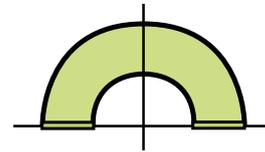
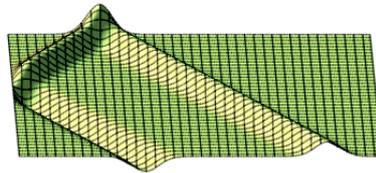
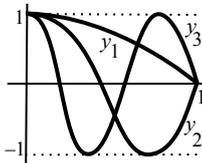
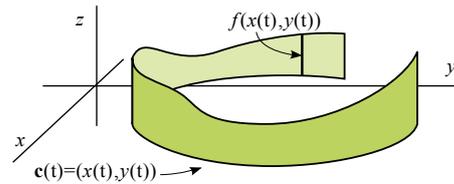
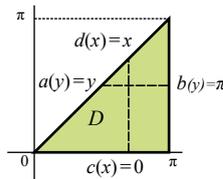
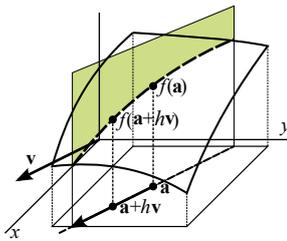


# NOTAS DE MÉTODOS MATEMÁTICOS

(ingeniería de materiales)



**Pepe Aranda**

pparanda@ucm.es

<https://teorica.fis.ucm.es/pparanda>

Departamento de Física Teórica

Facultad de Físicas. UCM

[www.ucm.es/ft2mm](http://www.ucm.es/ft2mm)

## Índice

### Bibliografía. Sobre estos apuntes

### Introducción

#### 1. Cálculo diferencial en $\mathbb{R}^n$

- 1.1 Campos escalares y sus derivadas 1
- 1.2 Campos vectoriales. Regla de la cadena 8

#### 2. Cálculo integral en $\mathbb{R}^n$

- 2.1 Integrales múltiples. Cambios de variable 13
- 2.2 Integrales de línea 20

#### 3. Ecuaciones diferenciales ordinarias

- 3.1 Algunas EDOs de primer orden resolubles 27
- 3.2 EDOs lineales de orden 2 resolubles elementalmente 29
- 3.3 Autovalores y autofunciones de problemas de contorno 33
- 3.4 Series de Fourier 37

#### 4. Ecuaciones en derivadas parciales

- 4.1 EDPs de primer orden 41
- 4.2 Orden 2. Clasificación y problemas clásicos 43
- 4.3 Separación de variables. Ecuación del calor 47
- 4.4 Ondas. D'Alembert y separación de variables 52
- 4.5 Separación de variables para Laplace 57

#### 5. Otros temas más allá del curso

- 5.1 Integrales de superficie 61
- 5.2 Soluciones de EDOs por medio de series 63
- 5.3 Problemas más complicados por separación de variables 66
- 5.4 La transformada de Fourier 70

**Problemas** I-VII

Problemas adicionales i-viii

## Sobre estos apuntes

**Versión 2021.** Se cambian los problemas para incluir de los exámenes de los 2 últimos años. Retoques mayores se irán haciendo en los [resúmenes para las clases](#) que se irán publicando y actualizando a lo largo del curso.

**Versión 2020.** No cambiaron estas notas (sólo fechas y leves retoques), pero se crearon [versiones resumidas de las secciones en formato horizontal](#) para ser utilizados como transparencias en las clases.

**Versión 2019.** Abundantes cambios. Los principales: las secciones adicionales se fueron a un [capítulo 5 final](#) y se fusionaron los capítulos 3 y 4 (EDOs y problemas de contorno), aumentando, de paso, los ejemplos en varias secciones. También se cambiaron y añadieron ejemplos y explicaciones al (nuevo) 4. Los márgenes de los apuntes se redujeron ligeramente. Los problemas siguieron la nueva estructura y recogieron los de exámenes del previo. Hay 2 páginas de introducción, 60 de temas básicos, 12 de [temas más allá del curso](#) y los 7 habituales de problemas (sin contar los [adicionales](#) o del [tema 5](#)).

**Versiones 2017 y 2018.** Sólo cambios en los problemas, incluyendo como cada año los de exámenes de cada curso anterior y algunas pequeñas correcciones en teoría.

**Versión 2016.** Otra vez bastantes ejemplos nuevos. En el tema 1 más de curvas, de regla de la cadena y de repaso. En el 2, sobre todo de integrales de línea. Cada uno aumenta en 2 páginas. En el 3 se extienden las ecuaciones de primer orden y se acortan más las soluciones por series. En el 4 hay ejemplos nuevos de series de Fourier. Algún cambio en el 5 y bastante negrita para marcar diferencias entre homogéneos y no homogéneos. La versión tiene 74 páginas de teoría (contando la introducción) y 7 de problemas (con cambios).

**Versión 2015.** Bastantes pequeños cambios (también las fuentes de LaTeX). Además de los cambios habituales en problemas de cada curso los más importantes fueron:

Se incluyó en 1.1 un repaso de rectas y planos y se quitó la página informativa sobre Taylor y máximos. En 1.2 se cuentan antes las funciones vectoriales que el caso general de campos vectoriales. En el 2 se quitó teoría a cambio de ejemplos. Se introdujeron con más detalle cilíndricas y esféricas.

Las EDOs de primer orden fueron al principio del 3. Se acortaron las soluciones por series. En 4 cambiaron detalles intentando dejar más claro algún tema sencillo. Se llevaron a 5.6 ('problemas más complicados por separación de variables') los ejemplos no preguntables. La transformada del Fourier pasó a 5.7.

**Versión 2014.** El cambio más radical fue la fusión de los capítulos 5 y 6 en uno con todas las EDPs. El objetivo era presentar antes la separación de variables, que pocos llegaban a estudiar. En 5.3 se resuelve ya la ecuación del calor. La fórmula de D'Alembert se unió a la separación de variables para ondas en 5.4. 5.5 es para Laplace. La transformada de Fourier fue al 5.6 y los problemas en más variables al 5.7 (secciones no exigidas en exámenes). Se incluyeron además más ejemplos en 5.1.

Los capítulos 1 y 2 aumentaron en dos páginas cada uno por la presencia de nuevos ejemplos (del tipo de los de exámenes): más curvas de nivel y derivadas direccionales, más integrales de línea... El 3 tuvo pequeños cambios y el 4 casi ninguno. Y se añadió un repaso de series, por si no se habían visto en Matemáticas I.

Los problemas como siempre se retocaron (bastante por la reorganización de temas), incluyendo exámenes y controles del curso anterior y retirando otros menos básicos. Aparecieron por primera vez los 'problemas adicionales' (de temas laterales). Novedad visual importante fueron los nuevos colores. Color verde claro para los [ejemplos de temas exigibles](#). Y un color gris para [ejemplos a título informativo](#).

**Versión 2013.** Para simplificar la asignatura (ante las dificultades del curso anterior), se quitaron los problemas más complicados y se pusieron otros más sencillos (entre ellos los de los exámenes). Se precisaron las secciones no preguntables, poniendo en gris sus titulares. Hubo bastantes cambios menores en teoría y de ejemplos por otros más elementales. El estudio de Legendre y Bessel y sus problemas de contorno viajó al final del curso.

**Versión 2012.** Primera de las '[Notas de Métodos Matemáticos \(ingeniería de materiales\)](#)'.

Parte de las notas son versión reducida de los 'apuntes de métodos matemáticos II (EDPs)' para esa asignatura del Grado en Física. Los capítulos 1 y 2 son un resumen de los apuntes de los de 'Cálculo' de ese grado. En 3 hay material de los 'apuntes de ecuaciones diferenciales I' (de un curso de la vieja Licenciatura en Física). Los problemas salieron del material de esos otros cursos.

Al elaborar las notas se tuvo en cuenta que la asignatura de la Ingeniería es de 3.5 horas por semana, frente a, por ejemplo, las 4 semanales de los Métodos Matemáticos II del grado. Y que además se debía ver el cálculo en varias variables. Y se supuso que las EDOs lineales se habían visto en 'Matemáticas II'. Para hacer más ligeras las notas, se suprimieron demostraciones y ejemplos complicados. A pesar de todo, se prefirió dejar temas para contar a título informativo, no exigibles en los exámenes del curso.

## Bibliografía

[L] Larson-Hostetler-Edwards. Cálculo y geometría analítica. McGraw-Hill

[M] Marsden-Tromba. Cálculo vectorial. Pearson Addison Wesley.

[B] Boyce-Di Prima. Ecuaciones diferenciales ordinarias y problemas con valores en la frontera. Limusa

[Si] Simmons. Ecuaciones diferenciales. McGraw-Hill

[H] Haberman. Ecuaciones en derivadas parciales con series de Fourier y problemas de contorno. Prentice Hall

[St] Stephenson. Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales. Reverté

Los dos primeros libros tratan el cálculo en  $\mathbf{R}^n$  y están destinados a quienes quieran extender lo que figura en los dos primeros capítulos del curso (y en 5.1).

Los dos siguientes son esencialmente de EDOs, con lo que serían adecuados para ir más allá del capítulo 3 (y la sección 5.2). En particular, el [B] está muy bien para estudiar los problemas de contorno y las series de Fourier, y también tiene una buena introducción a las EDPs.

Los dos últimos son de EDPs y desarrollan, por tanto, el capítulo 4 (y 5.3 y 5.4). Los problemas de contorno para EDOs se suelen estudiar también en libros de EDPs. El [H] es un libro gordo (aunque de nivel no muy complicado) y trata muchos más temas de EDPs que los de estas notas. El [St] tiene pocas páginas.

# Introducción

Estas notas tienen en esencia tres partes. Una primera con una versión resumida del **cálculo diferencial e integral en varias variables** (capítulos 1 y 2). Otra (la más corta) con la teoría de las **ecuaciones diferenciales ordinarias** (EDOs) y de sus **problemas de contorno**. Y una tercera con el estudio de las **ecuaciones en derivadas parciales** (EDPs).

En el **capítulo 1** se estudia el **cálculo diferencial en  $\mathbf{R}^n$** . La sección 1.1 trata los **campos escalares** (funciones  $f$  de  $\mathbf{R}^n$  en  $\mathbf{R}$ ), viendo el significado de sus **derivadas parciales y direccionales**, y de su **gradiente**  $\nabla f$ , sobre todo para  $n=2$ . En 1.2 se estudian los **campos vectoriales** ( $\mathbf{f}$  de  $\mathbf{R}^n$  en  $\mathbf{R}^m$ ) y, en particular, las **funciones vectoriales** ( $n=1$ ) que describen curvas, se presenta la **regla de la cadena** (que se utilizará en el curso) y se definen **divergencia, laplaciano y rotacional** ( $\nabla \cdot \mathbf{f}$ ,  $\Delta f$  y  $\nabla \times \mathbf{f}$ ).

El **capítulo 2** está dedicado al **cálculo integral en  $\mathbf{R}^n$** . En 2.1 se estudian las **integrales dobles y triples de campos escalares** y se ve la utilidad para su cálculo de los **cambios de variable** (en particular, a polares en el plano). En 2.2 se hacen **integrales de línea** (a lo largo de curvas) de campos escalares y vectoriales, se estudian las integrales que no dependen del camino y se presentan los teoremas de **Green** y de la **divergencia** en el plano.

El **capítulo 3** trata las **ecuaciones diferenciales ordinarias**. En 3.1 las de **primer orden**. En 3.2 las **lineales de segundo orden**  $y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$ , viendo los pocos casos en que son **resolubles elementalmente** (coeficientes constantes y Euler, sobre todo). Los **problemas de contorno para EDOs** se estudian en 3.3. Veremos que para determinados valores (**autovalores**) de la constante  $\lambda$  que aparece, la homogénea tendrá infinitas soluciones no triviales (**autofunciones**). [Con valores iniciales siempre hay una sola solución]. Se darán ideas también sobre problemas no homogéneos. Estudiaremos en 3.4 las **series de Fourier** (desarrollos de funciones como sumas infinitas de autofunciones, que casi siempre serán senos o cosenos). Todo será utilizado resolviendo EDPs por separación de variables.

El **capítulo 4** trata ya las **ecuaciones en derivadas parciales**, en las que aparecen derivadas parciales de una función incógnita de varias variables. Todas las que veremos serán **lineales** y en **dos variables** (para simplificar, aunque la realidad tiene habitualmente más dimensiones). Una **solución** será una función  $u(x, y) \in C^2$  que llevada a la ecuación la convierte en una identidad. Tras ver brevemente las de primer orden, trataremos EDPs **de segundo orden** (con derivadas de orden 2 o menor):

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D \frac{\partial u}{\partial y} + E \frac{\partial u}{\partial x} + Hu = F(x, y).$$

Entre ellas se encuentran muchas ecuaciones de la física. En concreto las tres clásicas (que tienen propiedades muy diferentes y que escribimos aquí en su versión general para  $n$  variables):

$$\text{Ondas } u_{tt} - c^2 \Delta u = F. \quad \text{Calor } u_t - k \Delta u = F. \quad \text{Laplace } \Delta u = F.$$

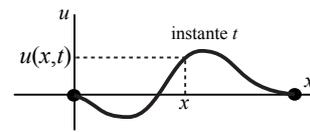
La teoría avanzada de las EDPs viene a ser la generalización del estudio de estas tres, que son ejemplos respectivos de los grandes tipos en que se clasifican: **hiperbólicas, parabólicas y elípticas**.

Casi nunca se puede dar la solución general de una EDP (por eso, muchas veces las soluciones serán series). Con cambios de variable la hallaremos en 4.1 para algunas de **primer orden** (y aparecerá una función arbitraria de las **características**, soluciones de una EDO ligada a la EDP) y en 4.2 para pocas de **segundo** (con dos funciones arbitrarias). Para la **cuerda infinita** se llegará aquí a una fórmula (de **D'Alembert**) para sus soluciones (en 4.4 se le sacará jugo). Veremos qué condiciones adicionales (iniciales o de contorno) se imponen a las EDPs para tener **solución única**.

En 4.3, tratando el calor, se introduce el método de **separación de variables** para resolver las EDPs clásicas **homogéneas y no homogéneas** (se abordan de forma diferente) y en diferentes coordenadas. Los recintos deben ser sencillos (y **acotados**, al menos, en una de las variables). Se supone la solución como producto de funciones de cada variable, lo que lleva a resolver EDOs en cada una de ellas, alguna, al menos, con condiciones de contorno. Las soluciones acaban siendo series de Fourier. La técnica es la misma en ondas (4.4) y en Laplace (4.5), con ligeras novedades que se irán estudiando.

Describamos el significado físico de las EDPs clásicas en dos variables. La ecuación de la **cuerda vibrante** (de ondas unidimensional) describe las oscilaciones de una cuerda elástica, tensa y fija en sus extremos. Se supone que sus oscilaciones son siempre transversales y de pequeña amplitud. Se prueba que si  $u(x, t)$  representa el desplazamiento vertical del punto de abscisa  $x$  en el instante  $t$ , la función  $u(x, t)$  satisface la EDP:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t)$$



donde  $c^2 = T_o / \rho$ , con  $T_o$  fuerza de tensión en los extremos,  $\rho$  masa por unidad de longitud y  $F(x, t)$  fuerza externa que actúa sobre el punto  $x$  en el instante  $t$ . Para determinar la evolución de una cuerda dada, se fijará la posición de la cuerda y la distribución de velocidades verticales en el instante inicial, es decir,  $u(x, 0)$  y  $u_t(x, 0)$ . También se deberá de tener en cuenta que está fija en los extremos  $x = 0$  y  $x = L$ , o sea, que  $u(0, t) = u(L, t) = 0$ . El modelo matemático de esta cuerda ideal es sólo una simplificación de la realidad, como las siguientes.

La distribución de temperaturas a lo largo del tiempo en una varilla delgada (que podemos suponer unidimensional) viene regida por la **ecuación del calor**:

$$u_t - k u_{xx} = 0$$

donde  $u(x, t)$  es la temperatura del punto  $x$  en el instante  $t$  y  $k > 0$  es una constante que mide la capacidad de conducir calor de la varilla. Si hay fuentes de calor en el interior de la varilla aparece una  $F(x, t)$  en el segundo miembro de la ecuación. A diferencia de la de ondas, aquí basta conocer sólo la distribución inicial de temperaturas  $u(x, 0)$  (junto con las condiciones de contorno, que pueden ser de varios tipos) para precisar la solución.

Puede describir la **ecuación de Laplace**:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

entre otras situaciones físicas, la distribución estacionaria de temperaturas en una placa bidimensional o la posición de equilibrio de una membrana. La existencia de fuentes de calor en el interior o de fuerzas actuando sobre la membrana aportaría una  $F$  en el segundo miembro. Frente a las ecuaciones anteriores que describían la evolución de un sistema a lo largo del tiempo, ésta describe situaciones estacionarias y las condiciones que se le imponen a ella serán siempre de contorno.

En el **capítulo 5** final se tratan resumidamente cuatro temas que no son objeto de exámenes en el curso. En 5.1 se introducen las **integrales de superficie** (de campos escalares y vectoriales) y se ven los teoremas de **Stokes** y de la **divergencia** en el espacio. En 5.2 se resuelven EDOs lineales mediante **series de potencias** (único método posible en muchas ocasiones). En 5.3 resolveremos por separación de variables problemas con **EDOs nuevas** (como las de Legendre y Bessel, resolubles siguiendo la sección anterior) y algún problema en **tres** variables. Se utiliza en 5.4 la **transformada de Fourier** para resolver EDPs en **recintos no acotados** (en particular, la del calor en la recta infinita).

# 1. Cálculo diferencial en $\mathbf{R}^n$

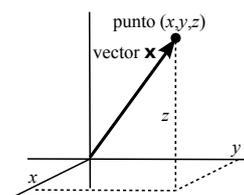
## 1.1 Campos escalares y sus derivadas

### El espacio $\mathbf{R}^n$

$\mathbf{R}^n \equiv \{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_k \in \mathbf{R} \}$  es un espacio vectorial de dimensión  $n$  con las operaciones:  
 $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$  y  $k\mathbf{x} = (kx_1, \dots, kx_n)$ ,  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ ,  $k \in \mathbf{R}$ .  
 Si  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$  se definen además el **producto escalar** de dos vectores  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ ,  
 la **norma** o **módulo** del vector  $\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})^{1/2} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$  y la **distancia**  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ .

[Otras notaciones para los elementos de  $\mathbf{R}^n$  son  $\bar{x}$  o  $\vec{x}$ .]

A cada elemento de  $\mathbf{R}^n$  le llamaremos indistintamente **punto** o **vector** de  $\mathbf{R}^n$ . Casi todos nuestros ejemplos serán en  $\mathbf{R}^2$  o  $\mathbf{R}^3$  donde llamaremos  $\mathbf{x} = (x, y)$  o  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ . Un  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$  se puede ver como el punto de coordenadas cartesianas  $(x, y)$  o como el vector que une el origen  $(0, 0)$  con  $(x, y)$  [análogo en  $\mathbf{R}^3$ ].  $\mathbf{R}$  es caso particular de  $\mathbf{R}^n$  y a los números reales se les llama a veces **escalares**.

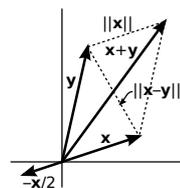


Las siguientes propiedades (menos las dos últimas) son facilísimas de demostrar:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}, (k\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = k(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot (k\mathbf{y}), \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}, \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0, \|k\mathbf{x}\| = |k| \|\mathbf{x}\|,$$

$$\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}, |\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \quad (\text{desigualdad de Cauchy-Schwartz}), \quad \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \quad (\text{desigualdad triangular}).$$

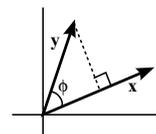
Muchas definiciones y propiedades de arriba tienen significado geométrico claro. Suma es el vector diagonal del paralelogramo de lados  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{y}$ . O lo que es lo mismo, es el vector cuya punta es el punto donde acaba  $\mathbf{x}$  si llevamos paralelamente su base al extremo de  $\mathbf{y}$ . La desigualdad triangular dice que la longitud de un lado de un triángulo es menor que la suma de las longitudes de los otros dos... (significado análogo en  $\mathbf{R}^3$ ). En  $\mathbf{R}$  el producto escalar pasa a ser el producto y la norma, el valor absoluto.



En  $\mathbf{R}^2$  y en  $\mathbf{R}^3$  hay una forma alternativa de expresar el producto escalar.

Se prueba que:  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \phi$ , con  $\phi$  ángulo que forman  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{y}$ .

De esto se deduce que  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$  cuando son perpendiculares.



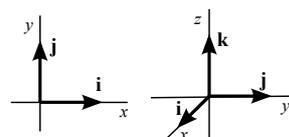
A los vectores de la 'base canónica' de  $\mathbf{R}^n$  los llamaremos  $\{ \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \} = \{ (1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1) \}$  y todo  $\mathbf{x}$  se puede escribir como combinación lineal de ellos:  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) = x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n$ .

En  $\mathbf{R}^2$  habitualmente se escribe  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i} = (1, 0)$  y  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{j} = (0, 1)$ .

Y en  $\mathbf{R}^3$ ,  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{j} = (0, 1, 0)$ ,  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{k} = (0, 0, 1)$ .

Un vector se dice **unitario** si tiene norma 1. [ $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  y  $\mathbf{k}$  lo son].

Si  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , un  $\mathbf{u}$  unitario con su misma dirección y sentido es  $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$ .



Sólo para  $n=3$ , se define el **producto vectorial** de  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{y}$  como el **vector**:

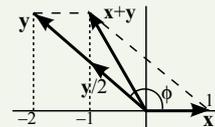
$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

[Es perpendicular a  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{y}$ , su longitud es el área del paralelogramo que tiene por lados esos vectores y su sentido es el que sugiere  $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ ].

**Ej 1.** Sean  $\mathbf{x} = (1, 0) = \mathbf{i}$  e  $\mathbf{y} = (-2, 2)$ . Entonces es:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (-1, 2), \quad \frac{1}{2} \mathbf{y} = (-1, 1), \quad \|\mathbf{x}\| = 1, \quad \|\mathbf{y}\| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}, \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = -2.$$

[Como  $\phi > \frac{\pi}{2}$  debía ser  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \phi < 0$ . De hecho es  $\phi = \arccos \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{3\pi}{4}$ ].



**Ej 2.** Si  $\mathbf{x} = (1, 0, 2)$ ,  $\mathbf{y} = (-2, 1, 3)$ , su producto escalar es  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 4$ .  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{5}$ ,  $\|\mathbf{y}\| = \sqrt{14}$ .

$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|(3, -1, -1)\| = \sqrt{11}$  nos proporciona la distancia entre los dos puntos  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ .

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (0-2)\mathbf{i} - (3+4)\mathbf{j} + (1-0)\mathbf{k} = (-2, -7, 1), \quad \begin{matrix} (1, 0, 2) \cdot (-2, -7, 1) = 0 \\ (-2, 1, 3) \cdot (-2, -7, 1) = 0 \end{matrix} \quad (\text{perpendicular}).$$

$$\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = 3\sqrt{6} \quad \text{nos da el área del paralelogramo cuyos lados son los vectores.}$$

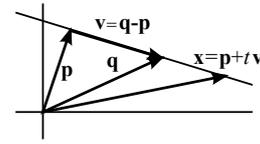
## Rectas y planos

En Cálculo en una variable, una **recta del plano** se suele escribir  $y = mx + b$  ó  $y = y_0 + m(x - x_0)$ , fijándonos en la pendiente  $m$ , la ordenada en el origen  $b$  o el punto  $(x_0, y_0)$  por el que pasa.

Veamos otras expresiones ahora utilizando vectores. La recta que pasa por los puntos  $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$  y  $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$  se puede escribir:

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \quad \text{o} \quad \mathbf{x} = (1-t)\mathbf{p} + t\mathbf{q}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

[Para  $t \in [0, 1]$ ,  $\mathbf{p} + t(\mathbf{q} - \mathbf{p})$  describe el segmento que une esos puntos].



O dado  $\mathbf{p}$  y el vector dirección  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  la recta es  $\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v}$ , o en coordenadas:  $\begin{cases} x = p_1 + tv_1 \\ y = p_2 + tv_2 \end{cases}$ .

**Ej 3.** Describamos paramétricamente de varias formas el segmento que une  $\mathbf{p} = (-2, 3)$  y  $\mathbf{q} = (1, 0)$ .

