOS MATEMATICOS II 2º PARCIAL Septiembre 1982

Grupo Piloto

31-15-44

1) Sea $u_{tt} - x^2u_{xx} - u_t = 0$ (A)

Escribir en forma canónica, hallar su solución general.

Determinar la solución de (A) que satisface $u(x,0) = 2x$, $u_t(x,0) = x$. Escribir (en caso de que exista) alguna solución de (A), distinta de la $u = 0$, que satisfaga $u(t,e^t) = u_t(t,e^t) = 0$.

2) Sea el problema para la ecuación del calor en una varilla finita

$$\begin{aligned} &u_t - ku_{xx} = 0 \quad x \in (0,1), \ t > 0 \\ &u(x,0) = f(x) \\ &u_x(0,t) - au(0,t) = 0, \quad a > 0 \\ &u_x(1,t) = 1 \end{aligned}$$

Probar que tiene solución única $\forall a > 0$.

Determinar para cada $a > 0$ la distribución estacionaria hacia la que tienden las temperaturas (es decir, el $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$) justificando el resultado.

3) Calcular el potencial electrostático en el interior del círculo de radio 2 en los dos casos siguientes:

a) $u(1,\theta) = \operatorname{sen}^2\theta$
   $u_r(2,\theta) = 1$

b) $u_r(2,\theta) = 1$

Indicación: en el caso a) dividir el círculo en dos zonas: $0 < r < 1$ y $1 < r < 2$, resolviendo la ecuación de Laplace en cada región.

¿Es continua la solución en todo el círculo de radio 2 en el caso a? ¿Existen u_r y u_θ en toda la región?

83p2

53-9-38

A. (3) Sea el problema para la ecuación de Laplace en la semiesfera:

$$\begin{cases} u_{rr}+\frac{2}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}+\frac{\cos\theta}{r^2\operatorname{sen}\theta}u_\theta=0 \\ u_r(1,\theta)=f(\theta)\ ,\quad \theta\in[0,\pi/2] \\ u_\theta(r,\pi/2)=0\ ,\quad r\in[0,1) \end{cases}$$

Resolverlo por separación de variables.

¿Qué condición ha de satisfacer $f(\theta)$ para qué exista solución? Determinar para qué valor de a el problema con $f(\theta)=\cos^2\theta-a$ tiene solución y resolverlo en ese caso particular.

B. (3.5) Calcular la función de Green del problema $(P_1)\begin{cases} y''=f(t) \\ y(1)=y(2)=0 \end{cases}$.

Hallar una fórmula para la solución de $(P_2)\begin{cases} y''=f(t) \\ y(1)=a\ ;\ y(2)=b \end{cases}$ en términos de la G anterior y de las constantes a y b (utilizar un cambio de variable adecuado).

Calcular la solución de (P_2) si $f(t)=1$, $a=0$, $b=1$.

Obtener de nuevo la fórmula para la solución de (P_2) siguiendo el camino utilizado en el cálculo de la función de Green para la ecuación de Laplace en el plano, es decir, resolviendo el problema $(P_3)\begin{cases} G''=\delta(s-t) \\ G(1)=G(2)=0 \end{cases}$ para cada t fijo a partir del conocimiento de una solución fundamental (se da como dato que la función $v(s)=\frac{1}{2}|s-t|$ satisface para cada t fijo $v''(s)=\delta(s-t)$).

C. (3.5) Sean los problemas:

$$(P_v)\begin{cases} v_{tt}-v_{xx}=0 & x\geq 0 \\ v(x,0)=xf(x) & t\in\mathbb{R} \\ v_t(x,0)=0 \\ v(0,t)=0 \end{cases} \qquad (P_u)\begin{cases} u_{tt}-(u_{rr}+\frac{2}{r}u_r)=0 & r\geq 0 \\ u(r,0)=f(r) & t\in\mathbb{R} \\ u_t(r,0)=0 \end{cases}$$

donde $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x\in[0,2] \\ (x-2)(x-4) & \text{si } x\in[2,4] \\ 0 & \text{si } x\in[4,\infty) \end{cases}$.

Para (P_v): Determinar a partir del dibujo de las características las regiones del plano (x,t) sobre las que la solución v es igual a 0.

Calcular $v(1/2,3)$, $v(6,3)$, $v(3,6)$ y $v(9,6)$.

Dibujar la posición de la cuerda para t=3 y t=6.

Para (P_u): Deducir de los valores de v calculados los valores de $u(1/2,3)$, $u(6,3)$, $u(3,6)$ y $u(9,6)$. Calcular $u(0,3)$.

Dibujar aproximadamente $u(r,3)$ y $u(r,6)$ a partir de los dibujos de $v(x,3)$ y $v(x,6)$ y de los valores de u calculados.

Comentar en ambos casos la evolución de las soluciones a lo largo del tiempo.

