Soluciones del control 1 de Métodos Matemáticos (15 de octubre de 2019)

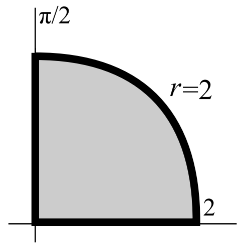
1. Sea $f(x,y)=x^2(x^2+y^2)$. **a]** Hallar $\nabla f(1,-1)$, Δf y el vector $\overline{u}$ unitario que hace máxima la $D_{\overline{u}}f(1,-1)$.
b] Calcular en polares $\iint_D f$, siendo D la parte del círculo $x^2+y^2\le 4$ con $x,y\ge 0$. [0.3+0.4=0.7 puntos]

a] $f_x=4x^3+2xy^2$, $f_y=2x^2y$. $\boxed{\nabla f(1,-1)=(6,-2)}$. $\Delta f=f_{xx}+f_{yy}=\boxed{14x^2+2y^2}$.

$D_{\overline{u}}f$ es máxima en el sentido del gradiente $\big[$o de $(3,-1)\big]$. $\boxed{\overline{u}=\left(\frac{3}{\sqrt{10}},-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)}$.

b] $x^2+y^2=r^2$, $J=r$, $\iint_D f=\int_0^{\pi/2}\int_0^2 r^5\cos^2\theta\,dr\,d\theta=\frac{1}{12}\big[r^6\big]_0^2\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2\theta)\,d\theta$

$=\frac{16}{3}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\operatorname{sen}\pi-\operatorname{sen}0}{2}\right)=\boxed{\frac{8\pi}{3}}$.



2. Sea $F(x,y,z)=x\,e^{2y-z}$. **a]** Hallar $\nabla F(1,-1,-2)$ y la ecuación del plano tangente a $F=1$ en el punto $(1,-1,-2)$.

Elegir b o b*. [0.2+0.4=0.6 puntos]

b] Encontrar el valor de la integral de línea i) de ∇F, ii) de F, desde $(2,0,0)$ hasta $(0,1,2)$, siguiendo el segmento que une esos puntos.

b*] Calcular $\iiint_V F$, con V región limitada por los planos $x=0$, $x=2$, $y=1$, $z=0$, $z=2y$.

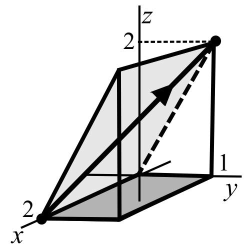
a] $\nabla F=\left(e^{2y-z},2x\,e^{2y-z},-x\,e^{2y-z}\right)\xrightarrow{(1,-1,-2)}\boxed{(1,2,-1)}$. Plano: $(1,2,-1)\cdot(x-1,y+1,z+2)=0\to\boxed{z=x+2y-1}$.

b] i) Es muy fácil: $\int_{\overline{c}}\nabla F\cdot d\overline{s}=F(0,1,2)-F(2,0,0)=0-2=\boxed{-2}$.

ii) Necesitamos parametrizar el segmento: $\overline{c}(t)=(2-2t,t,2t)$, $t\in[0,1]$.

$\overline{c}\,'(t)=(-2,1,2)$, $\|\overline{c}\,'(t)\|=3$. $\int_{\overline{c}}F\,ds=\int_0^1(2-2t)3\,dt=\boxed{3}$.

b*] $\iiint_V F=\int_0^2\int_0^1\int_0^{2y}x\,e^{2y-z}dz\,dy\,dx=\int_0^2 x\,dx\int_0^1\left(e^{2y}-1\right)dy=\boxed{e^2-3}$.



3. Sean la curva cerrada C^1 a trozos definida por $\overline{c}(t)=\begin{cases}(t,t^2-2), & t\in[-1,2]\\(4-t,4-t), & t\in[2,5]\end{cases}$ y el campo $\overline{f}(x,y)=(0,2x)$.
a] Hallar la recta tangente a la curva en el punto $(1,-1)$ y dibujar ambas. **b]** Hallar $\operatorname{div}\overline{f}$. ¿Es $\overline{f}$ conservativo?
c] Calcular $\oint_{\overline{c}}\overline{f}\cdot d\overline{s}$ [o directamente o con el teorema de Green, como se prefiera]. [0.3+0.1+0.3=0.7 puntos]

a] El primer tramo de la curva es la parte de la parábola $y=x^2-2$ que va desde $(-1,-1)$ y hasta $(2,2)$ $\big[$y que pasa también por $(0,-2)$ y $(1,-1)\big]$.
El segundo es un segmento de $y=x$ que sale de $(2,2)$ y acaba en $(-1,-1)$.
El punto $(1,-1)$ se alcanza cuando $t=1$ (en el primer tramo de la curva).
$\overline{c}\,'(1)=(1,2t)\big|_{t=1}=(1,2)$. Recta tangente: $\overline{x}=(1,-1)+t(1,2)=(t+1,2t-1)$.