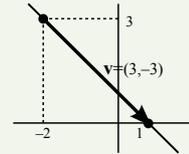
En cartesianas la recta se ve claro que es  $y = 1 - x$ . De aquí:  $(t, 1 - t)$ ,  $t \in [-2, 1]$ .

De la expresión de arriba, como  $\mathbf{v} = \mathbf{q} - \mathbf{p} = (3, -3)$ , deducimos otra parametrización:

$$\mathbf{p} + t\mathbf{v} = (-2 + 3t, 3 - 3t), \quad t \in [0, 1].$$

O intercambiando los papeles de  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$ :  $\mathbf{q} + t(\mathbf{p} - \mathbf{q}) = (1 - 3t, 3t)$ ,  $t \in [0, 1]$ .

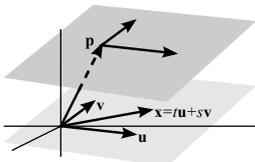
[Las 2 primeras expresiones describen el segmento, al crecer  $t$ , en el mismo sentido y la tercera en el opuesto].



Las ecuaciones vectoriales de las **rectas en el espacio** son las mismas, pero con 3 coordenadas:

$$\begin{cases} x = p_1 + tv_1 \\ y = p_2 + tv_2 \\ z = p_3 + tv_3 \end{cases}. \quad \text{Eliminando la } t: \quad \frac{x-p_1}{v_1} = \frac{y-p_2}{v_2} = \frac{z-p_3}{v_3} \quad [\text{interpretando que el numerador es 0 si se anula su denominador}].$$

La ecuación general de un **plano en el espacio** es  $ax + by + cz = d$  [Con  $a, b, c$  no las tres cero. Si  $d=0$  pasa por el origen].

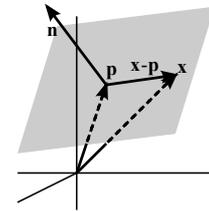


Si  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son dos vectores (no múltiplo uno de otro),  $\mathbf{x} = t\mathbf{u} + s\mathbf{v}$ ,  $t, s \in \mathbf{R}$  describe el plano que contiene esos vectores y pasa por el origen.

$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{u} + s\mathbf{v}$  es otro plano, paralelo al otro y que pasa por  $\mathbf{p}$  (y los puntos  $\mathbf{p} + \mathbf{u}$  y  $\mathbf{p} + \mathbf{v}$ ).

Un plano quedará también determinado conocidos un punto  $\mathbf{p}$  suyo y un vector  $\mathbf{n}$  normal (perpendicular) al plano pues entonces:  $(\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{n} = 0$ .

Si  $\mathbf{n} = (a, b, c)$ , desarrollando:  $a(x - p_1) + b(y - p_2) + c(z - p_3) = 0$ , que se puede poner  $ax + by + cz = -ap_1 - bp_2 - cp_3$ . Comparando con la ecuación escrita arriba, concluimos que un **vector normal** a un plano  $ax + by + cz = d$  es el vector  $(a, b, c)$ .



**Ej 4.** Demos varias expresiones para la recta que pasa por los puntos  $\mathbf{p} = (1, 2, -8)$  y  $\mathbf{q} = (7, 5, 1)$ .

Un vector dirección es  $\mathbf{v} = \mathbf{q} - \mathbf{p} = (6, 3, 9)$ , y la recta es:  $\mathbf{p} + t\mathbf{v} = (1 + 6t, 2 + 3t, -8 + 9t)$ ,  $t \in \mathbf{R}$ .

O con un vector más bonito  $\mathbf{u} = (2, 1, 3)$  y  $\mathbf{q}$  en vez de  $\mathbf{p}$ :  $\mathbf{q} + t\mathbf{u} = (7 + 2t, 5 + t, 1 + 3t)$ ,  $t \in \mathbf{R}$ .

Eliminando  $t$ , por ejemplo, de la segunda:  $\begin{cases} x = 7 + 2t \\ y = 5 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases} \rightarrow \frac{x-7}{2} = y-5 = \frac{z-1}{3}$ .

Y eligiendo dos pares de términos (nosotros los primero = tercero y segundo = tercero) obtenemos la recta como intersección de dos planos:

$$3x - 21 = 2z - 2, \quad 3y - 15 = z - 1, \quad \text{es decir, } \begin{cases} 3x - 2z = 19 \\ 3y - z = 14 \end{cases}.$$

**Ej 5.** Halleemos la ecuación del plano que pasa por  $\mathbf{p} = (3, 2, -1)$ ,  $\mathbf{q} = (1, -1, 3)$  y  $\mathbf{r} = (3, -2, 4)$ .

Es perpendicular al plano, por ejemplo,  $(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \times (\mathbf{r} - \mathbf{p}) = (-2, -3, 4) \times (0, -4, 5) = (1, 10, 8)$ .

El plano es, por tanto:  $1(x - 3) + 10(y - 2) + 8(z + 1) = 0$ , es decir,  $x + 10y + 8z = 15$ .

Más largo es eliminar  $t$  y  $s$  de  $\mathbf{x} = t(\mathbf{q} - \mathbf{p}) + s(\mathbf{r} - \mathbf{p}) = \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2 - 3t - 4s \\ z = -1 + 4t + 5s \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = \frac{3-x}{2} \\ s = \frac{3x}{8} - \frac{y}{8} - \frac{5}{8} \end{cases}$

O, aún peor, resolver el sistema  $\begin{cases} 3a + 2b - c = d \\ a - 2b + 3c = d \\ 3a - 2b + 4c = d \end{cases}$  [imponiendo que pase por los puntos]  $\rightarrow a = \frac{d}{5}, b = \frac{10d}{5}, c = \frac{8d}{5}$ .

**Campos escalares** (también llamadas **funciones escalares**).

$$f: D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R} \quad (\text{son funciones reales de varias variables reales en un dominio } D).$$

$$\mathbf{x}=(x_1, \dots, x_n) \rightarrow f(\mathbf{x})$$

Su gráfica es el conjunto de puntos de la forma  $(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n))$ , con  $(x_1, \dots, x_n) \in D$ .

Si  $n=1$  describe una curva en el plano, si  $n=2$  una **superficie** en el espacio (que se puede tratar de dibujar en perspectiva) y si  $n \geq 3$  estamos ya en un espacio de dimensión  $\geq 4$ . Trabajemos con ella para  $n=2$ .

$$f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R} \quad \text{Para esquematizar su gráfica (sin ordenador) buscaremos secciones (curvas en el espacio) que obtendremos cortando la superficie con diferentes planos.}$$

$$(x, y) \rightarrow f(x, y)$$

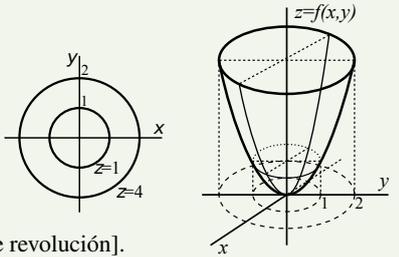
Unas secciones interesantes se consiguen cortando con planos  $z = \text{cte}$ , llamadas **curvas de nivel** (es decir, curvas del plano  $xy$  sobre las que  $f$  toma un valor constante). Otras fáciles de calcular son las obtenidas al hacer  $x = \text{cte}$  o  $y = \text{cte}$  (en particular los cortes con los planos  $yz$  o  $xz$ ).

**Ej 6.**  $f(x, y) = x^2 + y^2$ . Las curvas de nivel, dadas por  $x^2 + y^2 = C$ , serán aquí circunferencias, de radio  $\sqrt{C}$ .

Las secciones con  $x=0 \rightarrow z = y^2$  son parábolas.  
 $y=0 \rightarrow z = x^2$

Con esto es fácil (en este caso sencillo) dibujar la gráfica de lo que se llama un **'paraboloide de revolución'**.

[Si las curvas de nivel son circunferencias centradas, la superficie será de revolución].

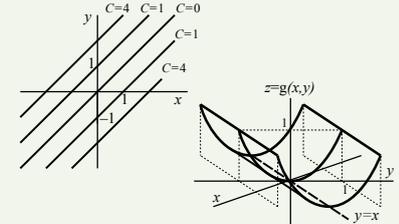


**Ej 7.**  $g(x, y) = (x - y)^2 = C \rightarrow x - y = \pm \sqrt{C}$  (rectas paralelas).

En concreto, si  $C=0, 1, 4$  se obtienen  $y=x, y=x \pm 1, y=x \pm 2$ .

El corte con  $x=0$  es una parábola:  $z = y^2$ . También lo son los cortes con  $y=0$  ( $z = x^2$ ) o con  $y = -x$  ( $z = 4x^2$ ).

Viene a ser la gráfica de la parábola  $z = y^2$  trasladada a lo largo de la recta  $y=x$  (que es donde se anula la  $g$ ).

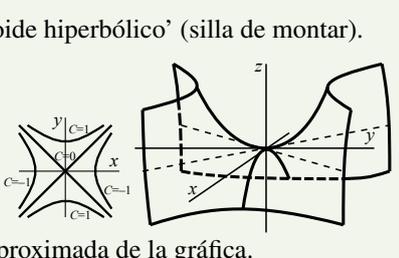


**Ej 8.** Sea  $h(x, y) = y^2 - x^2$ . Dibujemos la gráfica de este 'paraboloide hiperbólico' (silla de montar).

Los cortes con  $y=0$  y  $x=0$  son las parábolas  $z = -x^2$  y  $z = y^2$  [y en general son parábolas los cortes con  $y=C$  y  $x=C$ ].

Las curvas de nivel son en general las hipérbolas  $y^2 - x^2 = C$  [menos para  $C=0$  en que se reducen a las rectas  $y = \pm x$ ].

No es fácil hacer el dibujo en 3 dimensiones, pero las curvas de nivel y los cortes ya nos bastan para hacernos una idea bastante aproximada de la gráfica.

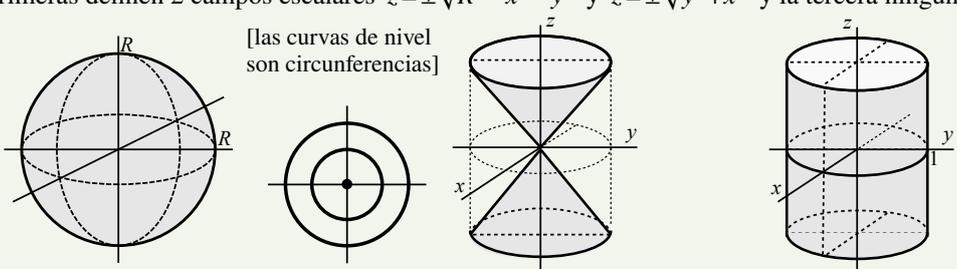


Hay otras superficies importantes que definen más de una (o no definen ninguna) función escalar:

**Ej 9.** Dibujamos  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  (superficie esférica),  $z^2 = x^2 + y^2$  (cono),  $x^2 + y^2 = 1$  (cilindro).

Las primeras definen 2 campos escalares  $z = \pm \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$  y  $z = \pm \sqrt{y^2 + x^2}$  y la tercera ninguno.

[las curvas de nivel son circunferencias]



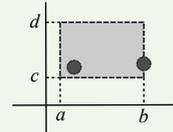
Los cortes con  $x=0$  son la circunferencia  $z = \pm \sqrt{R^2 - y^2}$  (esfera), y las rectas  $z = \pm y$  (cono).  
 El cilindro no depende de la  $z$ . Es la circunferencia unidad llevada verticalmente (de  $-\infty$  a  $\infty$ ).

Todos estos ejemplos son **'cuádricas'**:  $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + ax + by + cz = d$  (que generalizan las cónicas a  $\mathbf{R}^3$ ). Hay más tipos de ellas: elipsoides, hiperboloides de una y dos hojas, parejas de planos...

**Entornos y abiertos.** Estos términos aparecerán varias veces en el curso, así que los definimos:

**Entorno** de centro  $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$  y radio  $r$  es  $B_r(\mathbf{a}) \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| < r\}$  [círculo en el plano, esfera en el espacio, sin bordes].  
 El punto  $\mathbf{a} \in A$  es **interior** al conjunto  $A \subset \mathbf{R}^n$  si hay algún  $r$  tal que el entorno  $B_r(\mathbf{a}) \subset A$ .  
 $A$  es **abierto** si todos sus puntos son interiores, es decir, si  $A = \text{int}A \equiv \{\mathbf{x} \text{ interiores a } A\}$ .  
**Frontera o borde** de  $A$  es  $\partial A \equiv \{\mathbf{x} : \forall r, B_r(\mathbf{x}) \text{ contiene puntos de } A \text{ y de } \mathbf{R}^n - A\}$ .  
 Se llama **cierre** de  $A$  al conjunto  $\bar{A} = \text{int}A \cup \partial A$ .

**Ej 10.** El producto cartesiano de intervalos abiertos  $(a, b) \times (c, d)$  (rectángulo sin borde) es un conjunto  $A$  abierto en  $\mathbf{R}^2$ : para cualquier  $\mathbf{a}$  del conjunto existe un  $B_r(\mathbf{a})$  contenido en él (por ejemplo, si  $r$  es el mínimo de las distancias a los 4 lados). Su frontera  $\partial A$  son los 4 lados y por tanto  $\bar{A} = [a, b] \times [c, d]$ .  $\bar{A}$  no es abierto pues los puntos de  $\partial A$  no son interiores (ningún entorno está contenido en  $A$ ).



**Límites y continuidad.** Las definiciones son (aparentemente) muy parecidas a las de  $\mathbf{R}$ :

Límite:  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L$  si  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  tal que si  $0 < \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| < \delta$  entonces  $|f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon$ .  
 $f$  continua en  $\mathbf{a} \in \text{int}D \Leftrightarrow \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) \Leftrightarrow \forall \varepsilon \exists \delta$  tal que  $\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| < \varepsilon$ .

[Para  $n=2$  debe existir un  $\delta$  tal que la imagen de  $f$  en  $B_\delta(\mathbf{a})$  esté entre los planos  $z=L-\varepsilon$  y  $z=L+\varepsilon$ ].

Teoremas (como los de  $\mathbf{R}$ ) aseguran que **suma, producto y cociente con denominador no nulo de  $f$  y  $g$  continuas son continuas**. Y también se prueba que lo es la **composición** de campos escalares con funciones reales continuas:

**Teor 1.**  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  continua en  $\mathbf{a}$ ,  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  continua en  $f(\mathbf{a}) \Rightarrow g \circ f$  continua en  $\mathbf{a}$ .

Probando sólo que  $f(\mathbf{x}) = C$  y que  $f(x_1, \dots, x_n) = x_k$  son continuas en todos los puntos de  $\mathbf{R}^n$ :

$$|f(\mathbf{x}) - C| = 0 < \varepsilon \quad \forall \delta, \quad |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| = |x_k - a_k| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \varepsilon \quad \text{si } \delta = \varepsilon,$$

se deduce de estos teoremas que muchísimos campos escalares lo son en todos o en casi todos los puntos **a simple vista**. Así, por ejemplo, son claramente continuos en todo  $\mathbf{R}^2$  los campos de la página anterior (son sumas, productos... de funciones continuas). También lo son claramente:

$$f(x, y) = \frac{x^2 - 1}{y^2 + 3} \quad (\text{lo son numerador y denominador, y éste no se anula})$$

$$h(x, y) = e^{xy} \quad (\text{es composición de la continua } f(x, y) = xy \text{ y } g(z) = e^z \text{ función continua en todo } \mathbf{R})$$

$$g(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \quad \text{es claramente continua cuando } (x, y) \neq (0, 0) \\ \text{y discontinua en ese punto ('tiende a } \infty \text{' pues } x^2 + y^2 \rightarrow 0 \text{ y es positivo).}$$

Sólo hay que pararse a mirar la continuidad en algunos puntos patológicos (lo mismo que sucedía en  $\mathbf{R}$ ). Ponemos un par de ejemplos sólo para mostrar que aquí las cosas se complican:

**Ej 11.**  $f(x, y) = (x^2 + y^2) \text{ sen } \frac{1}{x^2 + y^2}$ , con  $f(0, 0) = 0$ , es obviamente continua si  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ .

Para ver que lo es también en el origen podemos aquí acudir a la definición (en general complicado):

$$|f(x, y) - f(0, 0)| \leq |x^2 + y^2| < \varepsilon \quad \text{si } \|(x, y) - (0, 0)\| = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta = \sqrt{\varepsilon},$$

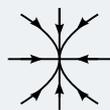
o mirarla como composición de la conocida continua  $g(x) = x \text{ sen } \frac{1}{x}$  y del campo  $h(x, y) = x^2 + y^2$ , o incluso utilizar que sigue siendo cierto en más de una variable eso de que 'cero  $\times$  acotado = cero'.

**Ej 12.**  $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$ ,  $f(0, 0) = 0$  vuelve a ser continua claramente si  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ . ¿Lo es en  $(0, 0)$ ?

Vamos a acercarnos al origen a lo largo de diferentes curvas.

$$\text{Empezamos con las rectas } y = mx : f(x, mx) = \frac{m^2 x}{1 + m^4 x^2} \rightarrow 0.$$

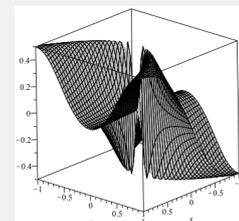
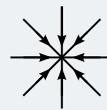
Pero esto no es la definición del límite en  $\mathbf{R}^2$ .



$$\text{Sigamos ahora las parábolas } x = py^2 : f(py^2, y) = \frac{p}{p^2 + 1}.$$

Tan cerca como queramos del origen hay puntos en los que el campo vale, por ejemplo,  $\frac{1}{2}$  ( $p = 1$ ). **Discontinua en 0.**

[Dibujada con un ordenador, presenta  $f$  el aspecto feo del dibujo de la derecha].



## Derivadas direccionales, derivadas parciales y gradiente

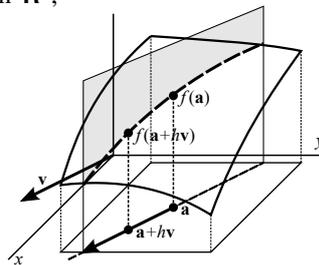
Sean  $f: D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  y  $\mathbf{a} \in \text{int } D$  para que  $f$  esté definida cerca de  $\mathbf{a}$ . Para hallar la derivada en  $\mathbf{R}$  se usan los valores de  $f$  en  $\mathbf{a}$  y puntos cercanos  $\mathbf{a}+h$ . En  $\mathbf{R}^n$  hay puntos en cualquier dirección. Miremos cómo varía  $f$  sobre una recta que pase por  $\mathbf{a}$  (dada por un vector  $\mathbf{v}$ ), es decir, en  $\mathbf{R}^2$ , la variación de la curva obtenida cortando la gráfica con un plano vertical:

La derivada de  $f$  según el vector  $\mathbf{v}$  en un punto  $\mathbf{a}$  es:

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) \equiv f_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a}+h\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{h} \quad (\text{si existe}).$$

Cuando  $\mathbf{v}$  es unitario se le llama **derivada direccional** (de  $f$  en la dirección del vector  $\mathbf{v}$  en el punto  $\mathbf{a}$ ).

[Es la derivada de la función de una variable  $f(\mathbf{a}+t\mathbf{v})$  en  $t=0$ ].



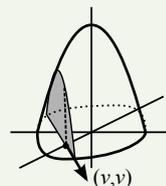
Veremos pronto formas sencillas de hallar estas derivadas, pero por ahora sólo tenemos la definición:

**Ej 13.** Hallemos la derivada de  $f(x, y) = 4 - x^2 - 4y^2$  en  $(1, 0)$  según el vector  $(v, v)$ :

$$D_{\mathbf{v}}f(1, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 - (1+hv)^2 - 4(hv)^2 - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2hv - 5h^2v^2}{h} = -2v.$$

Así, en particular:  $D_{(1,1)}f(1, 0) = -2$ ,  $D_{(2,2)}f(1, 0) = -4$ ,  $D_{(-1,-1)}f(1, 0) = 2$ , ...

Las derivadas direccionales son  $D_{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})}f(1, 0) = -\sqrt{2}$  y  $D_{(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})}f(1, 0) = \sqrt{2}$ .



El caso más importante aparece al tomar como  $\mathbf{v}$  alguno de los vectores de la base canónica:

A la derivada de  $f$  en la dirección de  $\mathbf{e}_k$  se le llama **derivada parcial** de  $f$  respecto a  $x_k$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a}) \equiv f_{x_k}(\mathbf{a}) \equiv D_k f(\mathbf{a}) \equiv D_{\mathbf{e}_k} f(\mathbf{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_k+h, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_k, \dots, a_n)}{h},$$

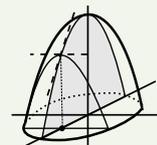
es decir,  $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a})$  es la derivada en el punto  $x = a_k$  de la función  $g(x) = f(a_1, \dots, x, \dots, a_n)$  de una sola variable que se obtiene mirando todas las  $x_i$  constantes menos la  $x_k$ .

En  $\mathbf{R}^2$  usaremos simplemente las notaciones  $\frac{\partial f}{\partial x} \equiv f_x$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} \equiv f_y$ , y en  $\mathbf{R}^3$  además  $\frac{\partial f}{\partial z} \equiv f_z$ .

En  $\mathbf{R}^2$ , por tanto,  $f_x(a, b)$  es la derivada de  $f(x, b)$  en  $x=a$  y  $f_y(a, b)$  la de  $f(a, y)$  en  $y=b$ . Se calculan simplemente viendo la otra variable como constante. Y su significado geométrico es claro: son las **pendientes de las tangentes a las curvas corte de la gráfica con planos  $x=a$  o  $y=b$** .

**Ej 13b.** Si  $f(x, y) = 4 - x^2 - 4y^2$  es  $f_x(1, 0) = -2x|_{(1,0)} = -2$  y  $f_y(1, 0) = -8y|_{(1,0)} = 0$ , que son las pendientes de las tangentes a las parábolas obtenidas cortando con  $y=0$  y  $x=1$  [ $g(x) = 4 - x^2$  y  $g(y) = 3 - 4y^2$ ], respectivamente en  $x=1$  e  $y=0$ .

[La primera es negativa por decrecer  $f$  al crecer  $x$  y la segunda 0 por tener ahí un máximo].



Si las  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  existen para todos los  $\mathbf{x} \in D$  tenemos  $n$  nuevos campos escalares  $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$  que se pueden volver a derivar consiguiendo las **derivadas parciales de orden 2, 3, ...**:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} \left[ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right] \equiv \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_k \partial x_j} \equiv f_{x_j x_k}(\mathbf{x}) \equiv D_{jk} f(\mathbf{x}), \dots$$

**Ej 14.** Si  $f(x, y) = x^2 e^{-2y}$  sus derivadas primeras  $f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x e^{-2y}$ ,  $f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = -2x^2 e^{-2y}$  vuelven a tener derivadas parciales  $\forall(x, y)$ , con lo que tiene sentido calcular:

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 e^{-2y}, \quad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right] = -4x e^{-2y}, \quad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -4x e^{-2y}, \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4x^2 e^{-2y}.$$

Y podríamos seguir calculando derivadas:  $f_{xxx} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 0, \dots, f_{yyy} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = -8x^2 e^{-2y}, \dots$

**Ej 15.** Si  $f(x, y, z) = x^2 y - \cos(yz)$  se tiene que  $f_x = 2xy$ ,  $f_y = x^2 + z \sin(yz)$ ,  $f_z = y \sin(yz)$ .

Entonces:  $f_{xx} = 2y$ ,  $f_{xy} = 2x$ ,  $f_{xz} = 0$ ;  $f_{yx} = 2x$ ,  $f_{yy} = z^2 \cos(yz)$ ,  $f_{yz} = \sin(yz) + yz \cos(yz)$ ;

$f_{zx} = 0$ ,  $f_{zy} = \sin(yz) + yz \cos(yz)$ ,  $f_{zz} = y^2 \cos(yz)$ . Algunas derivadas coinciden (no es casual).

Se dice que  $f \in C^n$  en  $D$  abierto si sus derivadas parciales hasta orden  $n$  son continuas en  $D$ .

**Igualdad de Schwarz o de Clairaut:**

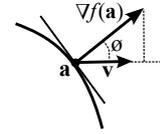
$$\text{Si } f \in C^2 \text{ en un entorno de } \mathbf{a} \Rightarrow D_{kj} f(\mathbf{a}) = D_{jk} f(\mathbf{a}), \quad j, k = 1, \dots, n.$$

Se llama **gradiente** de  $f$  al vector  $\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$  y es  $\nabla f(\mathbf{a}) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right)$ .