83j2

28-22-50

A(4) Sea le problema

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0 \\ u(x,0)=0 & x\in|0,L| \\ u_t(x,0)=0 & t\in\mathbb{R} \\ u(0,t)=t \\ u(L,t)=0 \end{cases}$$

Hallar la expresión analítica de $u(x,t)$ con $T\in[0,L]$ utilizando la fórmula de D'Alembert. Describir a partir de esta expresión el comportamiento de la cuerda en el intervalo de tiempo $t\in[0,L]$, comentando algunos aspectos previsibles de dicho comportamiento.

Hallar con muy pocos cálculos $u(x,kL)$ con k entero positivo.

D(4). Sea el problema

$$\begin{cases} u_{rr}+\frac{u_r}{r}+\frac{u_{\theta\theta}}{r^2}=F(r,\theta) & \text{en } (0,1)\times(0,\frac{\pi}{3}) \\ u(1,\theta)=0, & \theta\in(0,\frac{\pi}{3}) \\ u_\theta(r,0)=0\ ,\quad u(r,\frac{\pi}{3})=0 & r\in(0,1) \end{cases}$$

¿Qué serie se probaría para resolver el problema?

Resolverlo en el caso particular $F(r,\theta)=\cos\frac{3\theta}{2}$

C(2) Hallar la solución (en términos de funciones elementales) de:

$$\begin{cases} u_t-u_{xx}+u=0 \\ u(x,0)=e^{-x^2/2} \end{cases}$$

mediante transformadas de Fourier (suponer, como siempre, que existen todas las transformadas que aparecen).

SEGUNDO PARCIAL

83s2

27-12-61

C. (4) Sea el problema $\begin{cases} ty''+2y'+\lambda ty=0 \\ y(1)=y(2)=0 \end{cases}$

i) ¿Es un problema de Sturm-Liouville regular?

ii) Determinar autovalores y autofunciones (utilizar el cambio $x=t.y$)

iii) Calcular la función de Green del problema no homogéneo para $\lambda=0$ (en el caso de que exista)

iv) Resolver $\begin{cases} ty''+2y'=1 \\ y(1)=y(2)=0 \end{cases}$.

(6) Considérese ahora el problema siguiente para la ecuación de ondas con simetría radial entre dos esferas concéntricas:

$$\begin{cases} u_{tt}-(u_{rr}+\frac{2u_r}{r})=F(r) & r\in[1,2] \\ u(1,t)=u(2,t)=0 & t\in\mathbb{R} \\ u(r,0)=0,\ u_t(r,0)=g(r) \end{cases}$$

Hallar la solución del problema homogéneo $(F(r)=0)$: v) por separación de variables; vi) utilizando la fómula de D'Alambert tras un cambio adecuado

vii) Resolver el problema no homogéneo en el caso particular de que $F(r)=g(r)=\frac{\operatorname{sen}\pi r}{r}$.

84p2

1) (3,5)

a) Dado el problema de contorno siguiente:

$$t^2y'' - ty' + \lambda y = 0 \qquad t \in (1,2)$$
$$y'(1) - y(1) = 0$$
$$y(2) - 2y'(2) = 0$$

Estudiar la existencia y unicidad de la solución para $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$.

b) Calcular la solución del problema no homogéneo:

$$t^2y'' - ty' + \lambda y = t^3 \qquad t \in (1,2)$$
$$y'(1) - y(1) = 0$$
$$y(2) - 2y'(2) = 0$$

si $\lambda = 0$, $\lambda = 1$, haciendo uso de la función de Green en el caso de que exista. Si no existe solución, justificarlo.

2) (3,5) Se considera el problema

$$u_t - u_{xx} = A \qquad x \in (0,1),\ t > 0$$
$$u(x,0) = B$$
$$u_x(0,t) = C$$
$$u_x(1,t) = D \qquad A, B, C, D \in \mathbb{R}$$

i/ Hallar su solución

ii/ Determinar para qué relación entre constantes existe solución estacionaria

iii/ Interpretar desde un punto de vista de la ecuación del calor, el problema y la existencia de una solución estacionaria

3) (3) Dado el problema

$$u_{tt} - u_{xx} = \delta(x) \qquad x \in \mathbb{R},\ t \geq 0$$
$$u(x,0) = 0$$
$$u_t(x,0) = 0$$

se pide

a) Calcular su solución ($\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall t \geq 0$) en la forma más simplificada posible.

b) Dibujar $u(x,2)$ y $u(3,t)$.

Indicaciones:

Utilizando las propiedades de $f(x) =$ [illegible] se puede pasar a un problema homogéneo en la ecuación. También son posibles otros métodos de resolver el problema a través de integraciones (Recordad que $t \geq 0$, es decir el segundo miembro de la ecuación es $\delta(x)\theta(t)$ ($\theta(t)$ función paso en $t = 0$)).

c) Analizar las propiedades de continuidad y diferenciabilidad de la solución ¿Qué se puede decir sin resolver el problema?

