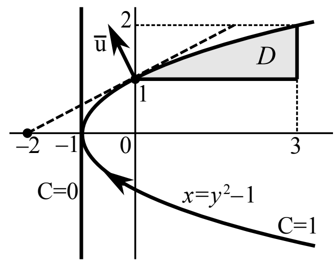
# **Soluciones del control 1 de Métodos Matemáticos** (19 de octubre de 2021)

**1.** Sea $f(x,y)=\frac{x+1}{y^2}$. **a]** Dibujar las curvas de nivel $f=0$ y $f=1$. Calcular $\nabla f(0,1)$ y $\Delta f$. [0.3+0.1+0.15+0.45]

**b] Elegir** entre: **b$_1$]** Hallar la ecuación del plano tangente a $f$ en el punto $(0,1)$. **b$_2$]** Dar el vector $\bar u$ unitario para el que $D_{\bar u}f(0,1)$ es mínima.

**c]** Si $\bar c(t)=(e^{2t}-1,e^t)$, **elegir** entre: **c$_1$]** Hallar el punto en que la recta tangente a $\bar c(t)$ en $(0,1)$ corta $y=0$. **c$_2$]** Si $h(t)=f\big(\bar c(t)\big)$, hallar $h'(0)$ mediante la regla de la cadena en $\mathbf{R}^n$.

**d]** Calcular $\iint_D f$, con $D$ menor región acotada por la parábola $x=y^2-1$ y las rectas $y=1$ y $x=3$. [1 pto]




**a]** $f=0 \to x=-1$. $f=1 \to x=y^2-1$ parábola (mejor que $y=\pm\sqrt{x+1}$).

$\nabla f=\left(\frac{1}{y^2},\frac{-2x-2}{y^3}\right)$. $\boxed{\nabla f(0,1)=(1,-2)}$. $\Delta f=f_{xx}+f_{yy}=\boxed{\frac{6x+6}{y^4}}$.

**b$_1$]** $f(0,1)=1$. Plano tangente: $z=1+(x-0)-2(y-1)$, $\boxed{z=x-2y+3}$.

**b$_2$]** $D_{\bar u}$ mínima en el sentido opuesto al gradiente $\Rightarrow$ $\boxed{\bar u=\left(-\frac{1}{\sqrt5},\frac{2}{\sqrt5}\right)}$.

**c]** $\bar c(0)=(0,1)$, $\bar c\,'(0)=\big(2e^{2t},e^t\big)\big|_{t=0}=(2,1)$,

**c$_1$]** Tangente: $\bar x=(2t,1+t)$ corta en $\boxed{(-2,0)}$.

**c$_2$]** $h'(0)=\nabla f(0,1)\cdot\bar c\,'(0)=(1,-2)\cdot(2,1)=\boxed{0}$.

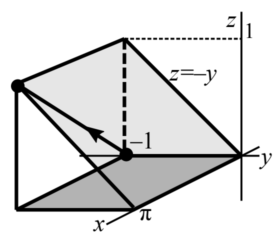
[Componiendo era claro: $h(t)=\frac{e^{2t}}{e^{2t}}=1$, $h'(0)=0$. $\bar c(t)$ es la curva de nivel dada de otra forma].

**d]** $\displaystyle\int_1^2\int_{y^2-1}^3\frac{x+1}{y^2}\,dx\,dy=\int_1^2\left[\frac{9-(y^2-1)^2}{2y^2}+\frac{4-y^2}{y^2}\right]dy=\int_1^2\left(\frac{8}{y^2}-\frac{y^2}{2}\right)dy=\left[-\frac{8}{y}-\frac{y^3}{6}\right]_1^2=\boxed{\frac{17}{6}}$.

O bien $\displaystyle\int_0^3\int_1^{\sqrt{x+1}}\frac{x+1}{y^2}\,dy\,dx=\int_0^3\left[-\frac{x+1}{y}\right]_1^{\sqrt{x+1}}dx=\int_0^3\left(x+1-\sqrt{x+1}\right)dx=3+\left[\frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\right]_0^3=\boxed{\frac{17}{6}}$.