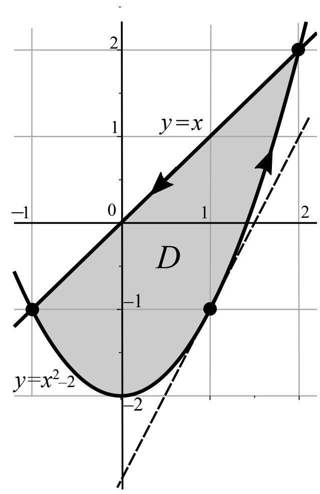
b] $\operatorname{div}\overline{f}=f_x+g_y=0$. Como $g_x-f_y=2\neq 0$, **no deriva de un potencial**.

c] Directamente: $\oint_{\overline{c}}\overline{f}\cdot d\overline{s}=\int_{-1}^2(0,2t)\cdot(1,2t)\,dt+\int_2^5(0,8-2t)\cdot(-1,-1)\,dt$

$=\int_{-1}^2 4t^2dt+\int_2^5(2t-8)\,dt=\frac{4}{3}t^3\big]_{-1}^2+t^2\big]_2^5-24=\boxed{9}$.

Con Green: $\iint_D 2\,dx\,dy=\int_{-1}^2\int_{x^2-2}^x 2\,dy\,dx=\int_{-1}^2\left(2x-2x^2+4\right)dx$

$=x^2-\frac{2}{3}x^3\big]_{-1}^2+12=3-6+12=\boxed{9}$.



Soluciones del control 2 de Métodos Matemáticos (26 de noviembre de 2019)

1. Sea [E] $2xu_y - u_x = 2xu$. Hallar sus características y, usando la regla de la cadena, la ecuación para u_η . Calcular la solución general de [E] y la única que satisface el dato inicial $u(2,y)=1$. [0.5 puntos]

$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{1}$, $y=-x^2+C$. $\boxed{y+x^2=C}$ características (son parábolas).

$\begin{cases}\xi=y+x^2\\ \eta=y\end{cases}$, $\begin{cases}u_y=u_\xi+u_\eta\\ u_x=2xu_\xi\end{cases}$, $2xu_\eta=2xu$, $u_\eta=u \rightarrow u=p(\xi)\,e^\eta$. $\boxed{u(x,y)=p\big(y+x^2\big)\,e^y}$ solución general

O bien: $\begin{cases}\xi=y+x^2\\ \eta=x\end{cases}$, $\begin{cases}u_y=u_\xi\\ u_x=2xu_\xi+u_\eta\end{cases}$, $u_\eta=-2\eta u \rightarrow u=q(\xi)\,e^{-\eta^2}=q\big(y+x^2\big)\,e^{-x^2}$ (se parece).

$u(2,y)=p(y+4)\,e^y=1$, $p(y+4)=e^{-y}$, $p(v)=e^{4-v}$, $u=e^{4-y-x^2+y}$, $\boxed{u(x,y)=e^{4-x^2}}$.

O bien (más corto esto): $q(y+4)\,e^{-4}=1$, $q(v)=e^4$, $u=e^{4-x^2}$. $\big[$Comprobando: $u(2,y)=e^0$. $0-u_x=2xe^{4-x^2}=2xu\,\big]$.

1*. Sea $u_{yy}-u_{xx}-2u_y+2u_x=4$. Escribirla en forma canónica y hallar su solución general. [0.5 puntos]

$B^2-4AC=0$ hiperbólica $\begin{cases}\xi=x+y\\ \eta=x-y\end{cases} \rightarrow \begin{cases}u_y=u_\xi-u_\eta\\ u_x=u_\xi+u_\eta\end{cases}$, $\begin{cases}u_{yy}=u_{\xi\xi}-2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\\ u_{xx}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\end{cases} \rightarrow \boxed{u_{\xi\eta}-u_\eta=-1}$ forma canónica

$u_\eta=v \rightarrow v_\xi=v-1$, $v=p^*(\eta)\,e^\xi+1 \rightarrow u=p(\eta)\,e^\xi+q(\xi)+\eta$, $\boxed{u(x,y)=p(x-y)\,e^{x+y}+q(x+y)+x-y}$ solución general

2. a] Sea $\begin{cases}y''-2y'+\lambda y=0\\ y'(-1)=y(0)=0\end{cases}$. Probar que $\lambda=1$ es autovalor, escribiendo su autofunción y_1 , poner la ecuación en forma autoadjunta y hallar $\langle y_1,y_1\rangle$. ¿Es $\lambda=0$ autovalor? [0.5+0.3=0.8 pts]

b] Hallar la solución general de $y''-2y'=4$ y la que cumple los datos iniciales $y(0)=y'(0)=0$.

a] De coeficientes constantes. $\mu^2-2\mu+\lambda=0 \rightarrow \mu=1\pm\sqrt{1-\lambda}$.