58-27-15

84j2

38-31-31

1) Dada la ecuación de ondas:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \qquad x>0,\ t>0$$
$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \quad u(0,t) = 0$$

con

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 2\pi \\ \operatorname{sen} x & 2\pi \leq x \leq 3\pi \\ 0 & 3\pi \leq x \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 2\pi \\ \cos x & 2\pi \leq x \leq 3\pi \\ 0 & 3\pi \leq x \end{cases}$$

a) Demostrar que su solución es una onda que viaja inicialmente hacia la izquierda.

b) Dibujar $u(x,\pi)$ y $u(x,10\pi)$

c) En general, precisar la relación que debe existir entre f y g para que solo exista una onda que viaje hacia la izquierda o hacia la derecha.

2) Dada la ecuación:

$$\Delta u = 0 \qquad 1<r<2, \quad 0<\theta<\frac{\pi}{4}$$
$$u(r,0)=0, \quad u(r,\tfrac{\pi}{4}) - u_\theta(r,\tfrac{\pi}{4}) = 0$$
$$u(1,\theta) = 0, \quad u_r(2,\theta) = \operatorname{sen}\frac{\pi\theta}{4}$$

Calcular su solución en la forma más simplificada posible.

METODOS MATEMATICOS II — SEGUNDO PARCIAL — SEPTIEMBRE 1984

(6)1. Dado el problema de Cauchy:

$$u_{tt} + 2u_{tx} + u_{xx} = 0 \qquad x, t \in \mathbb{R}$$
$$u(x,0)=0, \quad u_t(x,0) = g(x)$$

hallar su solución por los dos caminos siguientes:

a) reduciéndolo a su forma canónica

b) utilizando transformadas de Fourier

(4)2. Calcular la solución del problema:

$$\Delta u + u = 0 \qquad r<1, \quad \frac{\pi}{2}< \theta <\frac{3\pi}{2}$$
$$u(1,\theta) = \operatorname{sen} 2\theta, \quad \theta \in \left|\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right|$$
$$u(r,\tfrac{\pi}{2}) = u(r,\tfrac{3\pi}{2}) = 0 \qquad r \in |0,1|$$

u acotada en $r=0$.

57-43-0

A(4 puntos)

85p2

Sea (E) $u_t + (\cos t)u_x = u$, $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$

a) Hallar la solución de (E) que satisface $u(x,0) = f(x)$

i/ a partir de las características

ii/ utilizando transformada de Fourier

Si $f(x) = \cos^2 x$ en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ y $f(x)=0$ en el resto, dibujar en el plano x,t la región en que la solución u es distinta de cero; dibujar $u(x,t)$ para varios $t \geq 0$ y describir la evolución de $u(x,t)$ para todo $t \geq 0$.

b) Estudiar si existe más de una solución de (E) conteniendo la recta $x=0$, $z=0$.

B(2 puntos)

Resolver:

$$(P_a)\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en} \quad D_a = \{0<r<a,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\} \subset \mathbb{R}^2,\ a>0 \\ u(r,0) = 0 & ,\quad r \in (0,1) \\ u(r,\frac{\pi}{2}) = 1 & \\ u(a,\theta) = 0 & ,\quad \theta \in (0,\frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

Hallar cotas superior e inferior para su solución u_a en D_a.

Elegir 2 problemas entre C_1, C_2 y C_3.

C_1(2 puntos)

Utilizando la función de Green adecuada resolver:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en} \quad (0,\infty)\times(0,\infty) \\ u(x,0) = 0 \\ u(0,y) = 1 \end{cases}$$

y comprobar que su solución coincide con el límite cuando a tiende a ∞ de la solución u_a de (P_a).

C_2(2 puntos)

Resolver:

$$\begin{cases} \Delta u = 1 & \text{en} \quad D_a \\ u(r,0) = u(r,\frac{\pi}{2}) = u(a,\theta) = 0 \end{cases}$$

y hallar cotas superior e inferior para su solución en D_a.

C_3(2 puntos)

Hallar los autovalores y las autofunciones del problema homogéneo asociado a:

$$(P_\lambda)\begin{cases} tv'' + tv' + (\lambda t^2 - \frac{1}{4}) = t^{3/2} \\ v(1) = v(4) = 0 \end{cases}$$

Determinar para que valores de λ el problema no homogéneo (P_λ) tiene solución y para cuales dicha solución es única

46-21-33

A) Sea

85j2

21-14-65

$$(P)\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & t \geq 0\ ,\ x \geq 0 \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \\ u(0,t) = \operatorname{sen} t \end{cases}$$

1) Hallar y dibujar $u(x,3\pi)$ Hallar y describir $u(x,t)$ para cada $t \geq 0$ fijo. (Dato: $v = \operatorname{sen} t \cos x$ satisface la condición de contorno y también la ecuación).

2) Hallar $\hat{u}_s$ la transformada seno de la solución u obtenida en (1). Hallar $\hat{u}_s$ resolviendo (P) directamente mediante transformada seno.