Halladas las  $\frac{\partial f}{\partial x_k}$  (y, por tanto, el  $\nabla f$ ) es muy fácil hacer derivadas según vectores. Se prueba que:

**Teor 2.** Si  $f \in C^1$  en un entorno de  $\mathbf{a}$ , la derivada según el vector  $\mathbf{v}$  es  $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}$ .

**Significado del gradiente.** Sea  $\mathbf{v}$  unitario y supongamos  $\nabla f(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$ . Entonces, por el teorema:  $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v} = \|\nabla f(\mathbf{a})\| \cos \phi$ . Así que la derivada direccional es la componente del gradiente en la dirección de  $\mathbf{v}$ . La  $D_{\mathbf{v}}$  será máxima si  $\cos \phi = 1$  (cuando los vectores tienen la misma dirección y sentido). Por tanto, **la dirección y sentido de  $\nabla f$  son aquellos en los que  $f$  crece más deprisa**. Si  $\cos \phi = 0$ , será  $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) = 0$ : **en la dirección perpendicular a  $\nabla f$  el campo no varía**. Así, en  $\mathbb{R}^2$ , será  $\nabla f$  **perpendicular a las curvas de nivel de  $f$**  (a sus tangentes). [Y en  $\mathbb{R}^3$  será perpendicular a las superficies de nivel].



**Ej 13c.** Para la  $f(x, y) = 4 - x^2 - 4y^2$ , ya es muy fácil hallar las  $D_{\mathbf{v}}$  del **Ej 13**:  $\nabla f = (-2x, -8y) \Rightarrow$

$$D_{(1,1)}f(1,0) = (-2, 0) \cdot (1, 1) = -2, \quad D_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}f(1,0) = (-2, 0) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2}, \dots$$

Dibujemos ahora algunos vectores gradientes y algunas curvas de nivel (elipses  $x^2 + 4y^2 = 4 - C$ ).

En concreto, se dibuja  $\nabla f$  en los puntos  $(1, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(2, 1)$

[son los vectores  $(-4, 0)$ ,  $(-8, 0)$ ,  $(0, -8)$ ,  $(-4, -8)$  a escala]

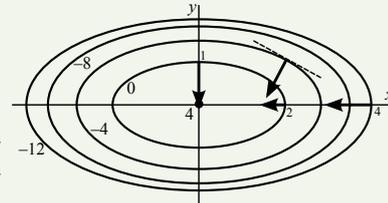
y las curvas para  $C = 4, 0, -4, -8, -12$ .

Viendo la gráfica de  $f$  como una montaña,  $\nabla f$  indica la máxima pendiente. Entre las derivadas direccionales en  $(2, 1)$  es máxima la fijada por  $\nabla f$ , es decir, en la dirección de

$$\mathbf{v} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \quad \text{[y el valor máximo es } D_{\mathbf{v}}f(2,1) = \nabla f(2,1) \cdot \mathbf{v} = 4\sqrt{5} = \|\nabla f(2,1)\| \text{].}$$

Es mínima en la dirección opuesta al gradiente  $\mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$  [su valor será  $-4\sqrt{5}$ ].

Es nula en la dirección de los vectores perpendiculares a  $\nabla f$  [ $(2, -1)$  o  $(-2, 1)$ ], vectores que son tangentes a la elipse de nivel  $x^2 + 4y^2 = 8$  que pasa por el punto  $(2, 1)$ .



**Ej 7\*.** Hacemos cálculos similares a los hechos para el **Ej 13** para el campo del **Ej 7**:  $g(x, y) = (x - y)^2$ .

$$\text{Aquí es } \nabla g(x, y) = (2x - 2y, 2y - 2x) = 2(x - y)(1, -1).$$

[Vector perpendicular a las rectas de nivel que apunta hacia donde crece  $g$  con módulo  $2\sqrt{2}|x - y|$  mayor según nos alejemos de la recta  $y = x$ ].

En el punto  $(0, -1)$  el vector  $\nabla g$  es  $(2, -2)$ . El vector unitario  $\mathbf{u}$  para el que es, por ejemplo, mínima la derivada direccional en el punto es:

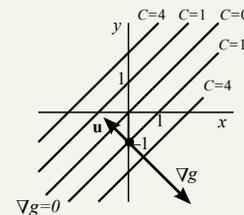
$$\mathbf{u} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{[pues } (-1, 1) \text{ es opuesto al gradiente de módulo } \sqrt{2} \text{].}$$

[La derivada mínima será  $D_{\mathbf{u}}g(0, -1) = (2, -2) \cdot \mathbf{u} = -2\sqrt{2} = -\|\nabla g\| = \|\nabla g\| \|\mathbf{u}\| \cos \pi$ ].

[No hemos vuelto a usar la definición inicial de la derivada según un vector.

Al igual que en  $\mathbb{R}$  sólo se necesita esa definición para funciones raras].

[Obsérvese que  $\nabla g = \mathbf{0}$  sobre  $y = x$ : los cortes con  $x = a$  e  $y = b$  son parábolas con mínimos ahí].



**Ej 15\*.** Los cálculos y significados son análogos en  $\mathbb{R}^3$ . Para  $f(x, y, z) = x^2y - \cos(yz)$  es:

$$\nabla f(x, y, z) = (2xy, x^2 + z \operatorname{sen}(yz), y \operatorname{sen}(yz)). \quad \text{En particular es } \nabla f(1, 1, 0) = (2, 1, 0).$$

La derivada de  $f$  en el punto  $\mathbf{a} = (1, 1, 0)$  según el vector  $\mathbf{v} = (1, -1, 2)$  es  $(2, 1, 0) \cdot (1, -1, 2) = 1$ .

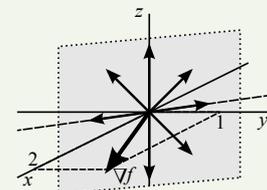
Si buscamos la derivada direccional debemos dividir por el módulo:  $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{v} \rightarrow D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a}) = \frac{1}{\sqrt{6}}$ .

La derivada direccional máxima es en la dirección y sentido de  $\nabla f$  y su valor será su módulo  $\sqrt{5}$ .

La derivada es 0 en la dirección de todo vector perpendicular a  $\nabla f$ , que ahora no constituyen una recta, sino un plano. Si  $\mathbf{v} = (a, b, c)$  es perpendicular:  $(2, 1, 0) \cdot (a, b, c) = 2a + b = 0 \rightarrow$

$$\mathbf{v} = (a, -2a, c), \quad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{5a^2 + c^2} \rightarrow \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{5a^2 + c^2}}(a, -2a, c).$$

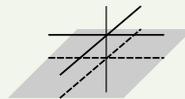
Un par de estos vectores  $\mathbf{u}$  son, por ejemplo,  $(0, 0, 1)$  y  $\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ .



## Campos escalares diferenciables y plano tangente

En una variable se cumplía 'derivable  $\Rightarrow$  continua'. En  $\mathbf{R}^n$  la existencia de todas las derivadas parciales **no** implica la continuidad. Ni siquiera la existencia de derivadas direccionales en todas las direcciones.

**Ej 16.** Para  $f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x=0 \text{ o } y=0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$  es  $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ , pero  $f$  es claramente discontinua en el origen.



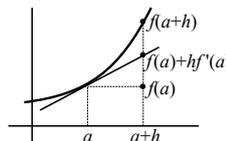
La  $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$  discontinua en  $(0, 0)$  del **Ej 12** tiene, sin embargo, derivadas según cualquier vector en el punto [pues  $f(x, mx) = \frac{m^2x}{1+m^4x^2}$  es derivable para todo  $m$  en  $x=0$ ].

Buscamos una definición que recoja información global de todos los puntos cercanos a  $\mathbf{a}$ . Una función en  $\mathbf{R}$  era derivable si tenía recta tangente. En  $\mathbf{R}^2$  será **diferenciable si posee plano tangente**.

Empezamos reescribiendo la definición de derivada:

$$f \text{ derivable en } a \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{h} = 0 \Leftrightarrow f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h).$$

si el numerador es  $o(h)$ , despreciable respecto a  $h$



En  $\mathbf{R}^n$  ser diferenciable será casi lo mismo. Como en  $\mathbf{R}$ ,  $g(\mathbf{v}) = o(\|\mathbf{v}\|)$  significará que  $\lim_{\mathbf{v} \rightarrow 0} \frac{g(\mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|} = 0$ .

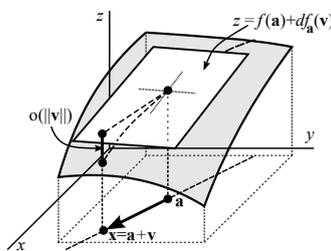
$$f \text{ es diferenciable en } \mathbf{a} \text{ si existe } \nabla f(\mathbf{a}) \text{ y es } f(\mathbf{a} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v} + o(\|\mathbf{v}\|).$$

O sea, llamando  $\mathbf{v} = \mathbf{x} - \mathbf{a}$ , si  $\frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} \rightarrow 0$ .

Si  $n=2$ , lo es si  $f(\mathbf{a} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{a}) + f_x(\mathbf{a})u + f_y(\mathbf{a})v + o(\|\mathbf{v}\|)$ , o sea, si cerca de

$\mathbf{a} = (a, b)$ , se parece al plano:  $z = f(\mathbf{a}) + f_x(\mathbf{a})(x-a) + f_y(\mathbf{a})(y-b)$ .

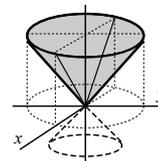
¿Cómo saber si una  $f$  es diferenciable? La definición, complicada, sólo se necesita en puntos patológicos (que no trataremos). Por otra parte, si  $f$  es diferenciable parece que va a ser continua. Se prueba que:



**Teor 3.**  $f \in C^1$  en un entorno de  $\mathbf{a} \Rightarrow f$  diferenciable en  $\mathbf{a} \Rightarrow f$  continua en  $\mathbf{a}$ .

Por tanto, un campo discontinuo (como los del **Ej 16**) no puede ser diferenciable.

Pero los hay continuos y no diferenciables, como le sucede al cono  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  en el origen. Sus cortes con los ejes son  $z = |x|$  y  $z = |y|$ , funciones no derivables en 0, por lo que no existen  $f_x(0, 0)$  ni  $f_y(0, 0)$ . Por tanto, no puede ser diferenciable ahí. [Una  $f$  continua y no diferenciable tendrá 'picos', como le pasaba al  $|x|$  en  $\mathbf{R}$ ].



Hemos deducido para  $\mathbf{R}^2$  que si  $f$  es diferenciable, su **plano tangente** en el punto  $(a, b)$  es:

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x-a) + f_y(a, b)(y-b).$$

**Ej 13d.** Como para  $f(x, y) = 4 - x^2 - 4y^2$  las  $f_x = -2x$  y  $f_y = -8y$  son continuas en todo  $\mathbf{R}^2$  claramente es  $f$  diferenciable en todo el plano y es fácil de calcular, por ejemplo, el plano tangente en  $(-2, 1)$ :

$$z = -4 + 4(x+2) - 8(y-1) = 4x - 8y + 12.$$

Como en  $\mathbf{R}^3$  es  $\nabla f$  perpendicular a las superficies de nivel, esto nos da un modo de hallar el **plano tangente en un punto  $(a, b, c)$  de una superficie  $S$  dada en la forma  $F(x, y, z) = K$ :**

$$\nabla F(a, b, c) \cdot (x-a, y-b, z-c) = 0.$$

**Ej 17.** Por ejemplo, hallemos el plano tangente en  $(1, -2, 3)$  a la superficie esférica  $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ :

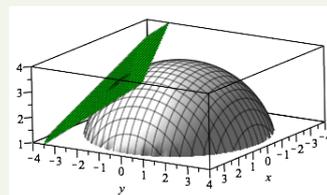
$$\nabla F(1, -2, 3) = (2x, 2y, 2z)|_{(1, -2, 3)} = (2, -4, 6) \rightarrow$$

$$2(x-1) - 4(y+2) + 6(z-3) = 0, \text{ o bien, } z = \frac{1}{3}(14 - x + 2y).$$

Más largo es hallar este plano con la fórmula de más arriba:

$$z = +\sqrt{14 - x^2 - y^2} \rightarrow z_x = \frac{-x}{\sqrt{14 - x^2 - y^2}}, z_y = \frac{-y}{\sqrt{14 - x^2 - y^2}},$$

$$z_x(1, -2) = -\frac{1}{3}, z_y(1, -2) = \frac{2}{3} \rightarrow z = 3 - \frac{1}{3}(x-1) + \frac{2}{3}(y+2) \uparrow$$



## 1.2 Campos vectoriales. Regla de la cadena

En esta sección tratamos funciones cuyos valores serán vectores. Primero el caso más sencillo:

**Funciones vectoriales:**  $\boxed{\begin{matrix} \mathbf{c}: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^n \\ t \longrightarrow \mathbf{c}(t) = (c_1(t), \dots, c_n(t)) \end{matrix}}$ . Sus gráficas son **curvas** en  $\mathbf{R}^n$ .

Bastantes veces nos ocuparemos de  $\mathbf{c}$  para  $t$  en un intervalo finito:  $t \in [a, b]$ . Entonces la imagen de  $\mathbf{c}$  es una curva finita que une (en ese sentido) el punto  $\mathbf{c}(a)$  con el  $\mathbf{c}(b)$  [extremos de la curva].

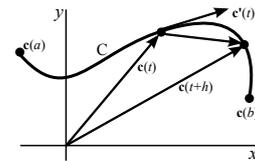
Casi siempre trabajaremos en  $\mathbf{R}^2$  o  $\mathbf{R}^3$  y será  $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$  o  $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ .

Se dice que  $\mathbf{c}$  es continua en un punto o intervalo si lo son sus  $n$  componentes  $c_1(t), \dots, c_n(t)$ .

Y es **derivable** si las  $n$  lo son y su **derivada** es el vector  $\boxed{\mathbf{c}'(t) = (c'_1(t), \dots, c'_n(t))}$ .

Interpretemos  $\mathbf{c}'(t)$  para  $n=2$  (o  $n=3$ ). Al ser  $\mathbf{c}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{c}(t+h) - \mathbf{c}(t)}{h}$ ,

la pendiente de la secante tenderá a la **pendiente de la recta tangente** a la curva  $C$  descrita por  $\mathbf{c}(t)$ . Físicamente, si  $\mathbf{c}(t)$  describe el movimiento de una partícula a lo largo del tiempo [es decir, si es su vector posición, que se suele llamar  $\mathbf{r}(t)$ ],  $\mathbf{c}'(t)$  representa el **vector velocidad**  $\mathbf{v}(t)$ .



[El escalar  $\|\mathbf{c}'(t)\|$  describe la rapidez (velocidad escalar) con la que la partícula avanza por la curva].

Por tanto, ecuaciones de la **recta tangente** a  $C$  en un punto  $\mathbf{c}(t_0)$  (si  $\mathbf{c}'(t_0) \neq \mathbf{0}$ ) pueden ser:

$$\boxed{\mathbf{x}(s) = \mathbf{c}(t_0) + s \mathbf{c}'(t_0)} \quad \text{o} \quad \boxed{\mathbf{x}(s) = \mathbf{c}(t_0) + (s - t_0) \mathbf{c}'(t_0)} \quad \begin{matrix} \text{[esta toca } \mathbf{c}(t_0) \\ \text{cuando } s = t_0] \end{matrix}$$

**Ej 1.** Sea  $\mathbf{c}(t) = (\cos t^2, \sin t^2)$ , con  $t \in [0, \sqrt{2\pi}]$ .  $\mathbf{c}(0) = \mathbf{c}(\sqrt{2\pi}) = (1, 0)$ .

Por ser  $\|\mathbf{c}(t)\| = \sqrt{\cos^2 + \sin^2} = 1$ , recorrerá  $\mathbf{c}$  la circunferencia unidad.

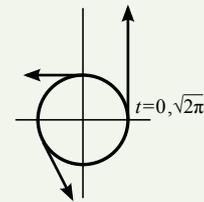
$\mathbf{c}'(t) = (-2t \sin t^2, 2t \cos t^2)$  será un vector tangente, y es  $\|\mathbf{c}'(t)\| = 2t$

[con lo que este módulo (la velocidad escalar) crece con el tiempo].

[Llega a  $(0, 1)$  para  $t = \sqrt{\pi/2}$ , y tarda el doble de tiempo en dar la vuelta entera].

$\mathbf{c}'(\sqrt{\pi/2}) = (-\sqrt{2\pi}, 0) \rightarrow \mathbf{x} = (-\sqrt{2\pi}s, 1)$  es la recta tangente en  $(0, 1)$  [o más sencilla  $\mathbf{x} = (s, 1)$ ].

[La misma curva la describe  $\mathbf{c}_*(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , siendo en este caso  $\|\mathbf{c}'_*(t)\| = 1$  constante].



**Ej 2.** Sea  $\mathbf{c}(t) = (t^3, 2t^2)$ . Dibujemos la curva descrita por  $\mathbf{c}$  para  $t \in [-1, 1]$ , hallemos su recta tangente en el punto  $(-1, 2)$  y el punto en que esta recta tangente vuelve a cortar la curva.

Dando valores a  $t$ , o viendo que se puede poner  $y = 2x^{2/3}$  sale el dibujo.

[Cuando  $\mathbf{c}' = \mathbf{0}$  (sin tangente definida), pueden aparecer picos como el del origen].

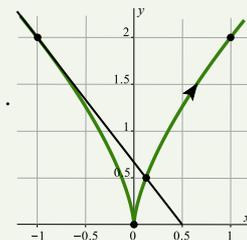
El punto se da si  $t = -1$ :  $\mathbf{c}(-1) = (-1, 2)$  y es  $\mathbf{c}'(-1) = (3t^2, 4t)|_{t=-1} = (3, -4)$ .

La recta tangente es:  $\mathbf{x}(s) = (3s - 1, 2 - 4s)$  [toca  $(\frac{1}{2}, 0)$  cuando  $s = 1/2$ ].

Corta la curva para  $t$  y  $s$  que cumplan:  $t^3 = 3s - 1$ ,  $2t^2 = 2 - 4s \rightarrow$

$(3s - 1)^2 = (1 - 2s)^3$ ,  $8s^3 - 3s^2 = 0$ ,  $s = \frac{3}{8} \rightarrow (\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$  [ $y = 0 \rightarrow (-1, 2)$ ].

[O bien, la curva  $y = 2x^{2/3}$  y la recta  $y = \frac{2-4x}{3}$  se cortan si  $27x^2 = (1-2x)^3$  que lleva a lo mismo].



Más difícil es, desde luego, dibujar curvas en  $\mathbf{R}^3$ . Estudiamos el ejemplo sencillo clásico, una **hélice**:

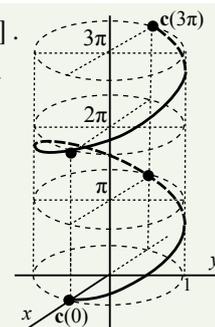
**Ej 3.** Dibujemos la curva del espacio descrita por  $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ ,  $t \in [0, 3\pi]$ .

Como  $[x(t)]^2 + [y(t)]^2 = 1$ , la proyección sobre el plano  $xy$  es la circunferencia unidad, mientras que la  $z$  de la curva crece constantemente con  $t$ .

El vector velocidad será  $\mathbf{c}'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$ , con lo que es  $\|\mathbf{c}'(t)\| = \sqrt{2}$ , que no depende de  $t$  (se recorre la curva a velocidad escalar constante).

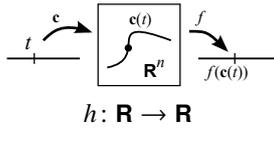
Por ejemplo, para  $t = 2\pi$  [en el punto  $(1, 0, 2\pi)$ ] es  $\mathbf{c}'(2\pi) = (0, 1, 1)$  y la recta tangente en ese punto se puede escribir:

$$\mathbf{x} = (1, 0, 2\pi) + s(0, 1, 1) = (1, s, 2\pi + s) \quad \begin{matrix} \text{[contenida en el plano } x = 1 \\ \text{y coherente con el dibujo].} \end{matrix}$$



**Primer caso de la regla de la cadena.** Generalizamos la fórmula  $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$ .  
 Tratemos por ahora el caso más sencillo, que una funciones vectoriales y campos escalares:

**Teor 1.** Sean  $\mathbf{c}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$  y  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  de  $C^1$  y sea  $h(t) = f(\mathbf{c}(t))$ .  
 Entonces  $h$  es derivable y es  $h'(t) = \nabla f(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t)$ , o sea:

$$h'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{c}(t)) x'_1(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{c}(t)) x'_n(t).$$


$h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

La última igualdad (por ejemplo cuando  $n=2$ ) habitualmente se escribe en la forma  $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$ ,

expresión imprecisa que no deja claro dónde está evaluada cada término [las parciales en  $((x(t), y(t)))$  y las derivadas ordinarias en  $t$ ] y que mantiene el nombre  $f$  para la  $h$  (son los valores de  $f$  sobre una curva).

$h$  describe la variación de  $f$  sobre la curva dada por  $\mathbf{c}$  y, por tanto,  $h'(t_0)$  mide la variación de  $f$  según el vector tangente a la curva en  $\mathbf{c}(t_0)$ , y esta derivada es, como sabemos,  $\nabla f(\mathbf{c}(t_0)) \cdot \mathbf{c}'(t_0)$ .

También se pueden dar derivadas segundas y sucesivas; por ejemplo, si  $n=2$ , como  $h' = f_x x' + f_y y'$ :  
 $h''(t) = f_{xx} (x')^2 + 2f_{xy} x' y' + f_{yy} (y')^2 + f_x x'' + f_y y''$ , pues  $(f_x)' = f_{xx} x' + f_{xy} y'$ , ...

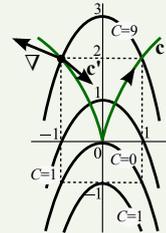
**Ej 4.** Si  $\mathbf{c}(t) = (t^3, 2t^2)$ ,  $f(x, y) = (y+x^2)^2$  y  $h = f \circ \mathbf{c}$ , hallemos  $h'(-1)$  utilizando la regla de la cadena.

$$\mathbf{c}(-1) = (-1, 2), \quad \mathbf{c}'(-1) = (3, -4), \quad \nabla f = (4x(y+x^2), 2(y+x^2)) \xrightarrow{(-1, 2)} (-12, 6).$$

Por tanto:  $h'(-1) = \nabla f(\mathbf{c}(-1)) \cdot \mathbf{c}'(-1) = (3, -4) \cdot (-12, 6) = -60$ .

[Podemos comprobar componiendo y derivando:  $h(t) = (2t^2 + t^6)^2 \rightarrow h'(-1) = -60$ ].

[Que la derivada sea negativa implica que la  $f$  decrece al avanzar sobre la curva, como se puede comprobar dibujándola junto a varias curvas de nivel  $f=C$ , que son parábolas de la forma  $y = \pm \sqrt{C-x^2}$  (u observando el gradiente en el punto)].



**Campos vectoriales.** Son funciones de  $\mathbf{R}^n$  en  $\mathbf{R}^m$ :  $\mathbf{f}: D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$   
 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))$ .

[O funciones vectoriales de varias variables reales con dominio  $D$ . Ya hemos el visto el caso particular de las **funciones vectoriales**, con  $n=1$ . Uno que ya ha aparecido, con  $n=m$ , es  $\nabla f$ ; otro, para  $n=m=3$ , será  $\text{rot } \mathbf{f}$ ; otros serán los **cambios de variable** que iremos haciendo].

En la diferencial de  $f$  escalares cumplía un papel importante el vector  $\nabla f$ . Aquí lo va a cumplir una matriz:

Se llama **matriz diferencial** o **jacobiana** de  $\mathbf{f}$  en  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{Df}(\mathbf{a}) \equiv \begin{pmatrix} \partial f_1 / \partial x_1 & \dots & \partial f_1 / \partial x_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial f_m / \partial x_1 & \dots & \partial f_m / \partial x_n \end{pmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{a}}$ .  
 [Las  $m$  filas de  $\mathbf{Df}$  son los gradientes de las  $m$  componentes].

[Si  $m=1$ , esta matriz es una matriz  $n \times 1$ : el vector gradiente  $\nabla f(\mathbf{a})$ . Si  $n=1$ , el vector derivada de una función vectorial  $\mathbf{c}'(t)$  (escrito como columna). Y si  $n=m=1$ , la más simple de las matrices:  $f'(a)$ ].