**2.** Sea $\bar f(x,y,z)=(y\cos x,\operatorname{sen}x,1)$. **a]** Hallar $\operatorname{div}\bar f$ y $\operatorname{rot}\bar f$. ¿Es $\bar f$ conservativo? **b]** Dibujar la región $V$ acotada por $x=0$, $x=\pi$, $y=-1$, $z=0$, $y+z=0$ y calcular $\iiint_V\operatorname{div}\bar f$. **c]** Hallar de dos formas distintas el valor de la integral de linea de $\bar f$ entre $(0,-1,0)$ y $(\pi,-1,1)$ sobre el segmento que une los puntos. [0.15+0.35+0.5 = 1 pto]

**a]** $\operatorname{div}\bar f=f_x+g_y+h_z=\boxed{-y\operatorname{sen}x}$. $\operatorname{rot}\bar f=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \partial/\partial x&\partial/\partial y&\partial/\partial z\\ y\cos x&\operatorname{sen}x&1\end{vmatrix}=(0,0,\cos x-\cos x)=\boxed{\bar 0}$ y $\bar f\in C^1\Rightarrow$ conservativo.




**b]** $\displaystyle\iiint_V\operatorname{div}\bar f=-\int_0^\pi\int_{-1}^0\int_0^{-y}y\operatorname{sen}x\,dz\,dy\,dx=\int_0^\pi\operatorname{sen}x\,dx\int_{-1}^0y^2\,dy=\big[-\cos x\big]_0^\pi\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^0=\boxed{\frac23}$.

**c]** Con la definición. La parametrización más fácil es: $\bar c(t)=(\pi t,-1,t)$, $t\in[0,1]$.

$\displaystyle\oint_{\bar c}\bar f\cdot d\bar s=\int_0^1(-\cos\pi t,\operatorname{sen}\pi t,1)\cdot(\pi,0,1)\,dt=\int_0^1(1-\pi\cos\pi t)\,dt=1-\big[\operatorname{sen}\pi t\big]_0^1=\boxed{1}$.

Con el potencial: $\begin{array}{l}U_x=y\cos x\to U=y\operatorname{sen}x+p(y,z)\\ U_y=\operatorname{sen}x\to U=y\operatorname{sen}x+q(r,z)\\ U_z=1\to U=z+r(x,y)\end{array}$ $\to U(x,y)=y\operatorname{sen}x+z$, $\displaystyle\oint_{\bar c}\bar f\cdot d\bar s=1-0=\boxed{1}$.

## **Soluciones del control 2 de Métodos Matemáticos** (30 de noviembre de 2021)

**1. a]** Sea $\begin{cases} y''-2y'+\lambda y=0 \\ y'(-1)=y(0)=0 \end{cases}$. Estudiar si $\lambda=0$ y $\lambda=1$ son o no autovalores, escribiendo la autofunción en caso afirmativo. [0.7 pt]

**b]** Hallar la solución general de $y''-2y'=2e^x$. ¿Tiene solución única cumpliendo esos datos de contorno?

**a]** $\lambda=0$, $\mu^2-2\mu=0$, $\mu=0,2$, $y=c_1+c_2\,e^{2x} \to \begin{cases} y'(-1)=2c_2\,e^{-2}=0 \\ y(0)=c_1+c_2=0 \end{cases}$, $c_2=c_1=0$, $y\equiv 0$. **No es autovalor**.

$\mu^2-2\mu+1=0$, $\mu=1$ doble, $\begin{matrix} y=(c_1+c_2x)\,e^x \\ y'=(c_2+c_1+c_2x)\,e^x \end{matrix} \to \begin{cases} y'(-1)=c_1\,e^{-1}=0 \\ y(0)=c_1=0 \end{cases}$, $\forall c_2$. **Autovalor** con $\boxed{\{x\,e^x\}}$.

**b]** $y_p=Ae^x$ ($\mu=1$ no autovalor) $\to Ae^x-2Ae^x=2e^x$, $A=-2$. La solución general es: $\boxed{y=c_1+c_2\,e^{2x}-2e^x}$.

Como el homogéneo tenía sólo la solución trivial $y\equiv 0$, el no homogéneo tiene seguro **solución única**.

[Si impusiésemos los datos a la última solución quedarían $c_1$, $c_2$ determinados. Aunque no se pide, lo hacemos:

$\begin{cases} y'(-1)=2c_2\,e^{-2}-2e^{-1}=0\,, & c_2=e \downarrow \\ y(0)=c_1+c_2-2=0 & c_1=2-e \end{cases}$ y la solución única es $y=2-e+e^{2x+1}-2e^x$ ].