(6 puntos)

B) (1) Resolver por separación de variables:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = F(t) & x \in [-\pi,\pi] \\ u(x,0) = f(x) & t > 0 \\ u_x(-\pi,t) = u_x(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

(2) Determinar la distribución estacionaria si $f(x) = \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}$ y $F(t) = e^{-t}$

(4 puntos)

1) Sea el problema $(P)\begin{cases} y'' \cos t - 2y' \operatorname{sen} t = f(t) \\ y'(-\pi/4) = 0\ ,\ \ y'(\pi/4) - ay(\pi/4) = 0 \end{cases}$

i) Determinar para qué valor de a el problema (P) no tiene solución única. Para dicho valor de a dar un ejemplo de f(t) para el que (P) tenga infinitas soluciones.

ii) Calcular la solución de (P) utilizando la función de Green si a=2 y f(t) = 1.

(3,5 puntos)

85s2

34-14-52

2) Resolver el problema:

$$\begin{cases} \Delta u = \cos^2\theta - a & r \in (0,1),\ \theta \in (0,\pi) \\ u_r(1,\theta) = 0 \\ u_\theta(r,0) = u_\theta(r,\pi) = 0 \end{cases}$$

para los valores de a que se pueda.

(3,5 puntos)

3) Sea el problema para la ecuación de ondas en tres dimensiones con simetría radial:

$$\begin{cases} u_{tt} - (u_{rr} + \frac{2u_r}{r}) = 0 & r \geq 0 \\ & t \geq 0 \\ u(r,0) = 0 \\ u_t(r,0) = e^{-r^2} \end{cases}$$

Hallar $u(r,t)$ para $r > 0$. Hallar $u(0,t)$

(3 puntos).

86p2

36-16-48

1) Sea la ecuación

$$(E) \quad u_t - u_{xx} + 2u_x = 0 \quad , \quad x \in I \quad , \quad t > 0$$

con el dato inicial (D) $u(x,0) = f(x)$, $x \in I$

1.a) Si $I = (0,1)$

(i) Determinar la solución de (E) que satisface (D) y la condición de contorno:

$$u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0 \quad , \quad \forall t > 0$$

(ii) En el caso particular $f(x)$ [illegible], determinar el límite de dicha solución cuando $t \to \infty$

1.b) Si $I = (0,1)$, demostrar que existe una única solución de (E) que verifica (D) y la condición de contorno:

$$u(0,t) = h_0(t)$$
$$u(1,t) = h_1(t)$$

1.c) Si $I = \mathbb{R}$, calcular, utilizando la transformada de Fourier, la solución de (E) que satisface

$$(D) \quad u(x,0) = e^{-x^2/4}$$

en términos de funciones elementales.

(5,5 puntos)

2) Sea

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & x \geq 0 \ , \ t \geq 0 \\ u(x,0) = 0 & \\ u_t(x,0) = \begin{cases} \text{sen } x & x \in [2\pi, 3\pi] \\ 0 & x \in [0, 2\pi] \ , \ x \in [3\pi, \infty) \end{cases} & \\ u_x(0,t) = 0 & \end{cases}$$

i) Determinar en que regiones del plano xt ($x \geq 0, t \geq 0$) la solución es cero (dominio de influencia)

ii) Dibujar la cuerda en los instantes $t = \pi$, $t = 5\pi$

(2,5 puntos)

3) Hallar, con dos cifras decimales exactas, el valor del potencial u en un punto del plano de coordenadas polares $r = 2$, $\theta = 0$, sabiendo que en la circunferencia unidad el potencial es:

$$u(1,\theta) = \begin{cases} \text{sen } \theta & \theta \in [0,\pi] \\ 0 & \theta \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

(se aconseja la construcción de la función de Green adecuada).

(2 puntos)

86j2

38-21-41

1) (a) Determinar los valores de λ para los que el problema de contorno:

$$X'' + \lambda X = 1 \qquad x \in (0,1)$$
$$X'(0) = X(1) = 0$$

no tiene solución. Calcular la solución para $\lambda = 0$ haciendo uso de la función de Green.

(b) Calcular la solución de:

$$u_t - ku_{xx} = \cos \frac{\pi x}{2} \quad x \in (0,1), \ t > 0$$
$$u(x,0) = T$$
$$u_x(0,t) = F, \quad u(0,L) = T$$

y su límite cuando $t \to \infty$ (F y T constantes).

(6 puntos)

2) Una cuerda infinita (c=1) no sometida a fuerzas externas tiene como posición y velocidad en t=0

$$f(x) = \begin{cases} \text{sen } x & x \in [-2\pi, -\pi] \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad ; \quad g(x) = \begin{cases} \text{sen } x & x \in [2\pi, 3\pi] \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Dibujar el dominio de influencia y la cuerda para $t = 3\pi$.

(4 puntos)

86s2

33-9-58

1) (a) Calcular la solución general de la ecuación:

$$u_x + yu = y^2$$

(b) Sea el problema:

$$(P) \begin{cases} u_x + yu = y^2 \\ u(x, x^n) = x^n \end{cases}$$

¿Para qué valores de n (n = 1,2,...) tiene P solución única en un entorno de (0,0)?