Diremos que  $\mathbf{f}$  es **diferenciable** en  $\mathbf{a}$  cuando lo sean sus  $m$  componentes  $f_1, \dots, f_m$  en ese punto. Y por tanto, si todas las  $f_k$  son  $C^1$  en un entorno de  $\mathbf{a}$  entonces  $\mathbf{f}$  será diferenciable en  $\mathbf{a}$ .

Y como en los campos escalares, cuando  $f$  sea diferenciable 'se parecerá a una función lineal' dada por la matriz diferencial:  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{a}) + \mathbf{Df}(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a})$ .

↑ poniendo  $\mathbf{x}-\mathbf{a}$  como columna y escribiendo el resultado como fila

**Ej 5.**  $\mathbf{f}(x, y) = (e^{xy}, y, 2x+y^2)$  es un campo vectorial diferenciable en el punto  $(1, 0)$  [lo es en todo  $\mathbf{R}^2$ ] porque las 6 parciales existen y son continuas en un entorno del punto. Su matriz diferencial es:

$$\mathbf{Df} = \begin{pmatrix} y e^{xy} & x e^{xy} \\ 0 & 1 \\ 2 & 2y \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{Df}(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{Como } \mathbf{f}(1,0) = (1,0,2) \text{ y } \mathbf{Df}(1,0) \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ 2x-2 \end{pmatrix}, \text{ la}$$

$\mathbf{f}: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  se parece cerca  $(1,0)$  a  $\mathbf{f}(x,y) \approx (1+y, y, 2x)$ .

En caso de que  $m=n$ , típico de los **cambios de variable**, cumplirá un papel importante (por ejemplo en la integración) el determinante de la matriz diferencial  $n \times n$ , llamado jacobiano del cambio:

Si  $\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ y_n = f_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$ , el **determinante jacobiano** es  $\frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \equiv \mathbf{Jf} \equiv |\mathbf{Df}| = \begin{vmatrix} \partial f_1 / \partial x_1 & \dots & \partial f_1 / \partial x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial f_n / \partial x_1 & \dots & \partial f_n / \partial x_n \end{vmatrix}$ .

[ $\mathbf{Jf}(\mathbf{a}) \neq 0$  implica, por ejemplo, que el cambio es inyectivo en un entorno del punto, con lo que existirá la función inversa  $\mathbf{f}^{-1}$  en un entorno, que era lo que sucedía en  $\mathbf{R}$  cuando  $f'(a) \neq 0$ ].

### Caso general de la regla de la cadena

**Teor 2.** Sean  $\mathbf{R}^n \xrightarrow{\mathbf{g}} \mathbf{R}^m \xrightarrow{\mathbf{f}} \mathbf{R}^p$ ,  $\mathbf{g}$  diferenciable en  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{f}$  diferenciable en  $\mathbf{b}=\mathbf{g}(\mathbf{a}) \Rightarrow$   
 $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$  diferenciable en  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{D}(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})(\mathbf{a}) = \mathbf{Df}(\mathbf{b}) \mathbf{Dg}(\mathbf{a})$  [producto de matrices].

**Ej 6.** Sean  $\mathbf{g}(x, y) = (x-y, y^2)$ ,  $\mathbf{f}(u, v) = (u+v, uv, v)$ . Hallemos  $\mathbf{D}(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})$  en  $(2, 1)$ . Utilizando el Teor 2:

$$\mathbf{Df}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ v & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{Dg}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2y \end{pmatrix}, \mathbf{g}(2, 1) = (1, 1) \Rightarrow \mathbf{D}(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})(2, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Comprobemos componiendo los campos y calculando luego la diferencial:

$$(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})(x, y) = \mathbf{f}(x-y, y^2) = (x-y+y^2, xy^2-y^3, y^2), \mathbf{D}(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})(2, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 2y-1 \\ y^2 & 2xy-3y^2 \\ 0 & 2y \end{pmatrix}_{(2,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Veamos la forma que adopta en un caso que aparecerá bastantes veces:

$f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $g: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ ,  $h = f \circ g: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$

$(r, s) \rightarrow (x, y)$   $(r, s) \rightarrow f(g(r, s)) = f(x(r, s), y(r, s))$

$$\left( \frac{\partial h}{\partial r} \quad \frac{\partial h}{\partial s} \right) = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r}, \quad \frac{\partial h}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}.$$

Conviene memorizar estas fórmulas, que se utilizan mucho más a menudo que la forma matricial. No se olvide que la  $f_x$  y la  $f_y$  están evaluadas en  $(x(r, s), y(r, s))$ . A menudo se mantiene el nombre impreciso de  $f$  para la  $h$ , pues es simplemente la  $f$  en unas nuevas variables.

Parecidas son las fórmulas en  $\mathbf{R}^3$ . Para una  $(r, s, t) \rightarrow f(g(r, s, t)) = f(x(r, s, t), y(r, s, t), z(r, s, t))$

las derivadas son:  $f_r = f_x x_r + f_y y_r + f_z z_r$ ,  $f_s = f_x x_s + f_y y_s + f_z z_s$ ,  $f_t = f_x x_t + f_y y_t + f_z z_t$ .

Todas (y otras no escritas) son fáciles de reconstruir: aparecen las derivadas de  $f$  respecto a todas las variables intermedias multiplicadas por sus derivadas respecto a misma variable de la izquierda.

**Ej 7.** Escribamos, usando la regla de la cadena, la ecuación en derivadas parciales  $(y-2)u_y - xu_x = x^2y$  en las nuevas variables  $s = xy - 2x$ ,  $t = x$  [este tipo de cálculos se harán muchas veces en 4.1].

Usamos las fórmulas de arriba, pero cambiando el nombre de las variables:

$$\begin{cases} u_x = u_s s_x + u_t t_x = (y-2)u_s + u_t \\ u_y = u_s s_y + u_t t_y = xu_s \end{cases}, \text{ que llevada a la ecuación nos da } -xu_t = x^2y, u_t = -xy.$$

Sólo falta escribir  $xy$  en las nuevas variables:  $xy = s + 2x = s + 2t \rightarrow u_t = -s - 2t$ .

Esta 'EDP' tan sencilla incluso la podemos resolver ya. Las  $u(s, t)$  que la cumplen son las de la forma:

$$u(s, t) = -st - t^2 + f(s), \text{ para cualquier función } f \text{ (desaparece al derivar respecto a } t).$$

Así hemos hallado la solución de nuestra primera EDP:  $u(x, y) = f(xy - 2x) + x^2 - x^2y$ ,  $\forall f \in C^1$ .

La comprobamos:  $u_x = (y-2)f'(xy-2x) + 2x - 2xy$ ,  $u_y = xf'(xy-2x) - x^2 \rightarrow$   
 $(y-2)u_y - xu_x = 0 - (y-2)x^2 - x(2x - 2xy) = x^2y$ .

**Ej 8.** Si  $\begin{cases} x = r + s^2 \\ y = rs \end{cases}$ , las derivadas de  $f(r+s^2, rs)$  respecto a las variables  $(r, s)$  son  $\begin{cases} f_r = f_x + s f_y \\ f_s = 2s f_x + r f_y \end{cases}$ .

Si  $f \in C^2$  podemos hallar también las derivadas segundas utilizando la regla de la cadena.

Como  $f_x$  y  $f_y$  son también funciones de  $r$  y  $s$ , se derivarán respecto a  $r$  y  $s$  de la misma forma que se derivaba la  $f$  (utilizando la expresión de arriba):

$$\begin{aligned} f_{rr} &= (f_r)_r = (f_x)_r + s(f_y)_r = [f_{xx} + s f_{xy}] + s[f_{yx} + s f_{yy}] = f_{xx} + 2s f_{xy} + s^2 f_{yy} \\ \bullet f_{rs} &= (f_r)_s = (f_x)_s + s(f_y)_s + f_y = [2s f_{xx} + r f_{xy}] + s[2s f_{yx} + r f_{yy}] + f_y = 2s f_{xx} + (r+2s^2) f_{xy} + r s f_{yy} + f_y \\ f_{ss} &= (f_s)_s = 2s(f_x)_s + r(f_y)_s + 2f_x = 2s[2s f_{xx} + r f_{xy}] + r[2s f_{yx} + r f_{yy}] + 2f_x = 4s^2 f_{xx} + 4rs f_{xy} + r^2 f_{yy} + 2f_x \end{aligned}$$

[Para escribir, por ejemplo,  $(f_x)_r$  simplemente se utilizó el hecho de que, según las expresiones para las derivadas primeras, había que derivarla respecto a  $x$  y sumarle  $s$  por su derivada respecto a  $y$ ].

[ $\bullet$ ] se podría también hacer así, pues sabemos que las derivadas cruzadas de las funciones  $C^2$  coinciden:

$$f_{rs} = (f_s)_r = 2s[f_{xx} + s f_{xy}] + r[f_{xy} + s f_{yy}] + f_y = 2s f_{xx} + (r+2s^2) f_{xy} + r s f_{yy} + f_y.$$

## Divergencia, laplaciano, rotacional

Si  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  es campo vectorial  $C^1$ , la **divergencia** de  $\mathbf{f}$  es el campo escalar:  $\operatorname{div} \mathbf{f} \equiv \nabla \cdot \mathbf{f} \equiv \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$ .

$\nabla \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$   
[notación sólo, eso no es ningún vector].

En particular, cuando  $\mathbf{f} = (f, g)$  es  $\operatorname{div} \mathbf{f} = f_x + g_y$ , y si  $\mathbf{f} = (f, g, h)$  es  $\operatorname{div} \mathbf{f} = f_x + g_y + h_z$ .

Si  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  es de  $C^2$ , el **laplaciano** de  $f$  es  $\Delta f \equiv \nabla \cdot (\nabla f) \equiv \nabla^2 f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$ .

Es otro campo escalar. En particular,  $\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$  o  $\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$ .

Para  $n=3$  hay otro importante campo vectorial que se obtiene a partir de uno dado:

Si  $\mathbf{f} = (f, g, h) : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  es de  $C^1$ , el **rotacional** de  $\mathbf{f}$  es el campo vectorial:

$$\operatorname{rot} \mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ f & g & h \end{vmatrix} = (h_y - g_z) \mathbf{i} + (f_z - h_x) \mathbf{j} + (g_x - f_y) \mathbf{k}.$$

Algunas propiedades y relaciones (para  $n=3$  y campos  $C^2$ ) fácilmente comprobables son:

$$\operatorname{rot}(\nabla f) = \mathbf{0}, \quad \operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{f}) = 0, \quad \operatorname{div}(g \mathbf{f}) = g \operatorname{div} \mathbf{f} + \nabla g \cdot \mathbf{f}, \quad \operatorname{rot}(g \mathbf{f}) = g \operatorname{rot} \mathbf{f} + \nabla g \times \mathbf{f}.$$

Por ejemplo, la primera:  $\operatorname{rot}(f_x, f_y, f_z) = (f_{zy} - f_{yz}) \mathbf{i} + (f_{xz} - f_{zx}) \mathbf{j} + (f_{yx} - f_{xy}) \mathbf{k} = \mathbf{0}$ .

[No sólo el rotacional de un gradiente es  $\mathbf{0}$ . En 2.2 veremos que si el rotacional de un campo vectorial  $C^1$  se anula, este campo será el gradiente de un campo escalar que sabremos calcular].

**Ej 9.** Sea  $\mathbf{f} = (xyz, e^{yz}, y^2)$ .  $\operatorname{div} \mathbf{f} = yz + z e^{yz}$ .  $\operatorname{rot} \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ xyz & e^{yz} & y^2 \end{vmatrix} = (2y - y e^{yz}, xy, -xz)$ .

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{f}) = x - x = 0 \text{ (debía serlo)}. \quad \nabla(\operatorname{div} \mathbf{f}) = (0, z + z^2 e^{yz}, y + e^{yz} + yz e^{yz}). \quad \Delta(\operatorname{div} \mathbf{f}) = (z^3 + y^2 z + 2y) e^{yz}.$$

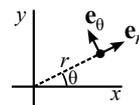
[No tiene sentido hablar del gradiente o laplaciano de  $\mathbf{f}$ , ni de divergencia o rotacional de campos escalares. Estos cuatro 'operadores' (reglas que convierten unas funciones en otras, como también hace la derivada) son 'lineales' (porque lo es la derivada):  $\nabla(af + bg) = a \nabla f + b \nabla g$ ,  $a, b \in \mathbf{R}$ , e igual los otros tres].

Escribamos  $\nabla f$  y  $\Delta f$  en  $\mathbf{R}^2$  en términos de las **coordenadas polares**:  $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \theta = \frac{y}{x} \end{cases}$ .

Por la regla de la cadena:  $\begin{cases} f_r = \cos \theta f_x + \sin \theta f_y \\ f_\theta = -r \sin \theta f_x + r \cos \theta f_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_r \cos \theta - \frac{1}{r} f_\theta \sin \theta = f_x \\ f_r \sin \theta + \frac{1}{r} f_\theta \cos \theta = f_y \end{cases} \Rightarrow$

$$\nabla f = f_r \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} f_\theta \mathbf{e}_\theta, \text{ si definimos } \mathbf{e}_r = (\cos \theta, \sin \theta), \mathbf{e}_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta).$$

[Esta pareja de vectores son unitarios y perpendiculares entre sí y es  $\frac{d}{d\theta} \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\theta$ ].



Utilizando de nuevo la regla de la cadena para escribir las derivadas segundas:

$$\begin{cases} f_{rr} = \cos^2 \theta f_{xx} + 2 \sin \theta \cos \theta f_{xy} + \sin^2 \theta f_{yy} \\ f_{\theta\theta} = r^2 \sin^2 \theta f_{xx} - 2r^2 \sin \theta \cos \theta f_{xy} + r^2 \cos^2 \theta f_{yy} - r \cos \theta f_x - r \sin \theta f_y \end{cases} \Rightarrow \Delta f = f_{rr} + \frac{f_r}{r} + \frac{f_{\theta\theta}}{r^2}.$$

[Basta escribir la suma del segundo miembro y usar que  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$  para obtener  $f_{xx} + f_{yy}$ ].

**Ej 10.** Sea  $f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}$ , con  $f(0, 0) = 0$ . Calculemos  $\nabla f$  y  $\Delta f$  en el punto  $(x, y) = (1, 1)$ .

Escrito en polares toma la sencilla forma  $f(r, \theta) = r \cos^3 \theta$  y el punto pasa a ser  $(r, \theta) = (\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ .

$$\nabla f = \cos^3 \theta \mathbf{e}_r - 3 \cos^2 \theta \sin \theta \mathbf{e}_\theta \Big|_{(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})} = \frac{\sqrt{2}}{4} \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \frac{3\sqrt{2}}{4} \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \left( 1, -\frac{1}{2} \right).$$

$$\Delta f = 0 + \frac{\cos^3 \theta}{r} + \frac{6 \cos \theta \sin^2 \theta - 3 \cos^3 \theta}{r} = \frac{2}{r} \cos \theta (3 - 4 \cos^2 \theta) \text{ que en } (\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}) \text{ vale } 1.$$

$$\text{Más largo haciendo: } \nabla f = \left( \frac{x^4 + 3x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{-2x^3 y}{(x^2 + y^2)^2} \right), \quad \Delta f = \frac{4x^3 + 6xy^2 - 2x^3}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{8x^3 y^2 - 4x(x^4 + 3x^2 y^2)}{(x^2 + y^2)^3} = \frac{2x(3y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Las polares son útiles para analizar continuidades complicadas. ¿Es continua en  $(0, 0)$ ? Con la expresión polar es claro que podemos hacer  $f$  tan pequeña como queramos:  $|f(r, \theta) - 0| = r |\cos^3 \theta| \leq r < \varepsilon$  si  $\|(x, y) - (0, 0)\| = r < \delta = \varepsilon$ .

Acabamos el capítulo con más ejemplos con preguntas varias (típicos de examen) que sirvan de repaso:

**Ej 11.** Sea  $f(x, y) = \frac{y^2}{x^2}$ . Dibujar sus curvas de nivel  $f(x, y) = 0$  y  $1$ . Hallar  $\|\nabla f(-1, 1)\|$  y  $\text{div}(\nabla f)$ . Hallar, si existe, un vector unitario  $\mathbf{u}$  para el que  $D_{\mathbf{u}}f(-1, 1)$ : i) sea mínima, ii) sea 0, iii) sea 3. Dibujar  $\mathbf{c}(t) = (t-1, e^t)$  y si  $h(t) = f(\mathbf{c}(t))$  hallar  $h'(0)$  mediante de la regla de la cadena en  $\mathbf{R}^n$ . Calcular, por dos caminos, la ecuación del plano tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $(-1, 1)$ .

$$f=0 \rightarrow y=0, f=1 \rightarrow y^2=x^2, y=\pm x. \text{ [Y en } x=0 \text{ la } f \text{ tiende a } +\infty \text{].}$$

$$\nabla f(x, y) = (-2x^{-3}y^2, 2x^{-2}y) \rightarrow \|\nabla f(-1, 1)\| = \|(2, 2)\| = 2\sqrt{2}.$$

$$\text{div}(\nabla f) = \Delta f = f_{xx} + f_{yy} = 6x^{-4}y^2 + 2x^{-2} = \frac{6y^2}{x^4} + \frac{2}{x^2} = 2\frac{3y^2+x^2}{x^4}.$$

[Aunque las cartesianas son adecuadas, lo hallamos también en polares:

$$f(r, \theta) = \tan^2 \theta, f_r = f_{rr} = 0, \Delta f = \frac{1}{r^2} f_{\theta\theta} = \frac{2}{r^2} (1 + 4 \tan^2 \theta + 3 \tan^4 \theta)].$$

$$D_{\mathbf{u}} \text{ mínima en sentido opuesto a } \nabla f: (-1, -1) \rightarrow \mathbf{u} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

$$[\text{Vale } D_{\mathbf{u}}f(-1, 1) = (2, 2) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2\sqrt{2} = -\|\nabla f(-1, 1)\|, \text{ como debía}].$$

$$D_{\mathbf{u}} = 0 \text{ en dirección perpendicular al gradiente: } \mathbf{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ o } \mathbf{u} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

[Para precisar los tres vectores anteriores de i) y ii) bastaba con observar las curvas de nivel].

No hay ningún  $\mathbf{u}$  con  $D_{\mathbf{u}} = 3$  pues el máximo valor es el módulo del gradiente y es  $2\sqrt{2} < 3$ .

Podemos dibujar  $\mathbf{c}$  dando valores:  $t=0 \rightarrow (-1, 1)$ ,  $t=1 \rightarrow (0, e)$ ,  $x \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} -\infty$ ,  $y \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} 0, \dots$

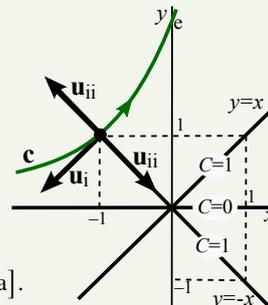
o, como  $t = x + 1$ , dibujar la gráfica de  $y = e^{x+1}$  (la de  $y = e^x$  llevada una unidad para la izquierda).

$$\mathbf{c}'(t) = (1, e^t), h'(0) = \nabla f(\mathbf{c}(0)) \cdot \mathbf{c}'(0) = (2, 2) \cdot (1, 1) = 4 \text{ [comprobable derivando } h(t) = e^t(t-1)^{-2} \text{].}$$

Plano tangente:  $z = 1 + 2(x+1) + 2(y-1) = 2x + 2y + 1$ , que podríamos hallar con la otra fórmula:

$$z = \frac{y^2}{x^2} \Leftrightarrow F(x, y, z) = x^2z - y^2 = 0. \nabla F(-1, 1, 1) = (2xz, -2y, x^2)|_{(-1, 1, 1)} = (-2, -2, 1).$$

$$(-2, -2, 1) \cdot (x+1, y-1, z-1) = -2x + 2y + z - 1 = 0, \text{ que nos da de nuevo el plano.}$$



**Ej 12.** Sea  $f(x, y) = 3 - \sqrt{x^2 + y^2}$ . Dibujar las curvas de nivel  $f(x, y) = 2, 0, -2$  y la gráfica de  $f$ . Hallar el plano tangente a la gráfica en el punto  $(4, 3)$ . Calcular  $\Delta f(4, 3)$  en cartesianas y polares. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva intersección de la gráfica con  $z=2$  en  $(0, -1, 2)$ .

$$x^2 + y^2 = (3 - C)^2 \text{ circunferencias de radio } 3 - C \text{ [1, 3, 5, si } C=2, 0, -2].$$

Corte con  $x=0$ ,  $z = 3 - |y|$ . Y de revolución. Es el cono de abajo.

$$\nabla f = (f_x, f_y) = (-x(x^2 + y^2)^{-1/2}, -y(x^2 + y^2)^{-1/2}) \xrightarrow{(4, 3)} \left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right).$$

$$\text{Plano tangente: } z = -2 - \frac{4}{5}(x-4) - \frac{3}{5}(y-3) = 3 - \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y.$$

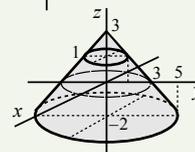
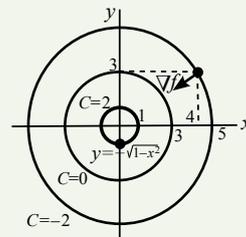
$$f(r, \theta) = 3 - r \rightarrow \Delta f = f_{rr} + \frac{1}{r}f_r + \frac{1}{r^2}f_{\theta\theta} = -\frac{1}{r} \xrightarrow{r=5} -\frac{1}{5} = \Delta f(4, 3).$$

$$\text{O bien: } -2(x^2 + y^2)^{-1/2} + x^2(x^2 + y^2)^{-3/2} + y^2(x^2 + y^2)^{-3/2} = -(x^2 + y^2)^{-1/2}.$$

[El gradiente en polares también es fácil:  $\nabla f = f_r \hat{\mathbf{e}}_r = -(\cos \theta, \sin \theta)$ ].

Obviamente la tangente a esa circunferencia unidad contenida en  $z=2$  tiene por ecuación  $\mathbf{x} = (t, -1, 2)$ . Dos formas de describir esa curva son:

$$\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t, 2), t \in [-\pi, \pi] \text{ (} \mathbf{c}'(-\pi/2) = (1, 0, 0) \text{) o } \mathbf{c}(x) = (x, -\sqrt{1-x^2}, 2), x \in [-1, 1].$$



**Ej 13.** Sea  $\mathbf{f}(x, y, z) = (xz^2, yx^2, zy^2 - 3z^2)$ . Calcular: i)  $\text{div } \mathbf{f}$ , ii)  $\text{rot } \mathbf{f}$ , iii)  $\nabla(\text{div } \mathbf{f})$  y iv)  $\Delta(\text{div } \mathbf{f})$ . Hallar la recta perpendicular a la superficie  $\text{div } \mathbf{f} = 0$  en el punto  $(1, 2, 1)$  y precisar su punto de corte con el plano  $x=0$ .

$$\text{i) } \text{div } \mathbf{f} = z^2 + x^2 + y^2 - 6z. \text{ ii) } \text{rot } \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ xz^2 & yx^2 & zy^2 - 3z^2 \end{vmatrix} = 2(yz, xz, xy). \text{ iii) } \nabla(\text{div } \mathbf{f}) = 2(x, y, z-3). \text{ iv) } \Delta(\text{div } \mathbf{f}) = 6.$$

Un vector normal a la superficie se obtiene de iii):  $(1, 2, -2)$  [mejor sin el 2]. La recta es, pues:

$$\mathbf{x} = (1, 2, 1) + t(1, 2, -2) = (1+t, 2+2t, 1-2t) \text{ que corta } x=0 \text{ si } t=-1 \rightarrow \text{punto de corte } (0, 0, 3).$$

[Con un poco de vista se puede observar que  $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 9$  es la superficie esférica de centro  $(0, 0, 3)$  y radio 3, y cualquier recta normal a ella debía pasar por su centro].