$\lambda=1$, $\mu=1$ doble, $y=(c_1+c_2x)\,e^x \rightarrow \begin{cases}y'(-1)=c_1\,e^{-1}=0\\ y(0)=c_1=0\end{cases} \rightarrow c_1=0$, $\forall c_2$. **Autovalor** con $\boxed{y_1=\{x\,e^x\}}$.

$\big(e^{-2x}y'\big)'+\lambda\,e^{-2x}y=0$. Peso $r(x)=e^{-2x}$. $\langle y_1,y_1\rangle=\int_{-1}^0 e^{-2x}e^{2x}x^2dx=\frac{1}{3}x^3\big]_{-1}^0=\boxed{\frac{1}{3}}$.

$\lambda=0$, $\mu=0,2 \rightarrow y=c_1+c_2e^{2x} \rightarrow \begin{cases}y'(-1)=2c_2\,e^{-2}=0\\ y(0)=c_1+c_2=0\end{cases} \rightarrow c_1=c_2=0$. $\lambda=0$ **no es autovalor**.

b] $y_p=Ax$ ($\mu=0$ autovalor) $\rightarrow -2A=4$, $y=c_1+c_2e^{2x}-2x$ solución general $\xrightarrow{d.i.} \begin{cases}c_1+c_2=0 & c_1=-1\\ 2c_2-2=0, & c_2=1\end{cases}$, $\boxed{y=e^{2x}-2x-1}$.

$\Big[$Dos camino más largos: $\begin{vmatrix}1 & e^{2x}\\ 0 & 2e^{2x}\end{vmatrix}=2e^{2x}$, $y_p=e^{2x}\int 2e^{-2x}-\int 2=\cdots$ o $y'=v \rightarrow v'=2v+4$, $v=Ce^{2x}-2\ \ldots\Big]$.

3. a] Calcular la solución $T(t)$ de $T'=-\frac{1}{t}T+2$ que cumple el dato inicial $T(1)=0$. [0.2+0.5=0.7 pts]

b] Resolver $\begin{cases}u_t-\frac{1}{t}u_{xx}=2\,\text{sen}\,x\,,\ x\in\big(0,\frac{\pi}{2}\big)\,,\ t>0\\ u(x,1)=\text{sen}\,3x\,,\ u(0,t)=u_x\big(\frac{\pi}{2},t\big)=0\end{cases}$. [Separar variables, hallar las autofunciones del homogéneo, llevar una serie a la EDP y al dato incial y calcular los dos únicos T_n que no son nulos].

a] $e^{\int a}=e^{-lnt}=\frac{1}{t} \rightarrow T=\frac{C}{t}+\frac{1}{t}\int 2t\,dt=\frac{C}{t}+t \xrightarrow{d.i.} \boxed{t-\frac{1}{t}}$.

b] $u=XT \rightarrow \frac{X''}{X}=\frac{tT'}{T}=-\lambda \rightarrow \begin{cases}X''+\lambda X=0\\ X(0)=X'\big(\frac{\pi}{2}\big)=0 \text{ (de los datos de contorno)}\end{cases} \rightarrow X_n=\{\text{sen}(2n-1)x\}$, $n=1,2,\ldots$

$\big[$Y además: $T'=-\frac{\lambda}{t}T$ que ahora no usamos por ser un problema no homogéneo$\big]$. Probamos entonces:

$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\,\text{sen}\,nx \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\Big[T_n'+\frac{(2n-1)^2}{t}T_n\Big]\text{sen}(2n-1)x=2\,\text{sen}\,x$ (ya desarrollada en senos impares).

Y del dato incial se obtiene $u(x,1)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(1)\,\text{sen}(2n-1)x=0$ (también desarrollada). Son no nulos:

$\begin{cases}T_1'+\frac{1}{t}T_1=2\\ T_1(1)=0\end{cases} \xrightarrow{\textbf{a]}} T_1=t-\frac{1}{t}$. $\begin{cases}T_3'=-\frac{9}{t}T_3\\ T_3(1)=1\end{cases} \rightarrow T_3=\frac{1}{t^9}$. $\boxed{u(x,t)=\big(t-\frac{1}{t}\big)\,\text{sen}\,x+\frac{1}{t^9}\text{sen}\,3x}$.