(3 puntos)

2) Sea $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 6x & x > 0 \ , \ t > 0 \\ u(x,0) = 0, \ u_t(x,0) = 0 \ , \ u_x(0,t) = 0 \end{cases}$

Calcular $u(0,t)$ $\forall t > 0$.

(3 puntos)

3) Calcular la solución (o soluciones) del problema:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + u = 0 & (x,y) \in (0,\pi) \times (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) \\ u(0,y) = 0, \ u(\pi,y) = \text{sen } 2y \ , \ u_y(x, -\frac{\pi}{4}) = 0 \ , \ u_y(x, \frac{\pi}{4}) = 0 \end{cases}$$

(4 puntos)

Métodos II (grupo C) Segundo parcial JUN 87

1 (2.5 puntos)

Sea

$$(P)\begin{cases} t^2y'' - 2y = t^2 - Bt^3 \\ y'(1) = y'(2) + Ay(2) = 0 \end{cases}$$

a) Determinar para qué valores de A y B tiene (P) infinitas soluciones.

b) Para $A = B = 0$ calcular la solución de (P) utilizando la función de Green.

2 (6 puntos)

a) Sea la ecuación (E) $u_{tt} - u_{xx} + 2u_t + u = 0$, $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$.

i. Determinar la solución de (E) que satisface $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = 0$ para todo x, utilizando transformadas de Fourier.

ii. Si $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}\pi x, & x \in [0,1] \\ 0, & x \in (-\infty,0)\cup(1,\infty) \end{cases}$ dibujar $u(x,3)$.

b) Resolver: $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + 2u_t + u = 0, & x \in [0,1], \ t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = \operatorname{sen}\pi x \\ u_t(x,0) = 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0. \end{cases}$

3 (1.5 puntos)

Calcular el valor en el origen de la solución de

$$\begin{cases} \Delta u = r\cos^2\theta, & r < 1, \ \theta \in [0,2\pi] \\ u(1,\theta) = 0 \end{cases}$$

64-26-10

87j2

53-18-29

1) (2.5) Sea la ecuación de primer orden:

$$u_t + 3t^2 u_x = \frac{2u}{t} + 6t^4 x$$

Calcular su solución general y la que satisface $u(x,1) = x^2$

2) (5) Sea $u_t - u_{xx} = 0$

$u(x,0) = 0$

$u_x(0,t) = 0$

$u_x(1,t) - u(1,t) = 1$

Hallar su solución y comprobar que tiende a ∞ cuando $t \to \infty$

3) (2.5) Sea el problema para la ecuación de ondas en el espacio con simetría radial:

$$\begin{cases} u_{tt} - \left(u_{rr} + \dfrac{2u_r}{r}\right) = 0 \\ u(r,0) = r \\ u_t(r,0) = 0 \end{cases}$$

Calcular $u(1,t)$.

METODOS MATEMATICOS II EXAMEN Septiembre 1987

2º PARCIAL

37-10-53

1) Se considera el problema para la ecuación del calor en una varilla

$$(P)\begin{cases} u_t - u_{xx} = F(x) & \text{si} \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \ t > 0 \\ u(x,0) = 0 \\ u_x\left(-\frac{\pi}{2},t\right) = u_x\left(\frac{\pi}{2},t\right) = 0 \end{cases}$$

a) Calcular la variación en el tiempo de $Q(t) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} u(x,t)\,dx$ (cantidad de calor en la varilla en el instante t) ¿Cuando permanece Q(t) constante para todo t?

b) Resolver (P) cuando: b1) $F(x) = \operatorname{sen} x$, b2) $F(x) = \operatorname{sen}^2 x$. ¿Existe $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$ en ambos casos? Discutir el resultado.

2) $u_{tt} - 2u_{tx} + u_{xx} = 2t^{-2}u$

a) Escribir en forma canónica y calcular la solución general

b) Hallar la solución que satisface $u(x,1) = 0$; $u_t(x,1) = g(x)$

c) En el caso particular $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \le 0 \\ \operatorname{sen}^4 \pi x & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases}$, hallar y dibujar $u(x,2)$

Mayo 89 (sólo para compensables del primer parcial; 56% de aprobados)

1 . Sea la ecuación de primer orden $y\,u_y + (2y-x)\,u_x = x$. **a**. Hallar la solución que satisface $u(x,1)=0$.
b. Plantear un problema de Cauchy que posea infinitas soluciones. [2 puntos]

2 . Sea $u_t - u_{xx} - au = 0$, a constante real , $0<x<3\pi$, $t>0$
$u(x,0)=1$
$u(0,t)-4u_x(0,t) = u(3\pi,t) = 0$
Determinar, según los valores de a , el límite de la solución cuando t tiende a ∞ . [3 puntos]

3 . [Las soluciones de $\Delta u = F(r)$ que sólo dependen de r satisfacen, en el plano, la ecuación $u''+r^{-1}u' = F(r)$]
Considérese el problema $u'' + r^{-1}u' = F(r)$
$u'(1)-au(1)=A$, $u'(2)+bu(2)=B$ con $a,b\geq 0$.
a. Precisar cuándo tiene solución única, cuándo no tiene solución y cuándo tiene infinitas soluciones.
b. Para $F(r)=r^{-2}$, a=1, b=0, A=B=0 calcular su solución haciendo uso de la función de Green. [3 puntos]