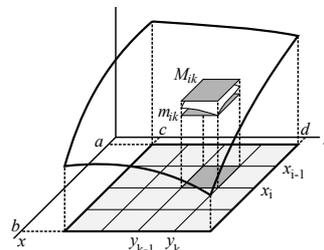
## 2. Cálculo integral en $\mathbb{R}^n$

### 2.1 Integrales múltiples. Cambios de variable

**Integrales dobles.** Su definición generaliza la de la integral en  $\mathbb{R}$ . Sea  $f(x, y)$  acotada en un rectángulo  $R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ . Se divide  $R$  en  $n \times n$  rectángulos  $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{k-1}, y_k]$ , de área  $\Delta x \Delta y = \frac{b-a}{n} \frac{d-c}{n}$ . Se llama  $M_{ik}$  y  $m_{ik}$  al supremo e ínfimo de  $f$  en cada  $R_{ij}$  y las sumas superior e inferior son:

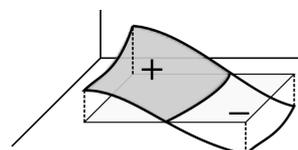
$$U_n = \sum_{i,k=1}^n M_{ik} \Delta x \Delta y, \quad L_n = \sum_{i,k=1}^n m_{ik} \Delta x \Delta y$$

(sumas de volúmenes de prismas, una mayor y otra menor que el volumen que encierra  $f(x, y)$  si  $f \geq 0$ ).



Si las sucesiones  $\{L_n\}$  y  $\{U_n\}$  tienden al mismo límite, se dice que  $f$  es **integrable** en  $R$ , se representa el límite común por  $\iint_R f$  ó  $\iint_R f(x, y) dx dy$  y se llama **integral** de  $f$  en  $R$ .

$\iint_R f$  representará (similar a lo que sucedía en  $\mathbb{R}$ ) la suma de los volúmenes encerrados entre la gráfica de  $f$  y el plano  $z=0$  en  $R$ , con signos + o - adecuados. Y al igual que sucedía allí:



**Teor 1.**  $f$  continua en  $R \Rightarrow f$  integrable en  $R$ .

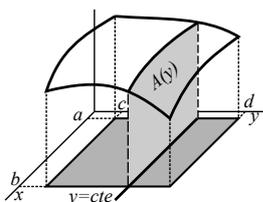
También aquí las funciones 'poco' discontinuas siguen siendo integrables:

**Teor 2.** Si una  $f$  acotada en  $R$  es discontinua como mucho en un número finito de puntos y de gráficas de funciones continuas, entonces  $f$  es integrable en  $R$ .

Para calcular integrales dobles **no se necesita la definición**, el problema se reduce a realizar dos integraciones sucesivas de funciones de una variable:

**Teorema de Fubini:**

$$f \text{ continua en } R \Rightarrow \iint_R f = \int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y) dx \right] dy = \int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) dy \right] dx.$$



Para cada  $y$  constante  $A(y) = \int_a^b f(x, y) dx$  representa el área de la sección del sólido determinado por la gráfica de  $f$ ; integrando  $A(y)$  entre  $c$  y  $d$  obtenemos el volumen:  $\iint_R f = \int_c^d A(y) dy$ . La otra igualdad es lo simétrico.

**Ej 1.** Sean  $R = [0, \pi] \times [0, 1]$  y  $f(x, y) = y \sin x$ . Calcular la integral es fácil:

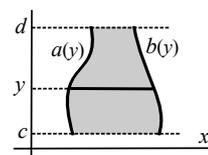
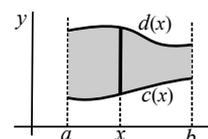
$$\iint_R f = \int_0^\pi \left[ \int_0^1 y \sin x dy \right] dx = \int_0^\pi \left[ \frac{y^2 \sin x}{2} \right]_0^1 dx = \int_0^\pi \frac{\sin x}{2} dx = \frac{1 - \cos \pi}{2} = 1.$$

$$\text{O bien: } \iint_R f = \int_0^1 \left[ \int_0^\pi y \sin x dx \right] dy = \int_0^1 [-y \cos x]_0^\pi dy = \int_0^1 2y dy = 1.$$

No sólo se puede integrar sobre rectángulos. Podemos hacerlo en **dos tipos sencillos** de regiones  $D$  (y otras más complicadas se podrán dividir en algunas de esa forma).

i)  $f$  continua en  $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x)\}$ , con  $c \leq d$  continuas en  $[a, b] \Rightarrow \iint_D f = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy dx$ .

**Teor 3.** ii)  $f$  continua en  $D = \{(x, y) : c \leq y \leq d, a(y) \leq x \leq b(y)\}$ , con  $a \leq b$  continuas en  $[c, d] \Rightarrow \iint_D f = \int_c^d \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx dy$ .

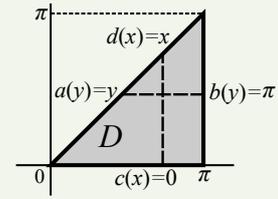


Cuando la  $x$  varía entre  $a$  y  $b$ , la  $y$  varía entre  $c(x)$  y  $d(x)$  y similar para ii).

$A(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy$  describe el área de la sección e  $\iint_D f = \int_a^b A(x) dx$  **representa** (si  $f \geq 0$ ) **el volumen del sólido encerrado entre la gráfica de  $f$  y el plano  $xy$  en la región  $D$** .  $\iint_D 1$  proporciona el **área de  $D$** .

**Ej 2.** Integremos  $f(x, y) = x \cos(x+y)$  sobre el  $D$  del dibujo, que es de los dos tipos considerados en el teorema 3:

$$\begin{aligned} \iint_D f &= \int_0^\pi \left[ \int_0^x x \cos(x+y) dy \right] dx = \int_0^\pi x [\sin 2x - \sin x] dx \\ &= \left[ x(\cos x - \frac{1}{2} \cos 2x) \right]_0^\pi + \int_0^\pi \left[ \frac{1}{2} \cos 2x - \cos x \right] dx = -\frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$



O, con cálculos más largos, integrando primero respecto a  $x$ :

$$\iint_D f = \int_0^\pi \left[ \int_y^\pi x \cos(x+y) dx \right] dy \stackrel{\text{partes}}{=} \int_0^\pi [-\pi \sin y - \cos y - y \sin 2y - \cos 2y] dy = -\frac{3\pi}{2}.$$

Observemos que, a veces, no sólo es preferible integrar primero respecto de una variable concreta y luego respecto de la otra, sino que no tenemos otra opción. Por ejemplo, si fuese  $f(x, y) = \sin x^2$ ,

no se podría hacer  $\int_0^\pi \left[ \int_y^\pi \sin x^2 dx \right] dy$ , por ser la primitiva no calculable, pero sí se puede hacer:

$$\int_0^\pi \int_0^x \sin x^2 dy dx = \int_0^\pi x \sin x^2 dx = -\frac{1}{2} \cos x^2 \Big|_0^\pi = \frac{1}{2} [1 - \cos \pi^2].$$

[No olvidemos que **la integral de una constante es la constante por la longitud del intervalo**].

[Los corchetes que hemos escrito hasta la última expresión normalmente no se escriben].

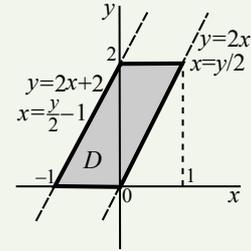
**Ej 3.** Calculemos  $\iint_D (y-2x)^3 dx dy$ , con  $D$  cuadrilátero de vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 2)$ ,  $(0, 2)$  y  $(-1, 0)$ .

Para no tener que hacer 2 integrales, integramos primero respecto a  $x$ :

$$\int_0^2 \int_{y/2-1}^{y/2} (y-2x)^3 dx dy = \int_0^2 -\frac{1}{8} [(y-2x)^4]_{y/2-1}^{y/2} dy = \int_0^2 2 dy = 4.$$

Con el otro orden de integración hay que dividir en dos recintos:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 \int_0^{2x+2} (y-2x)^3 dy dx + \int_0^1 \int_{2x}^2 (y-2x)^3 dy dx \\ = \int_{-1}^0 [4-4x^4] dx + \int_0^1 4(x-1)^4 dx = 4 - \frac{4}{5} + \frac{4}{5} = 4. \end{aligned}$$



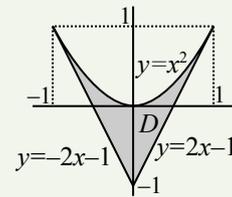
En recintos más complicados no tendremos más remedio que dividir. La integral sobre el recinto total  $D$  siempre será la suma de las integrales sobre cada uno de los subconjuntos:

**Ej 4.** Para calcular la integral de una  $f$  sobre el recinto limitado por  $y=x^2$  e  $y=2|x|-1$  podemos hacer:

$$\iint_D f = \int_{-1}^0 \left[ \int_{-2x-1}^{x^2} f(x, y) dy \right] dx + \int_0^1 \left[ \int_{2x-1}^{x^2} f(x, y) dy \right] dx.$$

O bien, como  $y=x^2 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{y}$ ,  $y=2|x|-1 \Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{2}(y+1)$ , se puede hacer (calculando más integrales) también de esta forma:

$$\iint_D f = \int_0^1 \left[ \int_{-(y+1)/2}^{-\sqrt{y}} f(x, y) dx \right] dy + \int_0^1 \left[ \int_{\sqrt{y}}^{(y+1)/2} f(x, y) dx \right] dy + \int_{-1}^0 \left[ \int_{-(y+1)/2}^{(y+1)/2} f(x, y) dx \right] dy.$$



Si en particular integramos  $f \equiv 1$  obtendremos, como hemos dicho, el **área de  $D$** :

$$A = \iint_D 1 = \int_{-1}^0 (x^2+2x+1) dx + \int_0^1 (x^2-2x+1) dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

[Integrales iguales por ser  $f \equiv 1$  **par** en  $x$  y  $D$  simétrico respecto a  $x=0$ ; bastaba hacer  $2\int_0^1$ ].

O bien:  $A = \iint_D 1 = 2 \int_0^1 \left[ \frac{y}{2} + \frac{1}{2} - \sqrt{y} \right] dy + \int_{-1}^0 [y+1] dy = 2\frac{1}{12} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$  [ $\frac{1}{2}$  = área triángulo].

Tomemos ahora  $f(x, y) = 2x^3y$  y hallemos la integral por el primer camino:

$$\begin{aligned} \iint_D f &= \int_{-1}^0 [x^3y^2]_{-2x-1}^{x^2} dx + \int_0^1 [x^3y^2]_{2x-1}^{x^2} dx = \int_{-1}^0 [x^7-4x^5-4x^4-x^3] dx + \int_0^1 [x^7-4x^5+4x^4-x^3] dx \\ &= \left[ -\frac{1}{8} + \frac{2}{3} - \frac{4}{5} + \frac{1}{4} \right] + \left[ \frac{1}{8} - \frac{2}{3} + \frac{4}{5} - \frac{1}{4} \right] = -\frac{1}{120} + \frac{1}{120} = 0. \end{aligned}$$

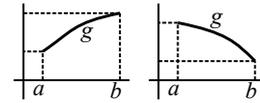
[Debía anularse por ser  $f$  **impar** en  $x$  y  $D$  simétrico respecto a  $x=0$ . El 'volumen negativo' definido por la gráfica de  $f$  en la parte de  $D$  con  $x \leq 0$  se cancela con el positivo de la parte con  $x \geq 0$ ].

**Cambios de variable.** Generalicemos para las integrales dobles la conocida fórmula de  $\mathbf{R}$ :

$$\int_a^b f(g(u)) g'(u) du = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx, \text{ con } g \in C^1([a, b]),$$

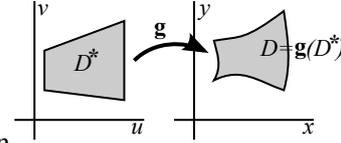
en concreto, el caso de  $g$  **inyectiva** (creciente o decreciente) en  $[a, b]$ :

$$\int_{[a,b]} f(g(u)) |g'(u)| du = \int_{g([a,b])} f(x) dx.$$



En  $\mathbf{R}^2$  nuestra situación será esta: para calcular  $\iint_D f(x, y) dx dy$

realizaremos un cambio de variable  $\mathbf{g} : D^* \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow D \subset \mathbf{R}^2$   
 $(u, v) \rightarrow (x(u, v), y(u, v))$



de modo de que el nuevo recinto de integración  $D^*$  o la nueva función a integrar sean más sencillas. Se puede demostrar (es complicado) que:

**Teor 4.**

Sea  $\mathbf{g} : (u, v) \rightarrow (x(u, v), y(u, v))$  de  $C^1$ , inyectiva en  $D^*$ ,  $\mathbf{g}(D^*) = D$  y  $f$  integrable.

$$\text{Entonces: } \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$

[El jacobiano viene a medir como se deforman las áreas al pasar a la nuevas variables].

Como primer ejemplo de cambio de variable consideramos los **cambios lineales**:

$$\begin{cases} x = Au + Bv \\ y = Cu + Dv \end{cases} \text{ con } \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = AD - BC \neq 0 \text{ (para que defina biyección de } \mathbf{R}^2 \text{ en } \mathbf{R}^2).$$

$$\rightarrow \iint_D f(x, y) dx dy = |AD - BC| \iint_{D^*} f(Au + Bv, Cu + Dv) du dv.$$

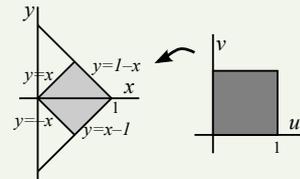
[Las regiones se transforman de forma sencilla por llevar las aplicaciones lineales rectas a rectas].

**Ej 5.** Sea  $D$  el cuadrado de la figura y hallemos  $\iint_D (x-y)^2 e^{x+y} dx dy$ .

$$\text{La forma de } f \text{ y el recinto sugieren: } \begin{cases} x + y = u \\ x - y = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (u+v)/2 \\ y = (u-v)/2 \end{cases}.$$

Las rectas que definen los lados pasan a ser:  $u = 0, 1, v = 0, 1$ .

$$\text{El jacobiano } \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}. \text{ Así pues } \iint_D = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 v^2 e^u du dv = \frac{e-1}{6}.$$

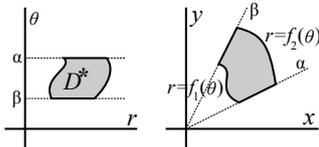
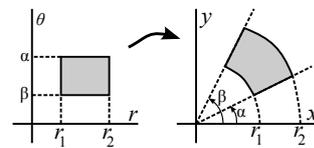


Más a menudo nos va a aparecer y más útil será el **cambio a polares**:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}. \text{ El jacobiano es ahora: } \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r.$$

$$\text{Con lo que el cambio adopta la forma: } \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} r f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr d\theta.$$

¿Qué conjuntos  $D$  provienen de conjuntos  $D^*$  sencillos del plano  $r\theta$ ? Un rectángulo  $[r_1, r_2] \times [\theta_1, \theta_2]$  pasa a ser un sector de corona circular limitado por las circunferencias de radio  $r_1$  y  $r_2$  y por las rectas que pasan por el origen de pendientes  $\theta_1$  y  $\theta_2$ .



Si lo que queremos es hallar el área en polares de una región  $D$  limitada en  $\theta \in [\alpha, \beta]$  por  $r = f_1(\theta)$  y  $r = f_2(\theta)$  obtenemos:

$$\text{área} = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{f_1(\theta)}^{f_2(\theta)} r dr d\theta = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f_2^2(\theta) - f_1^2(\theta)] d\theta.$$

[Coincidente con mis apuntes de matemáticas].

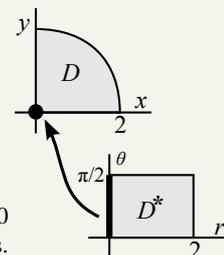
**Ej 6.** Hallemos  $\iint_D \sqrt{4-x^2-y^2} dx dy$ , con  $D$  el sector circular del dibujo:

La presencia de  $x^2+y^2$  y el aspecto de  $D$  piden a gritos las polares.

$$\iint_{D^*} r \sqrt{4-r^2} dr d\theta = \int_0^{\pi/2} \left[ \int_0^2 r(4-r^2)^{1/2} dr \right] d\theta = \frac{\pi}{2} \left[ \frac{(4-r^2)^{3/2}}{-3} \right]_0^2 = \frac{4\pi}{3}.$$

el [ ] no depende de  $\theta$       octante de esfera  $\uparrow$

El cambio no es inyectivo en lado izquierdo del rectángulo  $D^*$  (todos los puntos con  $r=0$  van al origen), pero el teor 4 se cumple aunque falle la inyectividad en puntos o rectas sueltas.



Aunque el integrando es sencillo en cartesianas, el recinto pide usar polares:

**Ej 7.** Calcular la integral doble  $\iint_D (x-y)^2 dx dy$ , con  $D$  semicírculo dado por  $x^2+y^2 \leq 4, x \geq 0$ .

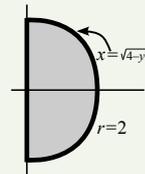
En polares es  $(r \cos \theta - r \sin \theta)^2 = r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta) = r^2 (1 - \sin 2\theta)$ . Por tanto:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^2 r^3 (1 - \sin 2\theta) dr d\theta = 4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin 2\theta) d\theta = 4\pi.$$

↑ por el jacobiano (es impar)

Debía ser mayor que 0 por ser el integrando positivo. En cartesianas sería mucho peor:

$$\int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (x^2 - 2xy + y^2) dx dy = \int_{-2}^2 \left( y^3 - 4y + \frac{2}{3}(y^2+2)\sqrt{4-y^2} \right) dy = \dots$$



En el siguiente ejemplo, aunque el recinto no parecería adecuado a las polares, ya que no está limitado por curvas  $r=cte$  o  $\theta=cte$ , el aspecto del integrando las pide indudablemente:

**Ej 8.** Integremos  $f(x, y) = \frac{y}{x^2+y^2}$ , sobre el semicírculo  $x^2+(y-1)^2 \leq 1, y \geq 1$ .

Las curvas que limitan el recinto, escritas en polares quedan:

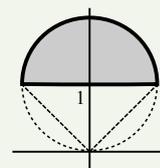
$$y = r \sin \theta = 1 \rightarrow r = 1/\sin \theta, \quad x^2+y^2 = 2y, \quad r^2 = 2r \sin \theta \rightarrow r = 2 \sin \theta.$$

$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_{1/\sin \theta}^{2 \sin \theta} \frac{r^2 \sin \theta}{r^2} dr d\theta = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} (2 \sin^2 \theta - 1) d\theta = - \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \cos 2\theta d\theta = 1.$$

Las cuentas se complican mucho si se intentan hacer de cualquiera de las dos formas en cartesianas:

$$\int_{-1}^1 \int_1^{1+\sqrt{1-x^2}} \frac{y}{x^2+y^2} dy dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 [\ln 2 + \ln(1+\sqrt{1-x^2}) + \ln(1+x^2)] dx = \dots$$

O aún peor:  $\int_1^2 \int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} \frac{y}{x^2+y^2} dx dy \stackrel{\text{par en } x}{=} 2 \int_1^2 \left[ \arctan \frac{x}{y} \right]_0^{\sqrt{2y-y^2}} dy = \int_1^2 \arctan \frac{\sqrt{2-y}}{\sqrt{y}} dy = \dots$



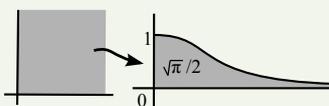
Usemos el cambio a polares para hallar un integral impropia de una variable con primitiva no elemental:

**Ej 9.** Para calcular  $I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$  consideramos la integral doble:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^\infty e^{-y^2} \int_0^\infty e^{-x^2} dx dy = \int_0^\infty I e^{-y^2} dy = I^2.$$

En polares queda:  $\int_0^{\pi/2} \int_0^\infty r e^{-r^2} dr d\theta = \frac{\pi}{2} \left[ -\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^\infty = \frac{\pi}{4} \Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$

Deducimos además, por la paridad del integrando, que  $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$



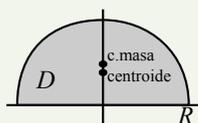
Además del **área** de  $D$ ,  $A = \iint_D dx dy$ , y del **volumen** en  $D$  bajo  $f(x, y) \geq 0$ ,  $V = \iint_D f dx dy$ , las integrales dobles tienen otra serie de aplicaciones (las fórmulas son análogas para  $\mathbf{R}^3$ ).

La **masa** de una placa  $D$  es  $M = \iint_D \rho(x, y) dx dy$ , si  $\rho(x, y)$  es su densidad.

El **centro de masa** de  $D$  es el punto  $(\bar{x}, \bar{y})$  con  $\bar{x} = \frac{1}{M} \iint_D x \rho$ ,  $\bar{y} = \frac{1}{M} \iint_D y \rho$  (**centroide** si  $\rho = cte$ ).

Los **momentos de inercia** respecto a los ejes  $x$  e  $y$  son:  $I_x = \iint_D y^2 \rho$ ,  $I_y = \iint_D x^2 \rho$ .

**Ej 10.** Sea  $D$  un semicírculo de radio  $R$  de densidad directamente proporcional a la distancia al centro de  $D$ . Hallemos su centroide, su centro de gravedad y sus momentos de inercia respecto de los ejes.



Se puede probar que si una lámina tiene un eje de simetría, su centroide está en dicho eje (y si tiene dos, está en su intersección). Por tanto,  $\bar{x}_c = 0$ . La otra

$$\bar{y}_c = \frac{1}{A} \iint_D y dx dy = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^\pi \int_0^R r^2 \sin \theta dr d\theta = \frac{2}{\pi R^2} \left[ \frac{r^3}{3} \right]_0^R \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{4R}{3\pi} \approx 0.42 R.$$

Para el centro de gravedad hay que incluir la densidad  $\rho(r) = kr$  (simétrica). También  $\bar{x} = 0$ .

Como la masa es  $M = \int_0^\pi \int_0^R kr^2 dr d\theta = \frac{\pi R^3 k}{3}$ , será  $\bar{y} = \frac{3}{\pi R^3} \int_0^\pi \int_0^R r^3 \sin \theta dr d\theta = \frac{3R}{2\pi} \approx 0.48 R$ .

Los momentos:  $I_x = k \int_0^\pi \int_0^R r^4 \sin^2 \theta dr d\theta = \frac{k}{2} \int_0^\pi r^4 dr \int_0^\pi [1 - \cos 2\theta] d\theta = \frac{k\pi R^5}{10}$ .

$$I_y = k \int_0^\pi \int_0^R r^4 \cos^2 \theta dr d\theta = \frac{k}{2} \int_0^\pi r^4 dr \int_0^\pi [1 + \cos 2\theta] d\theta = \frac{k\pi R^5}{10}.$$

[Los cálculos en polares llevan a integrales de  $\sin^n \theta \cos^m \theta$ . Recordemos que si  $m$  o  $n$  son impares son más sencillas, y que si son pares se usan las igualdades  $\sin^2 \theta = (1 - \cos 2\theta)/2$ ,  $\cos^2 \theta = (1 + \cos 2\theta)/2$ ].

**Integrales triples.** Análogamente a  $n=2$  se define la  $\iiint_B f$  para una  $f(x, y, z)$  acotada en un paralelepípedo  $B=[a, b] \times [c, d] \times [p, q]$ . Describirá un ‘volumen’ de un ‘sólido’ de 4 dimensiones con ‘base’  $B$  y ‘altura’ en cada punto dada por  $f(x, y, z)$ . Esta integral se podrá calcular también con integrales iteradas:

$$f \text{ continua en } B \Rightarrow \iiint_B f = \int_p^q \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz$$

[o las otras 5 iteradas intercambiando los papeles de  $x, y, z$ ].

**Ej 11.** Si  $f(x, y, z)=2yz-x$  y  $B=[0, 1] \times [0, 2] \times [0, 3]$  es:

$$\iiint_B f = \int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 (2yz-x) dz dy dx = \int_0^1 \int_0^2 (9y-3x) dy dx = \int_0^1 (18-6x) dx = 15.$$

O podemos hacerlo, por ejemplo, con este otro orden de integración:

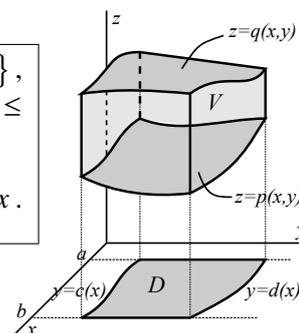
$$\iiint_B f = \int_0^3 \int_0^2 \int_0^1 (2yz-x) dx dy dz = \int_0^3 \int_0^2 (2yz-\frac{1}{2}) dy dz = \int_0^3 (4z-1) dz = 15.$$

También podemos integrar sobre recintos  $V \subset \mathbb{R}^3$  más generales.