**2.** Sea $yu_y-u_x=y^2e^x$. Hallar sus características y, usando la regla de la cadena, la ecuación para $u_\eta$. Calcular su solución general y la única que satisface el dato inicial $u(x,1)=0$. [0.6 pt]

$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{1}$, $y=Ce^{-x}$, $\underbrace{\boxed{ye^x=C}}_{\text{características}}$. $\begin{cases} \xi=ye^x \\ \eta=y \end{cases}$, $\begin{cases} u_y=e^xu_\xi+u_\eta \\ u_x=ye^xu_\xi \end{cases}$, $u_\eta=ye^x=\xi$, $u=\xi\eta+p(\xi)$, $\underbrace{\boxed{u(x,y)=y^2e^x+p\big(ye^x\big)}}_{\text{solución general}}$.

O bien: $\begin{cases} \xi=y\,e^x \\ \eta=x \end{cases}$, $\begin{cases} u_y=e^xu_\xi \\ u_x=ye^xu_\xi+u_\eta \end{cases}$, $u_\eta=-\xi^2e^{-\eta}$, $u=\xi^2,e^{-\eta}+p(\xi)=y^2e^x+p\big(ye^{-x}\big)$ (la de arriba).

$u(x,1)=e^x+p\big(e^x\big)=0$, $p(v)=-v$, $u=y^2e^x-ye^x$, $\boxed{u(x,y)=\big(y^2-y\big)e^x}$ [Fácil de comprobar].

**2*.** Escribir $u_{yy}+2u_{xy}+u_{xx}-2u_y-2u_x+au=0$ en forma canónica y hallar su solución general si $\begin{matrix} a=0, \\ a=1. \end{matrix}$ [0.6 pt]

$\begin{matrix} B^2-4AC=0 \\ \text{parabólica} \end{matrix}$ $\begin{cases} \xi=x-y \\ \eta=y \end{cases} \to \begin{cases} u_y=-u_\xi+u_\eta \\ u_x=u_\xi \end{cases}$, $\begin{cases} u_{yy}=u_{\xi\xi}-2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta} \\ u_{xy}=-u_{\xi\xi}+u_{\xi\eta} \\ u_{xx}=u_{\xi\xi} \end{cases} \to \boxed{u_{\eta\eta}-2u_\eta+au=0}$ forma canónica

[Similar a la ecuación de **1.**]

Si $a=0$, $\mu^2-2\mu=0$, $\mu=0,2 \to u=p(\xi)+q(\xi)\,e^{2\eta}$, $\boxed{u(x,y)=p(x-y)+q(x-y)\,e^{2y}}$ solución general

Si $a=1$, $\mu^2-2\mu+1=0$, $\mu=1$ doble $\to u=\big[p(\xi)+q(\xi)\eta\big]e^\eta$, $\boxed{u(x,y)=\big[p(x-y)+yq(x-y)\big]\,e^y}$ solución general

**3.** Sea $\begin{cases} u_t-2tu_{xx}=0\,,\ x\in\big(0,\frac{\pi}{2}\big)\,,\ t>0 \\ u(x,0)=f(x),\ u_x(0,t)=u\big(\frac{\pi}{2},t\big)=0 \end{cases}$. Hallar su solución si i) $f(x)=\cos 3x$ y el primer término de la serie solución si ii) $f(x)=\operatorname{sen} x$. [0.7 pt]

[Separar variables, dar las autofunciones $X_n$ y los $T_n$, imponer a una serie el dato inicial e identificar el único $c_n$ no nulo en el caso i) o hallar el $c_1$ con una integral para el ii)].

$u=XT \to \frac{X''}{X}=\frac{T'}{2tT}=-\lambda \to \begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X'(0)=X\big(\frac{\pi}{2}\big)=0 \end{cases} \to \lambda_n=(2n-1)^2,\ X_n=\{\cos(2n-1)x\}$, $n=1,2,\dots$

Y además: $T'=-2\lambda tT \to T=Ce^{-\lambda t^2}$, $T_n=\big\{e^{-(2n-1)^2t^2}\big\}$. Cumple todo menos el dato inicial la serie:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\,e^{-(2n-1)^2t^2}\cos(2n-1)x \to u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos(2n-1)x=f(x)\,,\ c_n=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}f(x)\cos(2n-1)x\,dx\,.$$

Para i) se ve claro que es $c_2=1$ y el resto $0$, con lo que la solución es $\boxed{u(x,t)=e^{-9t^2}\cos 3x}$.

Para ii) hay que integrar. Sólo se pide $c_1=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}x\cos x\,dx=\frac{2}{\pi}\operatorname{sen}^2x\Big]_0^{\pi/2}=\frac{2}{\pi}$. La solución empieza por:

$$\boxed{u(x,t)=\frac{2}{\pi}\,e^{-t^2}\cos x+\cdots}$$