4 . Sea $u_{tt} - \Delta u = 0$, $r\geq 0$, $t\in\mathbf{R}$
$u(r,0) = 0,\ u_t(r,0) = g(r)$, con $g(r) = \begin{cases} 1 \text{ si } 3<r<4 \\ 0 \text{ si } 0\leq r\leq 3 \text{ ó si } 4\leq r\leq\infty \end{cases}$
Calcular $u(1,5)$ considerando el problema en 1, 2 y 3 dimensiones espaciales
(r representa la distancia al origen en los tres casos). [2 puntos]

Junio 89 (26% de aprobados)

1 . Sea el problema $y'' + 2y' + \lambda y = e^{-t}$
$y(0)+y'(0) = y(1/2) = 0$.
¿Existe algún valor de λ para el que tenga infinitas soluciones? [3 puntos]

2 . Sea $u_{tt} - u_{xx} = 0$, $x\in[0,2\pi]$, $t\in\mathbf{R}$
$u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = \begin{cases} \operatorname{sen} x \ ,\ x\in[0,\pi] \\ 0 \ ,\ x\in[\pi,2\pi] \end{cases}$
$u_x(0,t) = u_x(2\pi,t) = 0$
Calcular $u(x,2\pi)$ **i)** con la fórmula de D'Alembert, **ii)** por separación de variables. [4 puntos]

3 . Resolver $t^2u_t - u_x = g(x)$
$u(x,1) = 0$
i) a través de las características, **ii)** utilizando la transformada de Fourier [3 puntos]

Septiembre 89 (37% de aprobados)

1. Hallar la solución de $ty'' - 2y' = 1$
$y(1)-y'(1) = y(2)-2y'(2) = 0$ utilizando la función de Green. [2 puntos]

2. Sea $u_{tt} - u_{xx} = 0$, $t\geq 0$, $x\geq 0$
$u(x,0) = 1 - \cos x$
$u_t(x,0) = 0$
$u(0,t) = 0$ Hallar y dibujar $u(\pi,t)$ para $t\geq 0$. [3 puntos]

3. Resolver **a)** $u_t - 2tu_{xx} = \cos t$ $0<x<\pi$, $t>0$
$u(x,0) = \cos x$
$u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$ [3 puntos]

b) $u_t - 2tu_{xx} = 0$ $x\in\mathbf{R}$, $t>0$
$u(x,0) = \delta(x-1)$ [2 puntos]

Junio 94 (41% de aprobados)

1 . Sea [E] $u_y - 2y\,u_x = 2y\,u$.
Hallar la solución de [E] que satisface los datos de Cauchy: **i)** $u(x,1)=e^{-x}$, **ii)** $u(2y,y)=0$, discutiendo en cada caso la unicidad de las soluciones. [2 puntos]

2 . Sea el problema de contorno: $\begin{array}{l} x'' + \lambda x = 1 \\ x'(0)=x'(1)-2x(1)=0 \end{array}$.
Determinar los autovalores y autofunciones del problema homogéneo.
Precisar si el no homogéneo posee infinitas soluciones para algún valor de λ .
Calcular la solución para $\lambda=0$, haciendo uso de la fórmula de Green. [2.5 puntos]

3 . Resolver el problema para la ecuación de Laplace en el plano: $\begin{array}{l} \Delta u = \pi \ ,\ r<1 \ ,\ \theta\in(0,\pi) \\ u(r,0)=u(r,\pi)=u(1,\theta)=0 \end{array}$
Justificar si $u(\frac{1}{2},\frac{\pi}{2})$ es mayor o menor que cero. [2.5 puntos]

4 . Dado el problema: $\begin{array}{l} u_{tt} - u_{xx} = 0 \ ,\ x\geq 0 \ ,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \\ u(0,t) = t^2 \end{array}$
a) Calcular $u(1,2)$ a través de la fórmula de D'Alembert.
b) Obtener ese valor a partir de la solución por transformada seno de Fourier
[utilizando: $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} k}{k} = \frac{\pi}{2}$ y $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^3 k}{k^3} = \frac{3\pi}{8}$] [3 puntos]

Septiembre 94 (52% de aprobados)

1 . Sea el problema de Cauchy: $\begin{cases} u_y + xu_x = -x^2e^{-y} \\ u(-1,y)=0 \end{cases}$. Hallar su solución y estudiar su unicidad. [2 puntos]

2 . Hallar $u(2,3)$, si $u(r,t)$ es la solución de $\begin{cases} u_{tt} - [u_{rr} + \frac{2}{r}u_r] = 0 \ ,\ r\geq 0, t\in\mathbf{R} \\ u(r,0)=6 \\ u_t(r,0)=5r^3 \end{cases}$ [2 puntos]