Si  $V = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x), p(x, y) \leq z \leq q(x, y)\}$ , siendo continuas  $c, d$  en  $[a, b]$  y  $p, q$  en  $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x)\}$ ,

y si  $f$  es continua en  $V \Rightarrow \iiint_V f = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} \int_{p(x,y)}^{q(x,y)} f(x, y, z) dz dy dx.$

Análogas fórmulas se obtienen variando los papeles de  $x, y, z$ , y muchos recintos que aparecen son de algunos de esos tipos.



Cuando  $f \equiv 1$ , la integral  $\iiint_V dx dy dz$  describe el volumen de  $V$ .

Lo más difícil de las integrales triples es dibujar las gráficas o al menos hacerse una idea de ellas para saber cuáles de las funciones que definen los recintos son mayores o menores.

**Ej 12.** Calculemos  $\iiint_V x dx dy dz$ , con  $V$  región acotada por los planos:

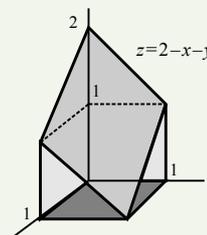
$$x=0, y=0, z=0, x=1, y=1, x+y+z=2.$$

En el cuadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$  del plano  $xy$  está  $z=2-x-y$  por encima de  $z=0$ .

$$\begin{aligned} \iiint_V x dx dy dz &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{2-x-y} x dz dy dx = \int_0^1 \int_0^1 (2x-x^2-xy) dy dx \\ &= \int_0^1 (2x-x^2-x[\frac{y^2}{2}]_0^1) dx = \int_0^1 (\frac{3x}{2}-x^2) dx = \frac{3}{4}-\frac{1}{3} = \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

O un poquito más corto si cambiamos el orden de  $dx$  y  $dy$  - El primer paso es igual, y luego:

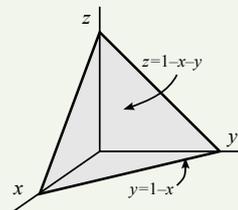
$$\int_0^1 \int_0^1 (2x-x^2-xy) dx dy = \int_0^1 (1-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}y) dy = \frac{2}{3}-\frac{1}{4} = \frac{5}{12}.$$



**Ej 13.** Halleemos  $\iiint_V f$  con  $f(x, y, z)=xyz$ ,  $V$  tetraedro de vértices  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ .

El plano que pasa por los 3 últimos puntos es  $x+y+z=1$  y la base está limitada por los ejes y por  $x+y=1$ . Por tanto:

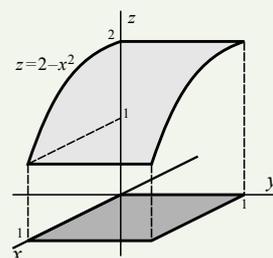
$$\begin{aligned} \iiint_V f &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} xyz dz dy dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{xy(1-x-y)^2}{2} dy dx \\ &= \int_0^1 [\frac{x(1-x)^4}{4} + \frac{x(1-x)^4}{8} - \frac{x(1-x)^4}{3}] dx = \int_0^1 \frac{x(1-x)^4}{12} dx = \frac{1}{360}. \end{aligned}$$



**Ej 14.** Calcular  $\iiint_V e^z dx dy dz$ , con  $V$  sólido limitado por  $x=0, x=1, y=0, y=1, z=0$  y la superficie  $z=2-x^2$ .

En  $[0, 1] \times [0, 1]$  es  $z=2-x^2$  mayor que  $z=0$  (no se necesita el dibujo).

$$\begin{aligned} \iiint_V &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{2-x^2} x e^z dz dy dx = \int_0^1 \int_0^1 x [e^{2-x^2}-1] dy dx \\ &= \int_0^1 [x e^{2-x^2}-x] dx = -\frac{1}{2} [e^{2-x^2}+x^2]_0^1 = \frac{1}{2} (e^2 - e - 1). \end{aligned}$$



Con hipótesis análogas a las del plano se tiene la fórmula para los **cambios de variable**:

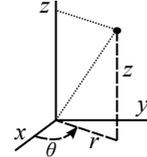
$$\text{Sea } \mathbf{g}: (u, v, w) \rightarrow (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \text{ de } C^1, \text{ inyectiva en } V^*, \mathbf{g}(V^*)=V$$

$$\text{y } f \text{ integrable } \Rightarrow \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V^*} f(\mathbf{g}(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw.$$

[Vale aunque  $\mathbf{g}$  no sea inyectiva un número finito de puntos, curvas o superficies].

En particular, los más interesantes son los cambios a **cilíndricas y esféricas**. Definamos cada una de estas coordenadas y familiaricémonos con ellas antes de hacer integrales.

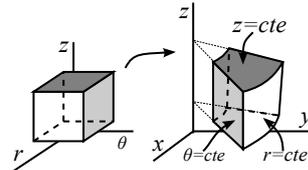
**Cilíndricas:**  $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$ . O sea, las polares del plano  $xy$  junto con la coordenada  $z$ . Dar las cilíndricas de un  $(x, y, z)$  es trivial para la  $z$ , y se tiene además que  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\tan \theta = \frac{y}{x}$ .



El jacobiano es  $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta & 0 \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$ , y, por tanto:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V^*} r f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) dr d\theta dz$$

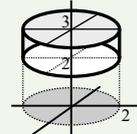
¿Qué conjuntos del espacio son sencillos en cilíndricas? Los puntos  $r=C$  forman un cilindro, y los  $\theta=C$  y  $z=C$  planos (vertical y horizontal). Un paralelepípedo  $V^*$  se convierte en un  $V$  como el de la derecha.



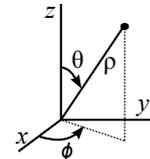
**Ej 15.** Calcular la integral de la función  $f(x, y, z) = z e^{x^2+y^2}$  sobre el cilindro  $x^2+y^2 \leq 4$ ,  $2 \leq z \leq 3$ .

$$\iiint_V z e^{x^2+y^2} dx dy dz = \int_2^3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 r z e^{r^2} dr d\theta dz = \frac{9-4}{2} \cdot 2\pi \cdot \left[ \frac{1}{2} e^{r^2} \right]_0^2 = \frac{5\pi}{2} (e^4 - 1).$$

Lo mismo que integrar en  $z$  y hacer luego el cambio a polares. En cartesianas no se puede hacer porque aparecen primitivas no calculables:  $\int e^{x^2+y^2} dx$  o  $\int e^{x^2+y^2} dy$ .



**Esféricas:**  $\begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \phi \\ y = \rho \sin \theta \sin \phi \\ z = \rho \cos \theta \end{cases}$ . Como  $\rho^2 = r^2 + z^2$ , es  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{r^2 + z^2}$ . Además:  $\tan \theta = \frac{r}{z}$ ,  $\tan \phi = \frac{y}{x}$  [mirando cuadrante]. [A veces se suelen cambiar los nombres de  $\phi$  y  $\theta$ , pero usaremos la notación de los libros de física].

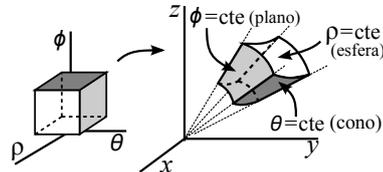


$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \phi & \rho \cos \theta \cos \phi & -\rho \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \rho \cos \theta \sin \phi & \rho \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = \rho^2 \cos^2 \theta \sin \theta \begin{vmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{vmatrix} + \rho^2 \sin^3 \theta \begin{vmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{vmatrix}$$

$$= \rho^2 \sin \theta$$
 es el jacobiano y por tanto:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V^*} \rho^2 \sin \theta f(\rho \sin \theta \cos \phi, \rho \sin \theta \sin \phi, \rho \cos \theta) d\rho d\theta d\phi$$

En esféricas,  $\rho=C$  describe una superficie esférica,  $\phi=C$  es un plano y  $\theta=C$  una superficie cónica. Un recinto simple  $V$  en esféricas es, por tanto, el dibujado a la derecha. [El más sencillo de todos, desde luego, es la propia esfera que tantas veces aparece].



**Ej 16.** Escribamos el punto de coordenadas cartesianas  $(-1, 1, -\sqrt{6})$  en los otros dos sistemas.

$$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}. \quad \tan \theta = -1 \text{ y } 2^\circ \text{ cuadrante} \rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4} \text{ [no es, por tanto, } \theta = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4} \text{]}.$$

$$\text{Las coordenadas cilíndricas (polares más la } z) \text{ del punto son, pues: } (r, \theta, z) = \left( \sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}, -\sqrt{6} \right).$$

$$\rho = \sqrt{1+1+6} = 2\sqrt{2}. \quad \tan \theta = \frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{6}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \theta = \frac{5\pi}{6}. \quad (\rho, \theta, \phi) = \left( 2\sqrt{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{4} \right). \text{ [ } \phi \text{ es la } \theta \text{ de las cilíndricas].}$$

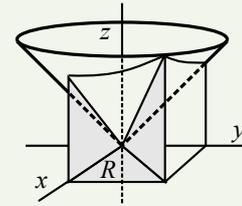
En los siguientes ejemplos se ve que muchas veces las cartesianas no son las coordenadas más adecuadas para calcular integrales (si lo eran en los ejemplos de la página anterior). En el primero, lo más corto serán las cilíndricas (o polares) y en el segundo, integrando sobre esfera, lo serán las esféricas.

**Ej 17.** Hallemos el volumen que encierran el cono  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  y el plano  $z = 0$  sobre el cuadrado  $R = [0, 1] \times [0, 1]$ .

Podríamos hallarlo mediante integrales dobles o triples, utilizando las coordenadas adecuadas en cada caso. Vamos a hacer  $\iiint_V dx dy dz$ .

En cartesianas es fácil el recinto, pero son difíciles las integrales:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} dz dx dy &= \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{x^2+y^2} dx dy = \left[ \text{ordenador, tablas o } \int \sqrt{x^2+y^2} = x+u \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 [\sqrt{1+y^2} - y^2 \ln y + y^2 \ln(1+\sqrt{1+y^2})] dy = \dots \end{aligned}$$



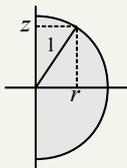
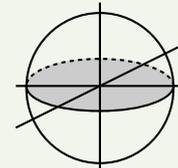
En cilíndricas (o polares en la segunda integral):  $x=1 \rightarrow r = \frac{1}{\cos \theta}$ , cono y recinto simétricos,

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{\pi/4} \int_0^{1/\cos \theta} r^2 dr d\theta &= \frac{2}{3} \int_0^{\pi/4} \frac{d\theta}{\cos^3 \theta} = \frac{2}{3} \int_0^{\pi/4} \frac{\cos \theta d\theta}{\cos^4 \theta} \underset{u=\sin \theta}{=} \frac{2}{3} \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{du}{(1-u^2)^2} \\ &= \frac{1}{6} \left[ \log \left| \frac{1+u}{1-u} \right| - \frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u} \right]_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{1}{3} [\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})] . \end{aligned}$$

Esféricas:  $2 \int_0^{\pi/4} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{1/\cos \theta \sin \phi} \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\phi = \frac{2}{3} \int_0^{\pi/4} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{d\theta d\phi}{\sin^2 \theta \cos^3 \phi} = \frac{2}{3} \int_0^{\pi/4} \frac{d\phi}{\cos^3 \phi}$  como antes

**Ej 18.** Calculemos el volumen de la esfera unidad. En esféricas:

$$\text{vol} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 \rho^2 \sin \theta d\theta d\rho d\phi = 2\pi [-\cos \theta]_0^\pi \left[ \frac{1}{3} \rho^3 \right]_0^1 = \frac{4\pi}{3} .$$



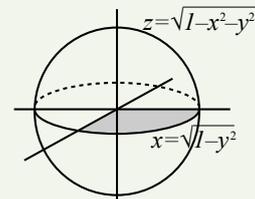
En cilíndricas por dos caminos (más largo):

$$\text{vol} = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} r dr dz d\theta = 2\pi \int_{-1}^1 \frac{1-z^2}{2} dz = \frac{4\pi}{3} .$$

$$\text{vol} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} r dz dr d\theta = 2\pi \int_0^1 2r\sqrt{1-r^2} dr = \frac{4\pi}{3} .$$

Las cartesianas son las coordenadas menos adecuadas aquí:

$$\begin{aligned} \text{vol} &= 8 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz dx dy = 8 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy \\ &= \dots [\text{cambio } x = \sqrt{1-y^2} \sin t] \dots = 8 \int_0^1 \frac{\pi}{4} (1-y^2) dy = \frac{4\pi}{3} . \end{aligned}$$



Aplicaciones físicas similares a las vistas para las integrales dobles son:

**Masa** de un sólido  $V$  es  $M = \iiint_V D(x, y, z) dx dy dz$ , si  $D(x, y, z)$  es su densidad.

**Centro de masa** de  $V$  es  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  con  $\bar{x} = \frac{1}{M} \iiint_V x D$ ,  $\bar{y} = \frac{1}{M} \iiint_V y D$ ,  $\bar{z} = \frac{1}{M} \iiint_V z D$ .

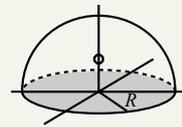
**Momento de inercia** respecto al eje  $z$ :  $I_z = \iiint_V (x^2 + y^2) D$  (análogos los otros).

**Ej 19.** Hallemos la posición del centro de masa de una semiesfera sólida homogénea.

Por simetría, será  $\bar{x} = \bar{y} = 0$ . Volumen =  $\frac{2}{3} \pi R^3$ . [Masa =  $\frac{2}{3} \pi R^3 D$ ,  $D$  constante].

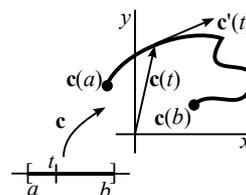
$$\bar{z} = \frac{3}{2\pi R^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^R \rho^3 \sin \theta \cos \theta d\rho d\theta d\phi = \frac{3}{R^3} \left[ \frac{\rho^4}{4} \right]_0^R \left[ \frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{3R}{8} = 0.375R .$$

[El recinto pedía a gritos utilizar las coordenadas esféricas].



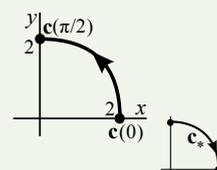
## 2.2 Integrales de línea

Una **función vectorial** era  $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ ,  $\mathbf{c}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ , cuya gráfica es una **curva**  $C$  en  $\mathbf{R}^n$  y era  $\mathbf{c}'(t) = (x_1'(t), \dots, x_n'(t))$  el vector tangente a la curva. Llamaremos a  $\mathbf{c}$  también **trayectoria** o **camino** en  $\mathbf{R}^n$ . Es  $\mathbf{c}$  camino  $C^1$  si es continua y  $\mathbf{c}'$  existe y es continua  $\forall t \in (a, b)$  y es  $C^1$  a trozos si  $C$  es continua y  $[a, b]$  se puede dividir en un número finito de subintervalos siendo  $C^1$  en cada uno de ellos.



**Ej 1.**  $\mathbf{c} : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbf{R}^2$  con  $\mathbf{c}(t) = (2 \cos t, 2 \sin t)$  es una trayectoria  $C^1$  pues  $\mathbf{c}'(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t)$  existe  $\forall t \in (0, \frac{\pi}{2})$ .

$\mathbf{c}_* : [0, 2] \rightarrow \mathbf{R}^2$  con  $\mathbf{c}_*(t) = (t, \sqrt{4-t^2})$ ,  $\mathbf{c}'_*(t) = (1, -t(4-t^2)^{-1/2})$  es otro camino  $C^1$ , que describe esa misma curva (en sentido opuesto). Se dice que  $\mathbf{c}$  y  $\mathbf{c}_*$  son dos **parametrizaciones** de la misma curva  $C$ .



[Las dos curvas describen ese cuadrante de la circunferencia  $x^2 + y^2 = 4$ , pues en ambos casos se cumple que  $4 \cos^2 t + 4 \sin^2 t = 4$ ,  $t^2 + (4-t^2) = 4$ . Es mejor, en general, usar cosenos y senos al parametrizar circunferencias para que no aparezcan raíces que son más difíciles de integrar].

Hay dos tipos de integrales de línea: de **campos escalares** y de **campos vectoriales**. Comencemos con:

### Integrales de campos escalares a lo largo de curvas:

Sea  $\mathbf{c}(t) : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$  camino  $C^1$  y sea  $f$  un campo escalar en  $\mathbf{R}^n$  tal que  $f(\mathbf{c}(t))$  es continua en  $[a, b]$ . La integral de  $f$  sobre  $\mathbf{c}$  (o a lo largo de  $\mathbf{c}$ ) se define:

$$\int_{\mathbf{c}} f ds \equiv \int_a^b f(\mathbf{c}(t)) \|\mathbf{c}'(t)\| dt.$$

Si  $\mathbf{c}$  es  $C^1$  a trozos o  $f(\mathbf{c}(t))$  continua a trozos, se se descompone  $[a, b]$  en intervalos sobre los que  $f(\mathbf{c}(t)) \|\mathbf{c}'(t)\|$  sea continua y será  $\int_{\mathbf{c}} f ds$  la suma de las integrales sobre cada uno.

**Ej 1\*.** Si  $f(x, y) = xy^2$  y  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{c}_*$  son los de arriba, las integrales a lo largo de los dos caminos son:

$$\|\mathbf{c}'\| = \sqrt{4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t} = 2, \quad \int_{\mathbf{c}} f ds = \int_0^{\pi/2} 16 \cos t \sin^2 t dt = \frac{16}{3} \sin^3 t \Big|_0^{\pi/2} = \frac{16}{3}.$$

$$\|\mathbf{c}'_*\| = \sqrt{1 + \frac{t^2}{4-t^2}} = \frac{2}{\sqrt{4-t^2}}, \quad \int_{\mathbf{c}_*} f ds = \int_0^2 t(4-t^2) \frac{2}{\sqrt{4-t^2}} dt = -\frac{2}{3} (4-t^2)^{3/2} \Big|_0^2 = \frac{16}{3}.$$

No es casualidad que ambas integrales coincidan. Se prueba que:

**Teor 1.** Si  $\mathbf{c}$  y  $\mathbf{c}_*$  describen la misma curva  $C$ , entonces  $\int_{\mathbf{c}} f ds = \int_{\mathbf{c}_*} f ds \equiv \int_C f ds$ .

Como **la integral de línea de una  $f$  escalar no depende de la parametrización, sólo de la curva**, es lícita la notación  $\int_C f ds$  (integral de  $f$  sobre  $C$ ) en la que la función  $\mathbf{c}$  no aparece.

La raíz de la norma hace que el cálculo de estas integrales sea (salvo para curvas sencillas) complicado y no es extraño que aparezcan integrales no calculables. [En las de campos vectoriales no ocurrirá esto]. Además de las circunferencias, también suelen ser fáciles estas integrales sobre segmentos:

**Ej 2.** Calculemos la integral de la  $f(x, y) = xy^2$  ahora sobre el segmento que une  $(0, 2)$  y  $(2, 0)$ .

Podemos parametrizarlo utilizando que pertenece a la recta  $y = 2 - x$ :

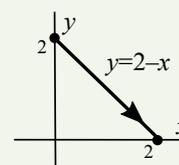
$$\mathbf{c}(x) = (x, 2-x), \quad x \in [0, 2]. \quad \|\mathbf{c}'(x)\| = \|(1, -1)\| = \sqrt{2} \rightarrow$$

$$\int_{\mathbf{c}} f ds = \int_0^2 \sqrt{2} x(2-x)^2 dx = \sqrt{2} \left[ 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 \right]_0^2 = \frac{4}{3}\sqrt{2}.$$

O también con la expresión para los segmentos que ya vimos en 1.1:

$$\mathbf{c}_*(t) = (0, 2) + t(2, -2) = (2t, 2-2t), \quad t \in [0, 1]. \quad [\text{Mismo sentido, doble velocidad}].$$

$$\|\mathbf{c}'_*(t)\| = 2\sqrt{2} \rightarrow \int_{\mathbf{c}_*} f ds = 16\sqrt{2} \int_0^1 t(1-t)^2 dt = 16\sqrt{2} \left[ \frac{1}{2}t^2 - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{4}t^4 \right]_0^1 = \frac{4}{3}\sqrt{2}. \quad [\text{Debía salir lo mismo}].$$

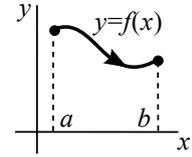


Interpretemos estas integrales. Sea primero  $f \equiv 1$ . Si pensamos que  $\mathbf{c}(t)$  describe una partícula, al ser  $\|\mathbf{c}'(t)\|$  la velocidad escalar en el instante  $t$ , parece claro que  $ds = \|\mathbf{c}'(t)\| dt$  ('diferencial de arco') representa la distancia recorrida en un 'diferencial de tiempo  $dt$ ' y por tanto:

$$L = \int_C ds = \int_a^b \|\mathbf{c}'(t)\| dt \text{ representa la longitud de la curva } C \text{ definida por } \mathbf{c}.$$

Veamos la forma que adopta la longitud de la gráfica de una función  $y = f(x)$  en un intervalo  $[a, b]$ . Una parametrización clara de estas curvas es  $\mathbf{c}(x) = (x, f(x))$ ,  $x \in [a, b]$ . Y como  $\mathbf{c}'(x) = (1, f'(x))$ , la longitud pasa a ser

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2} dx. \text{ [Cambiando los papeles sería similar para } x=f(y)\text{].}$$

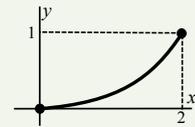


**Ej 3.** Calculemos la longitud de la curva descrita por la función vectorial  $\mathbf{c}(t) = (2t^2, t^3)$ ,  $t \in [0, 1]$ .

$$\mathbf{c}'(t) = (4t, 3t^2) \Rightarrow L = \int_0^1 t \sqrt{16+9t^2} dt = \frac{1}{27} (16+9t^2)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{61}{27} \approx 2.26.$$

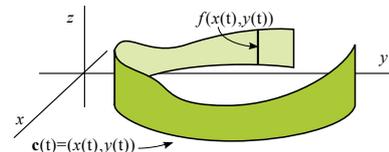
O con otra parametrización de la misma curva, usando que es  $y = (\frac{x}{2})^{3/2}$ :

$$(x, (\frac{x}{2})^{3/2}), x \in [0, 2] \Rightarrow L = \int_0^1 (1 + \frac{9x}{32})^{1/2} dx = \frac{64}{27} (1 + \frac{9x}{32})^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{64}{27} [\frac{125}{64} - 1].$$



Insistimos en que estas integrales se suelen complicar. Por ejemplo para  $y=x^2$  sale una de cálculo largo, y para  $y=x^3$  aparece ya una no calculable que se debe aproximar con ordenador. Hay pocos ejemplos sencillos como el anterior. Sí es fácil dar la longitud de segmentos o circunferencias, pero eso no exige integrales.

Si  $f$  es cualquier campo con  $f(\mathbf{c}(t)) \geq 0 \forall t \in [a, b]$ ,  $\int_C f ds$  representa para  $n=2$  el **área de la valla** de altura  $f(x, y)$  en cada  $(x, y)$  de la curva  $C$ , pues un 'diferencial de valla' tiene por área  $f(\mathbf{c}(t)) ds = f(\mathbf{c}(t)) \|\mathbf{c}'(t)\| dt$ .



Si  $f$  toma valores positivos y negativos sobre la curva, la integral puede perfectamente salir negativa. Eso significaría que área de la valla que estuviese 'bajo el suelo' sería mayor que la que está por encima.

**Ej 4.** Halleemos la integral de  $f(x, y) = x - y$  sobre la curva  $\mathbf{c}(t) = \begin{cases} (0, 1-t), & t \in [0, 1] \\ (t-1, 0), & t \in [1, 2] \end{cases}$  (es  $C^1$  a trozos).

Tenemos que hacer una integral sobre cada segmento y sumar el resultado.

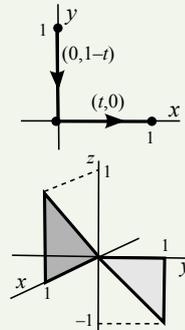
Sobre el vertical,  $f(\mathbf{c}_1(t)) = t-1$ ,  $\|\mathbf{c}'_1(t)\| = \|(0, -1)\| = 1 \rightarrow$

$$\int_{\mathbf{c}_1} f ds = \int_0^1 (t-1) dt = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}.$$

Sobre el otro,  $f(\mathbf{c}_2(t)) = t-1$ ,  $\|\mathbf{c}'_2(t)\| = \|(1, 0)\| = 1$ ,  $\int_{\mathbf{c}_2} f ds = \int_1^2 (t-1) dt = \frac{1}{2}$ .