3 . Estudiar según los valores de **b** cuántas soluciones posee el problema:
$\begin{cases} ty'' + 2y' = 1 \\ y'(1) = 2y'(2) + b\,y(2) = 0 \end{cases}$
Para **b=1** hallar la solución mediante la función de Green. [2 puntos]

4 . Resolver $\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \ ,\ (x,y)\in(0,1)x(0,\pi) \\ u(x,0)=u_y(x,\pi)=0 \\ u(0,y)=0,\ u(1,y)=1 \end{cases}$ [2.5 puntos]

5 . Resolver $\begin{cases} u_t - 2t\,u_{xx} = 0 \ ,\ t>0, x\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=\delta(x) \end{cases}$ [1.5 puntos]

Junio 97

(32% de aprobados)

1. Sea (E) $4y u_{yy} - u_{xx} + 2u_y = 0$. **a)** Escribirla en forma canónica para $y>0$ y para $y<0$.
b) Resolver (E) con los datos iniciales: $u(x,1) = 2x$, $u_y(x,1) = x$.

[2.5 puntos]

2. Discutir, según los valores de λ, cuántas soluciones posee el problema $\begin{cases} y'' + \lambda y = t \\ y(0) = y'(1) - y(1) = 0 \end{cases}$

[2.5 puntos]

3. Dado $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = x, \ x \in [0,\pi], t \in \mathbf{R} \\ u(x,0) = x, \ u_t(x,0) = 0 \\ u(0,t) = 0, \ u(\pi,t) = \pi \end{cases}$, hallar $u(\frac{\pi}{2},\pi)$, **a]** utilizando la fórmula de D'Alembert **b]** por separación de variables

[Indicación: sumar la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$ utilizando el desarrollo de $\pi x - x^2$ en $\operatorname{sen} nx$ en $[0,\pi]$]

[3.5 puntos]

4. Dado $\begin{cases} u_t - u_{xx} = \delta(x), \ x \in \mathbf{R}, t>0 \\ u(x,0) = 0, \ u \text{ acotada} \end{cases}$, hallar $u(0,t)$ sin que aparezcan integrales en el resultado.

[1.5 puntos]

Septiembre 97

(42% de aprobados)

1. Sea (E) $t^2 u_t + u_x = 2xu$.
a) Hallar la solución de (E) que cumple $u(x,1) = f(x)$, estudiando su unicidad.
En el caso de que sea $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ en $[0,\pi]$ y cero en el resto de **R**, hallar $u(3,1/2)$.
b) Plantear un problema de Cauchy para (E) que tenga infinitas soluciones.

[3 puntos]

2. Discutir, según las constantes c y a, cuántas soluciones tiene el problema [P] $\begin{cases} y'' + \frac{2y'}{t} = 1 + \frac{c}{t} \\ y'(1) + a y(1) = y'(2) = 0 \end{cases}$

Para **c=0** y **a=1**, hallar la solución de [P] haciendo uso de la función de Green.

[3 puntos]

3. Resolver $\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, \ x \in (0,\pi), t>0 \\ u(x,0) = 1 \\ u_x(0,t) = 0, \ u(\pi,t) = e^{-t} \end{cases}$.

[2.5 puntos]

4. Probar que $\frac{2}{3} \le u(\frac{1}{2},\frac{\pi}{2}) \le 1$, si $u(r,\theta)$ es la solución del problema para la ecuación de Laplace en el plano:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \ r<1 \\ u(1,\theta) = f(\theta) \end{cases} \quad \text{con} \quad f(\theta) = \begin{cases} 1, & 0 \le \theta \le \pi \\ 0, & \pi < \theta < 2\pi \end{cases}$$

[1.5 puntos]

Junio 1998

(51% de aprobados)

(elegir 4 de los 5 problemas)

1. Resolver $\begin{cases} y^3 u_y - 2u_x = 2y^2 u \\ u(x,1) = x \end{cases}$, precisando si la solución es única o no.

2. Sea $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, \ x \ge 0, \ t \in \mathbf{R} \\ u(x,0) = \cos x \\ u_t(x,0) = 0 \\ u(0,t) = 1 \end{cases}$. Dibujar y hallar la expresión analítica de $u(x,2\pi)$.

3. Sea $\begin{cases} y'' - y' = e^t - K \\ y'(0) + \alpha y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$.

Hallar los valores de las constantes reales K y α para los que el problema posee infinitas soluciones.

4. Resolver por separación de variables: $\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = \pi, \ r<1, \ \theta \in (0,\pi/2) \\ u_r(1,\theta) = \cos\theta \\ u_\theta(r,0) = u(r,\pi/2) = 0 \end{cases}$.

5. Deducir una fórmula para la solución de $\begin{cases} u_t - u_{xx} + u = 0, \ x \in \mathbf{R}, t>0 \\ u(x,0) = f(x), \ u \text{ acotada} \end{cases}$.

Hallar la solución explícita en el caso de que sea $f(x) \equiv 1$.

Septiembre 1998

(40% de aprobados)

(elegir 4 de los 5 problemas)

1. Resolver $\begin{cases} u_t + 4t^3 u_x = 4t^3 u \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$, **a)** a traves de las características, **b)** utilizando transformadas de Fourier.

2. Sea $y u_{yy} + 2y^2 u_{xy} + y^3 u_{xx} - u_y = 0$. Escribirla en forma canónica, hallar su solución general y hallar la o las soluciones que satisfacen $u(x,2) = x$, $u_y(x,2) = 0$.

3. Sea $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, \ x \in [0,2], t \in \mathbf{R} \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \\ u(0,t) = u(2,t) = t^2 \end{cases}$. Hallar $u(1,3)$.

4. Sea $\begin{cases} t^2 y'' - 2t y' + 2y = 2 \\ y(1) = 0, \ y'(2) - y(2) = 0 \end{cases}$. Hallar su función de Green y resolverlo.

5. Resolver por separación de variables: $\begin{cases} u_t - u_{xx} + u = 0, \ x \in (0,\pi), t>0 \\ u(x,0) = \cos x \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 \end{cases}$.

Junio 1999

(27% de aprobados)

(elegir 3 de los 4 problemas)

5. Resolver $\begin{cases} 2yu_y + xu_x = x^2 y \\ u(2,y) = 2y \end{cases}$. ¿Es única la solución?

6. Dado $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \operatorname{sen} x, \ x\in[0,\pi], t\in\mathbf{R} \\ u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = 1 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{cases}$, hallar $u(x,\pi)$.

7. Dado el problema: $\begin{cases} y'' + c^2 y = 1 \\ y'(0) - y(0) = y'(1) = 0 \end{cases}$,

determinar si existe algún valorde la constante c para el que tenga infinitas soluciones.

8. Resolver $\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + 6u_y = 0 \text{ en } (0,\pi)\times(0,\pi) \\ u\big|_{y=0} = 0 \ , \ u\big|_{y=\pi} = \cos 4x \\ u_x\big|_{x=0} = 0 \ , \ u_x\big|_{x=\pi} = 0 \end{cases}$.

Septiembre 1999

(26% de aprobados)

(elegir 3 de los 4 problemas)

5. Sean la ecuación de primer orden $x^2 u_y + y^2 u_x = 6x^2y^2 u$ y los datos de Cauchy: $\begin{cases} \text{i] } u(x,x) = 0 \\ \text{ii] } u(x,-x) = 1 \end{cases}$.
Hallar la solución única que satisface uno de esos datos y dos soluciones que cumplan el otro.

6. Dado $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \ , \ x\in[0,\pi], t\in\mathbf{R} \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = t \end{cases}$, hallar $u(x,\pi/2)$.

7. Hallar la función de Green del problema: $\begin{cases} t^2 y'' - 2y = 2t \\ y'(1) - 2y(1) = y(2) = 0 \end{cases}$, y utilizarla para hallar su solución.

8. Resolver por separación de variables: $\begin{cases} u_t - u_{xx} + \frac{u}{t} = 2 \ , \ x\in(0,\pi), t>0 \\ u(x,1) = \cos x \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 \end{cases}$.

Junio 2000

(40% de aprobados)

(elegir 2 de los 4 problemas; entregando 3, se toman las dos mejores notas)

5. Resolver $\begin{cases} yu_{yy} - xu_{xy} = 0 \\ u(x,2) = x \ , \ u_y(x,2) = 1 \end{cases}$.

6. Dado $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \ , \ x\geq 0, t\in\mathbf{R} \\ u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = 3x^2 \\ u(0,t) = 0 \end{cases}$, hallar $u(1,t)$ para $t\geq 0$.

7. Precisar, si existe, un valor de $\lambda>0$ para el que tenga solución única el problema $\begin{cases} y'' + \lambda y = 1 \\ y(0) = y'(0) \ , \ y(1) = 2 \end{cases}$.

8. Resolver el problema para la ecuación de Laplace en el plano: $\begin{cases} \Delta u = r\operatorname{sen} 6\theta \ , \ r<1, \ 0<\theta<\frac{\pi}{2} \\ u(r,0) = u(r,\pi/2) = 0 \\ u_r(1,\theta) = 0 \end{cases}$.

Septiembre 2000

(30% de aprobados)

(elegir 2 de los 4 problemas; entregando 3, se toman las dos mejores notas)

5. Resolver $\begin{cases} 2yu_y + xu_x = 2x^2 \\ u(x,1) = 0 \end{cases}$.

6. Dado $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 3x^2, \ x\geq 0, t\in\mathbf{R} \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \\ u(0,t) = 0 \end{cases}$, hallar $u(1,3)$.

7. Precisar, si existe, un valor de b para el que $\begin{cases} t^2 y'' - 2y = t \\ 2y'(1) + 5y(1) = 0 \\ y'(2) + by(2) = 0 \end{cases}$ tenga infinitas soluciones.

8. Resolver por separación de variables: $\begin{cases} u_t - u_{xx} + 2tu = 0 \ , \ x\in(0,\pi), t>0 \\ u(x,0) = \operatorname{sen} x \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{cases}$.