La integral total es, por tanto:  $\int_C f ds = \int_{\mathbf{c}_1} + \int_{\mathbf{c}_2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$ .

[El área de la valla positiva sobre el eje de las  $x$  se cancela con el área de la valla negativa sobre el eje de las  $y$ ].



Otra interpretación para  $n=2$  o  $n=3$  de las integrales de línea de campos escalares es la siguiente: si  $\mathbf{c}(t)$  describe un alambre (en el plano o en el espacio) con una densidad variable dada por  $\rho(x)$ , la **masa del alambre** será  $M = \int_C \rho ds$ .

Y también da el **valor medio** de una función  $f$  sobre la curva  $C$ :  $\bar{f} = \frac{1}{L} \int_C f ds$ .

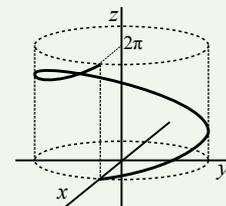
Un ejemplo de longitud y otras integrales calculables exactamente en el espacio:

**Ej 5.** Sea el alambre en forma de hélice:  $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , y de densidad variable  $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ .

Como  $\|\mathbf{c}'\| = \sqrt{2}$ , su longitud es  $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = 2\pi\sqrt{2} \approx 8.9$ .

Su masa es  $M = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t + t^2) dt = \sqrt{2} (2\pi + \frac{8}{3}\pi^3) \approx 125.8$ .

[Y su densidad media es, por tanto:  $1 + \frac{4}{3}\pi^2 \approx 14.2$ ].



Definamos ahora el otro tipo de integrales (que aparecen más a menudo en física):

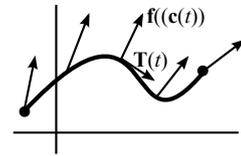
### Integrales de línea de campos vectoriales:

Sea  $\mathbf{c}(t) : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$  de  $C^1$  y sea  $\mathbf{f} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  campo vectorial continuo sobre la gráfica de  $\mathbf{c}$ . Entonces la integral de línea del campo  $\mathbf{f}$  a lo largo de  $\mathbf{c}$  se define  $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) dt$ . Si  $\mathbf{f}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t)$  es sólo continua a trozos, dividimos el intervalo y sumamos la integrales.

Si  $\mathbf{c}'(t) \neq \mathbf{0} \forall t$  y  $\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{c}'(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|}$  es el vector tangente unitario:

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b [\mathbf{f}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{T}(t)] \|\mathbf{c}'(t)\| dt = \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{T} ds,$$

y se puede ver esta integral de línea como la integral del campo escalar  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{T}$ , componente tangencial de  $\mathbf{f}$  en la dirección de  $\mathbf{c}$ . Por tanto:



$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$  es el **trabajo** realizado por un campo de fuerzas  $\mathbf{f}$  sobre la partícula que recorre  $\mathbf{c}$ .

Demos otra **notación** (la damos para el plano). Si  $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$ ,  $\mathbf{f}(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ :

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b [f(x(t), y(t))x'(t) + g(x(t), y(t))y'(t)] dt \equiv \int_{\mathbf{c}} f(x, y) dx + g(x, y) dy$$

[La notación es similar para  $n > 2$ . ¡Cuidado!, pese a su aspecto sigue siendo integral de línea].

**Ej 6.** Calculemos varias integrales del línea del campo  $\mathbf{f}(x, y) = (x^2, 2y+x)$  sobre distintos caminos:

$$\mathbf{c}_1(t) = (t, t), t \in [0, 1], \quad \mathbf{c}_2(t) = (4t^2, 4t^2), t \in [0, \frac{1}{2}], \quad \mathbf{c}_3(t) = (1-t, 1-t), t \in [0, 1]$$

[describen la misma curva, la tercera en sentido contrario].

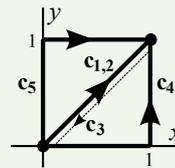
$$\int_{\mathbf{c}_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (t^2, 3t) \cdot (1, 1) dt = \int_0^1 (t^2 + 3t) dt = \frac{1}{3} + \frac{3}{2} = \frac{11}{6}.$$

$$\int_{\mathbf{c}_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{1/2} (16t^4, 12t^2) \cdot (8t, 8t) dt = 16 \int_0^{1/2} (8t^5 + 6t^3) dt = \frac{11}{6},$$

$$\int_{\mathbf{c}_3} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 ((1-t)^2, 3(1-t)) \cdot (-1, -1) dt = \int_0^1 (-4 + 5t + t^2) dt = -\frac{11}{6}.$$

$$\mathbf{c}_4(t) = \begin{cases} (t, 0), & t \in [0, 1] \\ (1, t-1), & t \in [1, 2] \end{cases}, \quad \int_{\mathbf{c}_4} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (t^2, t) \cdot (1, 0) dt + \int_1^2 (t^2, 2t-1) \cdot (0, 1) dt = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}.$$

$$\mathbf{c}_5(t) = \begin{cases} (0, t), & t \in [0, 1] \\ (t-1, 1), & t \in [1, 2] \end{cases}, \quad \int_{\mathbf{c}_5} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (0, 2t) \cdot (0, 1) dt + \int_1^2 ((t-1)^2, 1+t) \cdot (1, 0) dt = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$



[La integral parece depender sólo de la curva y del sentido en que se recorre. Incluso para algunos campos no dependerá siquiera de la curva, sólo del punto inicial y del punto final].

**Ej 7.** Halle los integrales para los mismos  $\mathbf{c}_k$  de arriba, pero ahora para el campo  $\mathbf{g}(x, y) = (y, x-4y)$ :

$$\int_{\mathbf{c}_1} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (t, -3t) \cdot (1, 1) dt = -\int_0^1 2t dt = -1,$$

$$\int_{\mathbf{c}_2} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{1/2} (4t^2, -12t^2) \cdot (8t, 8t) dt = -\int_0^{1/2} 16t^3 dt = -1,$$

$$\int_{\mathbf{c}_3} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 ((1-t), -3(1-t)) \cdot (-1, -1) dt = \int_0^1 2(1-t) dt = 1. \quad [\text{Única distinta}].$$

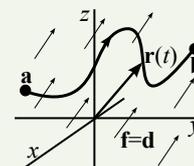
$$\int_{\mathbf{c}_4} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (0, t) \cdot (1, 0) dt + \int_1^2 (t-1, 5-4t) \cdot (0, 1) dt = \int_1^2 (5-4t) dt = -1.$$

$$\int_{\mathbf{c}_5} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (t, -4t) \cdot (0, 1) dt + \int_1^2 (1, t-5) \cdot (1, 0) dt = -\int_0^1 4t dt + 1 = -1.$$

**Ej 8.** Si  $\mathbf{c}(t) = (t, t^2, 1)$ ,  $t \in [0, 1]$  es  $\int_{\mathbf{c}} z x^2 dx + x y dy + y^3 dz = \int_0^1 (t^2 \cdot 1 + t^3 \cdot 2t + t^6 \cdot 0) dt = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{11}{15}$ .

**Ej 9.** Halle el trabajo realizado por una fuerza constante  $\mathbf{f} = \mathbf{d}$  al recorrer una partícula una trayectoria  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  que une dos puntos del espacio  $\mathbf{a} = \mathbf{r}(a)$  y  $\mathbf{b} = \mathbf{r}(b)$ :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{r}} \mathbf{d} \cdot d\mathbf{s} &= \int_a^b (d_1, d_2, d_3) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t)) dt \\ &= d_1(x(b)-x(a)) + d_2(y(b)-y(a)) + d_3(z(b)-z(a)) \\ &= \mathbf{d} \cdot (\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)) = \mathbf{d} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}), \text{ independiente de } \mathbf{r}. \end{aligned}$$



Si consideramos  $\mathbf{c}(t) = \mathbf{r}(a+b-t)$ ,  $t \in [a, b]$ , que recorre la misma curva en

sentido opuesto, el trabajo es  $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{d} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b (d_1, d_2, d_3) \cdot (-x'(t), -y'(t), -z'(t)) dt = -\mathbf{d} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})$ .

Veamos qué sucede en general con las integrales de campos vectoriales al cambiar la parametrización. Se prueba que no cambia el valor absoluto, pero sí, quizás, el signo:

**Teor 2.** Si  $\mathbf{c}$  y  $\mathbf{c}_*$  describen la misma curva  $C$ , entonces según  $\mathbf{c}$  y  $\mathbf{c}_*$  lo hagan en el mismo sentido o en el opuesto se tiene, respectivamente:

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{c}_*} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}, \text{ o bien } \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = - \int_{\mathbf{c}_*} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$$

Como la integral de línea de un campo vectorial sólo depende de la curva  $C$  y el sentido en que se recorre (y la un campo escalar sólo de  $C$ ), podemos elegir las  $\mathbf{c}$  más sencillas para calcularlas.

**Ej 10.** Tiene un sentido preciso hablar de la integral de  $\mathbf{f}(x, y) = (y, 0)$  a lo largo de la circunferencia unidad recorrida en el sentido de las agujas del reloj.

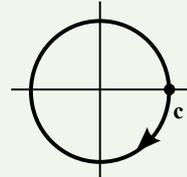
[Las integrales sobre curvas cerradas suelen representarse con el símbolo  $\oint$ ].

Podemos elegir  $\mathbf{c}(t) = (\cos t, -\sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  (o  $[-\pi, \pi]$ , o...),

$$\oint_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} (-\sin t, 0) \cdot (-\sin t, -\cos t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t) dt = \pi.$$

Con cualquier parametrización que proporcionase el mismo sentido se llegaría a lo mismo.

[En cartesianas habría que usar dos caminos:  $(x, \sqrt{1-x^2})$ ,  $x \in [-1, 1]$  y  $(x, -\sqrt{1-x^2})$ ,  $x \in [1, -1]$ ].



**Ej 11.** Calculemos la integral de línea del campo vectorial  $\mathbf{g}(x, y, z) = (z, e^y, xy)$  desde  $(1, 0, 0)$  hasta  $(1, 2, 3)$  a lo largo del segmento que une los puntos.

Hay muchas formas de parametrizar un segmento en el espacio. Para este, para el que se tiene  $x=1$  constante, una  $\mathbf{c}$  salta a la vista:  $\mathbf{c}(t) = (1, 2t, 3t)$ ,  $t \in [0, 1]$ .

Esta misma parametrización es la que nos daría la expresión general vista en 1.1:

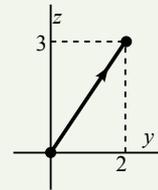
$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{p} + (\mathbf{q} - \mathbf{p})t, \quad t \in [0, 1] \text{ [si } t=0 \text{ estamos en } \mathbf{p} \text{ y si } t=1 \text{ en } \mathbf{q}].$$

Otra distinta, observando el dibujo de la derecha, es:  $\mathbf{c}_*(y) = (1, y, \frac{3}{2}y)$ ,  $y \in [0, 2]$ .

Calculemos ya la integral pedida con ambas parametrizaciones (debe salir lo mismo):

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (3t, e^{2t}, 2t) \cdot (0, 2, 3) dt = \int_0^1 (2e^{2t} + 6t) dt = e^2 + 2.$$

$$\int_{\mathbf{c}_*} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^2 (\frac{3}{2}y, e^y, y) \cdot (0, 1, \frac{3}{2}) dy = \int_0^2 (e^y + \frac{3}{2}y) dy = e^2 + 2.$$



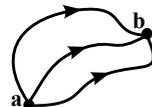
**Integrales de gradientes.** Generalizamos la fórmula de  $\mathbf{R}$ :  $\int_a^b g'(x) dx = g(b) - g(a)$ .

**Teor 3.** Sea  $U : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  un campo escalar  $C^1$  y  $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$  camino  $C^1$  a trozos. Entonces:  $\int_{\mathbf{c}} \nabla U \cdot d\mathbf{s} = U(\mathbf{c}(b)) - U(\mathbf{c}(a))$ .

Si  $\mathbf{c} \in C^1$  (si no, dividimos),  $\int_a^b \nabla U(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) dt = \int_a^b (U \circ \mathbf{c})'(t) dt = U(\mathbf{c}(b)) - U(\mathbf{c}(a))$ .

Por tanto, la integral de línea de un gradiente no depende del camino, sólo del punto inicial y final. Si identificamos un campo como un gradiente, la integral es muy sencilla. Cuando  $\mathbf{c}(a) = \mathbf{c}(b)$ ,  $\mathbf{c}$  describe una curva cerrada e

$\oint_{\mathbf{c}} \nabla U \cdot d\mathbf{s} = 0$ : la integral de línea de un gradiente a lo largo de cualquier curva cerrada es 0.



Si un campo vectorial  $\mathbf{f}$  es gradiente de alguna función  $U$ , a  $U$  se le llama **función potencial** para  $\mathbf{f}$ , y el campo  $\mathbf{f}$  se dice **conservativo**.

¿Cómo saber si  $\mathbf{f}$  es conservativo? Condiciones necesarias sencillas para  $n=2$  y  $n=3$  son:

**Teor 4.** Si  $\mathbf{f}(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$  de  $C^1$  es conservativo  $\Rightarrow f_y \equiv g_x$ .  
Si  $\mathbf{f}(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z))$  de  $C^1$  es conservativo  $\Rightarrow \text{rot } \mathbf{f} = \mathbf{0}$ .

Si  $(f, g) = (U_x, U_y) = \nabla U$ , con  $U \in C^2$ , debe ser  $f_y \equiv g_x$ , pues, como sabemos,  $U_{xy} = U_{yx}$ .

Y lo mismo para  $n=3$ . Ya vimos en 1.2 que el rotacional de un gradiente siempre era  $\mathbf{0}$ .

Pidiendo muy poco más las implicaciones opuestas se cumplen (aunque es difícil de demostrar):

**Teor 5.** Si  $\mathbf{f}$  es  $C^1$  en todo  $\mathbf{R}^2$  [ $\mathbf{R}^3$ ] y  $f_y \equiv g_x$  [ $\text{rot } \mathbf{f} = \mathbf{0}$ ]  $\Rightarrow \mathbf{f}$  es conservativo.

[De hecho basta con que sea  $C^1$  en lo que se llama un 'conjunto simplemente conexo' (sin 'agujeros')].

Si las derivadas cruzadas no coinciden, no puede  $\mathbf{f}$  ser gradiente. Si son iguales, muchas veces es sencillo hallar una  $U$  tal que  $\nabla U = \mathbf{f}$  [aunque la implicación  $\Leftarrow$  haya veces que no se cumple].

**Ej 12.** Sea  $\mathbf{f}(x, y) = (y^2, 2xy)$ . Hallemos la integral entre  $(0, 0)$  y  $(1, 1)$  a lo largo de diferentes curvas:  
 a) la recta que une los puntos, b) la parábola  $y = x^2$ , c) la circunferencia  $x^2 + y^2 = 2x$ .

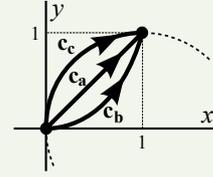
Posibles parametrizaciones: a)  $\mathbf{c}_a = (t, t)$ , b)  $\mathbf{c}_b = (t, t^2)$ , c)  $\mathbf{c}_c = (t, \sqrt{2t-t^2})$ , con  $t \in [0, 1]$  todas.

Las integrales en cada caso son:

$$a) \int_0^1 (t^2, 2t^2) \cdot (1, 1) dt = \int_0^1 3t^2 dt = 1,$$

$$b) \int_0^1 (t^4, 2t^3) \cdot (1, 2t) dt = \int_0^1 5t^4 dt = 1,$$

$$c) \int_0^1 (2t-t^2, 2t\sqrt{2t-t^2}) \cdot \left(1, \frac{1-t}{\sqrt{2t-t^2}}\right) dt = \int_0^1 (4t-3t^2) dt = 1.$$



Pero como  $\frac{\partial}{\partial y}(y^2) = 2y = \frac{\partial}{\partial x}(2xy)$  y  $\mathbf{f} \in C^1$  sabemos por teorema 5 que  $\mathbf{f}$  es conservativo.

Y es fácil en este caso hallar una  $U$ :

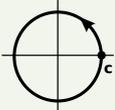
$$\text{Si } U_x = y^2, \text{ debe ser } U = xy^2 + p(y) \text{ para alguna función } p \Rightarrow U(x, y) = xy^2.$$

$$\text{Si } U_y = 2xy, \text{ debe ser } U = xy^2 + q(x) \text{ para alguna función } q$$

Por tanto, las parametrizaciones y cálculos de integrales de arriba han sido inútiles, puesto que la integral **a lo largo de cualquier trayectoria** debía valer  $U(1, 1) - U(0, 0) = 1 - 0 = 1$ .

[El campo  $(y, 0)$  del ejemplo 10 no era conservativo. No podía serlo desde que vimos que su integral sobre un camino cerrado era no nula. Pero también lo asegura  $f_y = 1 \neq 0 = g_x$ ].

**Ej 13.** Hallemos la integral de  $\mathbf{f}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$  a lo largo de  $x^2 + y^2 = 1$  en sentido antihorario.



$$\text{Si } \mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi], \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt = 2\pi.$$

No puede haber un potencial  $C^1$  que contenga la curva, pese a ser  $f_y = g_x = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$ .

Como se ve en el ejemplo anterior, **no basta la igualdad de las derivadas cruzadas para ser conservativo**. Es necesario además que la  $\mathbf{f}$  sea 'buena' [y esta  $\mathbf{f}$  no era  $C^1$  en  $(0, 0)$ ].

Y ahora un ejemplo de campo conservativo en el espacio:

**Ej 14.** Calculemos la integral de línea del campo vectorial  $\mathbf{f}(x, y, z) = (4x, 3z-2y, 3y)$  desde  $(1, 0, 0)$  hasta  $(1, 2, 3)$  a lo largo del segmento que une los puntos.

Como en el ejemplo 11 ya parametrizamos el segmento, podemos hallar la integral directamente:

$$\mathbf{c}(t) = (1, 2t, 3t), t \in [0, 1] \rightarrow \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (1, 5t, 6t) \cdot (0, 2, 3) dt = \int_0^1 28t dt = 14t^2 \Big|_0^1 = 14.$$

$$\text{Pero para este campo es } \text{rot } \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 4x & 3z-2y & 3y \end{vmatrix} = (3-3)\mathbf{i} + (0-0)\mathbf{j} + (0-0)\mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

y además  $\mathbf{f}$  es  $C^1$  en  $\mathbb{R}^3$ . Existe, por tanto, una función potencial  $U(x, y, z)$  para el campo  $\mathbf{f}$ .

$$U_x = 4x \rightarrow U = 2x^2 + p(y, z)$$

$$\text{Debe ser } U_y = 3z-2y \rightarrow U = 3yz - y^2 + q(x, z), U = 2x^2 + 3yz - y^2 \Rightarrow$$

$$U_z = 3y \rightarrow U = 3yz + r(x, y) \quad \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = U(1, 2, 3) - U(1, 0, 0) = 16 - 2 = 14.$$

Este es el valor de la integral sobre cualquier camino que una los puntos, por complicado que sea.

Por ejemplo, hallemos la integral a lo largo de  $\mathbf{c}^*(t) = (e^{t-t^2}, 2t^3, 3t^2)$ ,  $t \in [0, 1]$ :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{c}^*} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^1 (4e^{t-t^2}, 9t^2-4t^3, 6t^3) \cdot ((1-2t)e^{t-t^2}, 6t^2, 6t) dt = \int_0^1 (2(2-4t)e^{2t-2t^2} + 90t^4 - 24t^5) dt \\ &= 2e^{2t-2t^2} + 18t^5 - 4t^6 \Big|_0^1 = 14 \end{aligned}$$

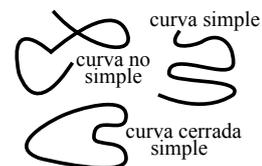
[El campo  $\mathbf{g}$  del ejemplo 11 no era conservativo, por ser  $\text{rot } \mathbf{g} = (x, 1-y, 0) \neq \mathbf{0}$ , y era necesario utilizar la definición para calcular la integral pedida].

## Teoremas de Green y de la divergencia

Veamos dos teoremas que relacionan integrales dobles e integrales de línea sobre curvas cerradas en el plano. [Se verán otros similares en el capítulo adicional 5 para integrales de campos en el espacio (estos se pueden ver como casos particulares de aquellos), tras definir las integrales de superficie].

Una **curva simple** será la imagen de una  $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2$ ,  $C^1$  a trozos e **inyectiva**. Si además es  $\mathbf{c}(a) = \mathbf{c}(b)$ , se llama **curva cerrada simple**.

Una curva de estas puede recorrerse en dos sentidos opuestos; para indicar que se recorre en sentido antihorario indicaremos  $\oint$ .



### Teorema de Green:

Sea  $D \subset \mathbf{R}^2$  limitado por  $\partial D$  curva cerrada simple y el campo  $\mathbf{f} = (f, g) \in C^1(D)$ . Entonces:

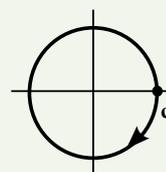
$$\iint_D [g_x - f_y] dx dy = \oint_{\partial D} f dx + g dy \equiv \oint_{\partial D} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}.$$

[Obsérvese que si  $\mathbf{f}$  es conservativo, el teorema de Green dice  $0 = \oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$  como debía ser].

**Ej 10\***. Encontramos, usando Green, el valor  $\pi$  de la integral de  $\mathbf{f}(x, y) = (y, 0)$  sobre la circunferencia unidad calculado ya en el ejemplo 10.

Como el sentido de recorrido es opuesto al que pide Green y  $g_x - f_y = -1$  es:

$$\oint_{\partial D} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = - \iint_D (-1) dx dy = \iint_D dx dy = \text{área de } D = \pi \cdot 1^2 = \pi.$$



**Ej 15**. Comprobemos el teorema para  $\mathbf{f}(x, y) = (y, 2x)$  en la región acotada por  $y = -x^2$  e  $y = -1$ .

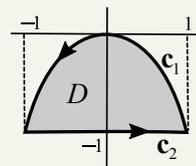
$g_x - f_y = 1$  (por tanto la  $\iint_D$  medirá el área de la región y debe ser positiva).

La integral doble:  $\iint_D [g_x - f_y] dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^{-x^2} dy dx = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \frac{4}{3}$ .

La frontera  $\partial D$  está formada por dos curvas:

$$\mathbf{c}_1(x) = (x, -x^2), x \in [1, -1], \quad \mathbf{c}_2(x) = (x, -1), x \in [-1, 1] \rightarrow$$

$$\oint_{\partial D} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_1^{-1} (-x^2, 2x) \cdot (1, -2x) dx + \int_{-1}^1 (-1, 2x) \cdot (1, 0) dx = \int_{-1}^1 5x^2 dx + \int_{-1}^1 (-1) dx = \frac{4}{3}.$$



**Ej 16**. Halleemos  $\oint_{\partial D} e^x \sin y dx + e^{2x} \cos y dy$  siendo  $D$  el rectángulo  $[0, 2] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ .

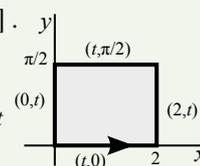
La  $\partial D$  está constituida ahora por 4 curvas (segmentos sencillos) distintas:

$$\int_0^2 (0 \cdot 1 + 0) dt + \int_0^{\pi/2} (0 + e^4 \cos t \cdot 1) dt - \int_0^2 (e^t \cdot 1 + 0) dt - \int_0^{\pi/2} (0 + \cos t \cdot 1) dt$$

$$= e^4 [-\sin t]_0^{\pi/2} - [e^t]_0^2 - [\sin t]_0^{\pi/2} = e^4 - e^2$$

Utilizando Green los cálculos son bastante más cortos:  $g_x - f_y = 2e^{2x} \cos y - e^x \cos y$ ,

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^2 (2e^{2x} - e^x) \cos y dx dy = [\sin y]_0^{\pi/2} [e^{2x} - e^x]_0^2 = e^4 - e^2.$$



Las integrales de línea normalmente son de peor cálculo que las dobles (como en los ejemplos anteriores), con lo que Green se usa más para hacer las segundas en vez de las primeras. Pero en casos excepcionales no es así, como en el ejemplo siguiente, en la que calculamos un área:

**Ej 17**. Calculemos el área encerrada por la 'hipocicloide'  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ .

Como para el campo  $\mathbf{f}(x, y) = (-y, x)$  es  $g_x - f_y = 2$ , un área se puede poner:

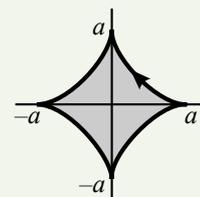
$$A = \iint_D dx dy = \frac{1}{2} \oint_{\partial D} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}. \text{ En este caso particular:}$$

$\mathbf{c}(\theta) = (a \cos^3 \theta, a \sin^3 \theta)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$  es una posible parametrización de  $\partial D$ .

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (-a \sin^3 \theta, a \cos^3 \theta) \cdot (-3a \cos^2 \theta \sin \theta, 3a \sin^2 \theta \cos \theta) d\theta$$

$$= \frac{3}{2} a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta = \frac{3}{8} a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 2\theta d\theta = \frac{3}{16} a^2 \int_0^{2\pi} [1 - \cos 4\theta] d\theta = \frac{3}{8} \pi a^2.$$

[Calcular directamente  $A = 4 \int_0^a (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2} dx$  es difícil].

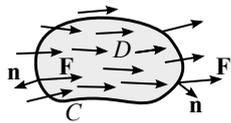


Del teorema de Green se deduce fácilmente el **teorema de la divergencia en el plano**:

Sean  $D \subset \mathbf{R}^2$  limitado por  $\partial D$  curva cerrada simple,  $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbf{R}^2$  campo vectorial  $C^1$ , y  $\mathbf{n}$  el vector normal unitario exterior a  $\partial D$ . Entonces  $\iint_D \operatorname{div} \mathbf{f} \, dx \, dy = \oint_{\partial D} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, ds$ .

Si  $\partial D$  viene dada por  $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$ , la normal es  $\mathbf{n} = \frac{(y'(t), -x'(t))}{\|\mathbf{c}'(t)\|}$ .

Si  $\mathbf{f} = (f, g)$ ,  $\oint_{\partial D} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_a^b [f(x(t), y(t)) y'(t) - g(x(t), y(t)) x'(t)] dt$   
 $= \oint_{\partial D} f \, dy - g \, dx \stackrel{\text{Green}}{=} \iint_D (f_x + g_y) \, dx \, dy$ .



[Imaginemos una curva cerrada  $C$  sobre la superficie de un fluido y sea  $\mathbf{F} = f \mathbf{v}$ , donde  $f$  es la densidad del fluido y  $\mathbf{v}$  su velocidad. Entonces  $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds$  mide el ritmo con el que el fluido entra o sale de  $D$ .

Si la cantidad de fluido en  $D$  disminuye (aumenta) será  $\oint_C < 0$  ( $\oint_C > 0$ ). La integral coincide con  $\iint_D \operatorname{div} \mathbf{F}$ . Por tanto, la  $\operatorname{div} \mathbf{F}$  describe la tendencia del fluido a acumularse o dispersarse].

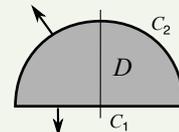
**Ej 18.** Comprobemos este teorema para  $\mathbf{f}(x, y) = (7, y^2 - 1)$  en el semicírculo  $r \leq 3$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ :

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = 2y, \quad \iint_D 2y \, dx \, dy = \int_0^\pi \int_0^3 2r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta = 36.$$

Para  $C_1$ , si  $\mathbf{c}(x) = (x, 0)$ ,  $x \in [-3, 3]$ ,  $\mathbf{n} = (0, -1)$ ,  $\int_{C_1} (1 - y^2) \, ds = \int_{-3}^3 dx = 6$ .

Para  $C_2$ , si  $\mathbf{c}(t) = (3 \cos t, 3 \sin t)$ ,  $t \in [0, \pi]$ ,  $\|\mathbf{c}'(t)\| = 3$ . Como  $\mathbf{n} = (\cos t, \sin t)$ ,

$$\int_{C_2} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, ds = 3 \int_0^\pi (7 \cos t + 9 \sin^3 t - \sin t) \, dt = 30.$$



**Ej 19.** Comprobemos los teoremas de Green y de la divergencia para el campo  $\mathbf{f}(x, y) = (x^3, x^2 y)$  y el recinto  $D$  del primer cuadrante acotada por  $y = 2x$  e  $y = x^2$ .

Green:  $\iint_D [g_x - f_y] \, dx \, dy = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} 2xy \, dy \, dx = \int_0^2 (4x^3 - x^5) \, dx = [x^4 - \frac{x^6}{6}]_0^2 = \frac{16}{3}$ .

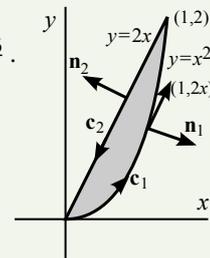
Posibles parametrizaciones de los dos tramos de  $\partial D$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_1(x) &= (x, x^2), \quad x \in [0, 2], \quad \mathbf{c}'_1 = (1, 2x), \quad \mathbf{f}(\mathbf{c}_1) = (x^3, x^4) \\ \mathbf{c}_2(x) &= (x, 2x), \quad x \in [2, 0], \quad \mathbf{c}'_2 = (1, 2), \quad \mathbf{f}(\mathbf{c}_2) = (x^3, 2x^3) \end{aligned} \rightarrow$$

$$\oint_{\partial D} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^2 (x^3 + 2x^5) \, dx - \int_0^2 (x^3 + 4x^3) \, dx = \frac{2^6}{3} - 2^4 = \frac{16}{3}.$$

Divergencia:  $\operatorname{div} \mathbf{f} = 4x^2$ .  $\mathbf{n}_1 = \frac{(2x, -1)}{\sqrt{1+4x^2}}$ ,  $\mathbf{n}_2 = \frac{(-2, 1)}{\sqrt{5}}$ .  $\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} 4x^2 \, dy \, dx = \int_0^2 (8x^3 - 4x^2) \, dx = \frac{32}{5}$ .

$$\oint_{\partial D} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_0^2 (x^3, x^4) \cdot \frac{(2x, -1)}{\sqrt{1+4x^2}} \sqrt{1+4x^2} \, dx - \int_0^2 (x^3, 2x^3) \cdot \frac{(2, -1)}{\sqrt{5}} \sqrt{5} \, dx = \frac{32}{5}.$$



# 3. Ecuaciones diferenciales ordinarias

## 3.1 Algunas EDOs de primer orden resolubles

Una ecuación diferencial ordinaria o EDO es una ecuación en la que aparecen derivadas de una función incógnita de una variable y se llama orden de la ecuación al orden de la derivada más alta entre las que aparecen. Por tanto:

Una **ecuación diferencial ordinaria de primer orden** es de la forma:  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ .

[Aunque no se suele escribir  $y(x)$ , no se olvide que  $y$  es función de  $x$ .

Y, aunque usamos ahora esa notación, otras veces será  $x(t)$ ,  $T(t)$ , ...].

Buscamos sus **soluciones**: las **funciones derivables**  $y(x)$  **que convierten la ecuación en una identidad**.

Consideremos la sencilla ecuación  $y' = -2y$ . Es inmediato comprobar que la cumplen las funciones de la forma  $y = Ce^{-2x}$  para cualquier constante  $C$ . A esta expresión (que incluye todas las soluciones) se le llama **solución general** y siempre tendrá **una constante arbitraria** (en las EDOs de primer orden).

Para aislar una única solución se debe imponer un **dato inicial**. Por ejemplo, si exigimos que sea  $y(0) = 7$ , la única solución que cumple la ecuación y ese dato es  $y = 7e^{-2x}$ .

Para mayoría de las EDOs no se puede calcular la solución. E incluso hay otras que no tienen solución o tienen más de una cumpliendo un dato inicial, pero esto es raro según el 'teorema de existencia y unicidad [TEU]':

$$f, f_y \text{ continuas en un entorno de } (a, b) \Rightarrow \text{ existe solución única de } \frac{dy}{dx} = f(x, y) \text{ con } y(a) = b.$$

Citemos algunos casos de EDOs de primer orden resolubles (hay pocos más).

Las ecuaciones **separables** son de la forma:  $\frac{dy}{dx} = \frac{p(x)}{q(y)} \rightarrow \int q(y) dy = \int p(x) dx + C$ .

[Si podemos hallar las primitivas y despejar la  $y$  obtendríamos así la solución explícita  $y(x)$ ].

Pasan a ser separables:  $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$  con el cambio  $z = \frac{y}{x}$ .  $\frac{dy}{dx} = f(ax+by)$  con  $z = ax+by$ .

[Por ejemplo, con la primera se obtiene:  $y = xz$ ,  $xz' + z = f(z)$ ,  $\frac{dz}{dx} = \frac{f(z)-z}{x}$ ,  $\int \frac{dz}{f(z)-z} = \int \frac{dx}{x} + C$ ].

La **ecuación lineal** es:  $\frac{dy}{dx} = a(x)y + f(x)$ . Se dice **homogénea** cuando  $f(x) \equiv 0$  y **no homogénea** cuando  $f(x) \neq 0$ .

La solución general de la homogénea  $y' = a(x)y$  es  $y = C e^{\int a(x) dx}$ .

[Fácil de deducir, por ser ecuación separable:  $\int \frac{dy}{y} = \ln y = \int a + C^*$ ,  $y = e^{\int a + C^*} = C e^{\int a}$ , pero mejor es utilizar la fórmula cuando sea lineal para no repetir este proceso de cálculo].

La de la no homogénea es:  $y = C e^{\int a(x) dx} + e^{\int a(x) dx} \int e^{-\int a(x) dx} f(x) dx$  [fórmula de variación de las constantes **fv**].

Esta solución tiene la forma de **solución general de la homogénea más una solución particular**  $y_p$  **de la no homogénea** y bastantes veces la  $y_p$  se puede encontrar por tanteo, en vez de integrar.

Tanto las lineales homogéneas como las no homogéneas aparecen muchas veces resolviendo ecuaciones en derivadas parciales. Estas importantes fórmulas se usarán a menudo en el curso.

Una ecuación es **exacta** cuando escrita en la forma  $M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0$  es  $M_y \equiv N_x$  en  $\mathbf{R}^2$ .

Caso de serlo, su solución es:  $U(x, y) = C$  con  $\begin{matrix} M = U_x \\ N = U_y \end{matrix}$  [Unas veces  $y$  se podrá despejar y otras no].

[Pues las funciones  $y(x)$  definidas por  $U(x, y(x)) = C$ , según la regla de la cadena, satisfacen:

$$\frac{d}{dx} U(x, y(x)) = U_x \frac{dx}{dx} + U_y \frac{dy}{dx} = M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0$$

[La  $U$  se halla, desde luego, como se calculaban los campos conservativos en el capítulo 2].

**Ej 1.** Hallemos la solución general de  $\frac{dy}{dx} = 3 - y$  y la (única) solución con  $y(0) = 3$ .

Siempre que sea lineal, lo mejor es utilizar las fórmulas. Y para utilizar la **fv** empezamos siempre, porque aparece 3 veces, calculando  $e^{\int a(x) dx} = e^{-x}$ . Yendo a la fórmula:

$$y = Ce^{-x} + e^{-x} \int 3e^x dx = Ce^{-x} + 3, \text{ que es, por tanto, la solución general de la ecuación.}$$

Aunque la solución particular  $y_p = 3$  era clara ( $0 = 3 - 3$ , las soluciones constantes saltan a la vista) y nos hubiera bastado hallar la de la homogénea y sumarle el 3, ahorrándonos una integral.

Imponiendo el dato inicial a esta solución aislamos la pedida:  $y(0) = C + 3 = 3 \rightarrow C = 0, y = 3$ .

Pero la ecuación se podía haber visto también como separable:

$$\int \frac{dy}{3-y} = -\ln(3-y) = x + C \rightarrow y = 3 - e^C e^{-x} \doteq 3 - Ce^{-x} \text{ (como antes, con otra } C \text{ arbitraria).}$$

[Lo habitual es ir llamando a las constantes arbitrarias  $C$ , aunque sean distintas:  $e^C$  pasó a ser  $C$ . Observemos que sin el último paso • parecería no haber solución con el dato:  $3 = 3 - e^C, e^C = 0!!$ ].

**Ej 2.** Calculemos la solución de la ecuación  $T(t)$  de  $\begin{cases} T' = 2tT \\ T(1) = 5 \end{cases}$  (practicando con otras letras).

Es claramente una lineal homogénea:  $T = C e^{\int 2t dt} = C e^{t^2}$ . Con el dato:  $5 = Ce \rightarrow T = 5 e^{t^2-1}$ .

**Ej 3.** Hallemos la solución de la lineal  $\frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{x} + 3$  que cumple el dato inicial  $y(1) = 0$ .

Siempre en las lineales empezamos calculando:  $e^{\int a} = e^{-2 \ln x} = e^{\ln x^{-2}} = \frac{1}{x^2}$ . La solución general es:

$$y = \frac{C}{x^2} + \frac{1}{x^2} \int 3x^2 dx = \frac{C}{x^2} + x \xrightarrow{d.i.} 0 = C + 1 \rightarrow y = x - \frac{1}{x^2}, \text{ solución que cumple el dato.}$$

[Los datos iniciales no se podían poner en  $x = 0$  (discontinuas  $a$  y solución); hay que darlos en 'buenos' puntos].

**Ej 4.** Resolvamos  $\begin{cases} y' = 3t^2 + 3t^2 y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ . Primera ecuación no lineal que aparece, pero se ve que es separable.

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \arctan y = \int 3t^2 dt + C = t^3 + C. y = \tan(t^3 + C) \xrightarrow{y(0)=0} 0 = \tan C \rightarrow y = \tan(t^3).$$

**Ej 5.**  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{y-x}$  (con solución única, según el TEU, si  $y \neq x$ ) se puede resolver por tres caminos:

Primero comprobemos que es exacta. Para ellos la reescribimos en la forma  $y + (x-y) \frac{dy}{dx}$ .

$$\text{Como } M_y \equiv N_x = 1, \text{ existe } U \text{ tal que } \begin{cases} U_x = y \rightarrow U = xy + p(y) \\ U_y = x - y \rightarrow U = xy - \frac{1}{2}y^2 + q(x) \end{cases} \rightarrow y^2 - 2xy = C.$$

Ahora la convertimos en separable con un cambio de variable, pues se puede escribir así:  $\frac{dy}{dx} = \frac{y/x}{y/x-1}$ .

$$z = \frac{y}{x} \rightarrow xz' + z = \frac{z}{z-1}, xz' = \frac{2z-z^2}{z-1}, \int \frac{(2z-2) dz}{z^2-2z} = -2 \int \frac{dx}{x} + C, \ln(z^2-2z) = C - 2 \ln x, \\ z^2 - 2z = \frac{C}{x^2}. \text{ Deshaciendo el cambio: } \frac{y^2}{x^2} - 2\frac{y}{x} = \frac{C}{x^2}, \text{ que lleva a la expresión anterior.}$$

Las soluciones de la ecuación son las mismas (salvo 0s e  $\infty$ s) que las de la lineal  $\frac{dx}{dy} = \frac{y-x}{y} = -\frac{x}{y} + 1$ .

$$\text{Con la } \mathbf{fv} \text{ (y cambiando papeles de } x \text{ e } y) \text{ volvemos a tener: } x = \frac{C}{y} + \frac{1}{y} \int y dy = \frac{C}{y} + \frac{y}{2}.$$

Dibujemos las soluciones para varios  $C$  (mejor a partir de la última expresión):

Se ve que hay 2 soluciones  $y=0$  e  $y=2x$  cumpliendo  $y(0)=0$  (ahí  $f$  es discontinua).

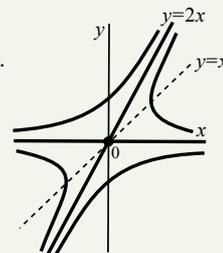
También se ve que por  $y=x$  (donde fallaba el TEU) no pasan soluciones, sino curvas de pendiente infinito (no son funciones derivables ahí, por tanto).

Se llaman '**curvas integrales**' de una ecuación diferencial a las curvas que son

$$\text{soluciones de } \frac{dy}{dx} = f(x, y) \text{ o de la ecuación 'dada la vuelta' } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}.$$

En nuestro caso, esta última tiene solución única  $x(y)$  cuando  $y \neq 0$  (por el TEyU).

Salvo en  $(0, 0)$  hay solución única  $y(x)$  ó  $x(y)$ , o sea, hay una única curva integral.



### 3.2 EDOs lineales de orden 2 resolubles elementalmente

En esta sección y las dos siguientes estudiaremos ecuaciones de **segundo orden** (con derivadas segundas). Y nos limitaremos a las **lineales** (las que más veces nos aparecerán) pues las no lineales casi nunca se pueden resolver. Es de esperar que sus soluciones contengan 2 constantes arbitrarias (esto le pasa a la ecuación más sencilla  $y''=0 \rightarrow y=c_1+c_2x$ ), con lo que habrá que imponer 2 datos iniciales para aislar una única solución.

**Resultados generales** para [e]  $y''+a(x)y'+b(x)y=0$  y [n]  $y''+a(x)y'+b(x)y=f(x)$ .  
ecuación homogénea ecuación no homogénea

En los libros de ecuaciones diferenciales ordinarias se demuestra:

**Teor 1.** Sea  $a, b, f$  continuas en un intervalo  $I$  y llamemos  $|W|(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$  **determinante wronskiano**

Si  $x_0 \in I$ , tienen una sola solución que cumple los datos iniciales  $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0'$ .

Si  $y_1, y_2$  son soluciones de [e] con wronskiano  $|W|(s) \neq 0$  para algún  $s \in I$ ,  
 la **solución general de [e]** es  $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ ,  $c_1, c_2$  constantes arbitrarias.

Si  $y_p$  es una solución de [n], la **solución general de [n]** es:  $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p$ .

Una solución particular de [n] es  $y_p = y_2 \int \frac{y_1 f}{|W|} dx - y_1 \int \frac{y_2 f}{|W|} dx$  [fórmula de variación de las constantes **fv**].

[Dicho finamente, las soluciones de [e] son un **espacio vectorial** de dimensión 2 (sumas y múltiplos de soluciones son soluciones) y que su wronskiano sea no nulo asegura que  $y_1$  e  $y_2$  no dependen linealmente].

[En las lineales de primer orden de 3.1 también la **solución de la no homogénea** era la solución general de la homogénea (allí con sólo 1 constante) +  $y_p$  de la no homogénea].

Además de las de coeficientes constantes y Euler que vemos luego, hay **dos tipos de ecuaciones [n] resolubles**. En el resto de los casos se resuelve mediante series de potencias [sección adicional 5.2]:

- a) Si  $b(x) \equiv 0$ , el cambio  $y' = v$  lleva [n] a una lineal de primer orden en  $v$ .
- b) Si  $y_1$  es solución de [e]  $\Rightarrow y_2 = y_1 \int e^{-\int a dx} y_1^{-2} dx$  es otra solución de [e].

a) es evidente. Para probar b) se hace  $y = y_1 \int u dx \rightarrow y' = y_1' \int u + y_1 u, y'' = y_1'' \int u + 2y_1' u + y_1 u'$ , que llevadas a [e] dan:  $y_1 u' + (2y_1' + ay_1)u + (y_1'' + ay_1' + by_1) \int u dt = 0 \rightarrow u' = -(2y_1' y_1^{-1} + a)u$  por ser  $y_1$  solución. Por tanto,  $u = e^{-\int a dx} y_1^{-2}$  y deshaciendo el cambio se llega al resultado.

[Según b), no se necesitan las 2 soluciones que pedía el Teor 1 para resolver [e] (y, por tanto, también [n] con la **fv**). Basta sólo hallar 1. El problema es que en pocas ocasiones podremos encontrarla: a veces a simple vista, a veces tanteando, a veces aparece cuando se está resolviendo por series].

**Ej 1.**  $x^2 y'' - 2xy' = 2x$   $\xrightarrow{y'=v} v' = \frac{2v}{x} + 2$ . En la **fv** de primer orden, como se dijo, se empieza hallando  $e^{\int a}$ .  
 $e^{\int 2dx/x} = e^{2 \ln x} = x^2 \rightarrow v = Cx^2 + x^2 \int \frac{2dx}{x^2} = Cx^2 - 2x \rightarrow y = K + Cx^3 - x^2$ .  
 [También será una ecuación de Euler  $x^2 y'' - 2xy' = 2x^2$ , de las que trataremos luego].

Para precisar las 2 constantes (que siempre aparecen) habrá que imponer 2 datos iniciales en un  $x_0 \neq 0$  [en  $x=0$  es  $a(x) = \frac{2}{x}$  discontinua y un par de datos nos podrían dar ninguna o infinitas soluciones].

Por ejemplo,  $y(1)=0, y'(1)=1$  lleva a  $\frac{c_1+c_2-1=0}{3c_2-2=1} \rightarrow c_2=1, c_1=0, y=x^3-x^2$  única solución.

**Ej 2.**  $x^3 y'' - xy' + y = 0$ . Es claro que  $y_1 = x$  es solución de esta homogénea.

[También lo serán entonces  $y=Cx$  para cualquier constante  $C$ , pues sabemos que los múltiplos de soluciones de una lineal homogénea son soluciones. Las rectas  $y=x+b$  son soluciones de la homogénea que saltan a la vista, pues, al ser  $y''=0$ , basta mirar los otros dos términos].

Como  $a(x) = -\frac{1}{x^2}$  la otra solución de esta homogénea es  $y_2 = x \int \frac{e^{-\int -x^{-2} dx}}{x^2} dx = x \int \frac{e^{-1/x}}{x^2} dx = x e^{-1/x}$ .

Y, por tanto, la solución general de la ecuación lineal es  $y = c_1 x + c_2 x e^{-1/x}$ .

**Coefficientes constantes:** [h]  $y'' + ay' + by = 0$ , [c]  $y'' + ay' + by = f(x)$ ,  $a, b \in \mathbf{R}$ .

Para resolver [h] basta con hallar las raíces del **polinomio característico**  $\mu^2 + a\mu + b = 0$ , que se llaman **autovalores** de [h] (la ecuación se dice también **característica**), pues entonces:

La solución general de [h] es: si  $\mu_1 \neq \mu_2$  reales  $\rightarrow y = c_1 e^{\mu_1 x} + c_2 e^{\mu_2 x}$   
 si  $\mu$  doble (real)  $\rightarrow y = (c_1 + c_2 x) e^{\mu x}$   
 si  $\mu = p \pm iq$   $\rightarrow y = (c_1 \cos qx + c_2 \sin qx) e^{px}$

[Si  $a, b \in \mathbf{C}$  será  $y = c_1 e^{\mu_1 x} + c_2 e^{\mu_2 x}$  ó  $y = (c_1 + c_2 x) e^{\mu x}$  con  $\mu_1, \mu_2, \mu, c_1, c_2 \in \mathbf{C}$ ].

**Ej 3.**  $y'' + 4y' = 0$ ,  $\mu^2 + 4\mu = 0 \rightarrow \mu = 0, -4 \rightarrow y = c_1 + c_2 e^{-4x}$ .  
 $y'' + 4y' + 3y = 0$ ,  $\mu^2 + 4\mu + 3 = 0 \rightarrow \mu = -1, -3 \rightarrow y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x}$ .  
 $y'' + 4y' + 4y = 0$ ,  $\mu^2 + 4\mu + 4 = 0 \rightarrow \mu = -2$  doble  $\rightarrow y = (c_1 + c_2 x) e^{-2x}$ .  
 $y'' + 4y' + 5y = 0$ ,  $\mu^2 + 4\mu + 5 = 0 \rightarrow \mu = -2 \pm i \rightarrow y = (c_1 \cos x + c_2 \sin x) e^{-2x}$ .

$y'' - 4iy' - 3y = 0$ ,  $\mu^2 - 4i\mu - 3 = 0 \rightarrow \mu = 2i \pm \sqrt{-1} = i, 3i \rightarrow y = c_1 e^{ix} + c_2 e^{3ix}$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbf{C}$ .

Para dar una solución particular  $y_p$  de [c] siempre se dispone de la **fv**, pero si  $f(x)$  es polinomio, exponencial, seno o coseno o producto de ellos es mucho más corto obtenerla con un tanteo sugerido por la forma de  $f(x)$ . Antes de dar el teorema general, demos unos ejemplos para justificarlo.

Para calcular la solución general de  $y'' + 4y' + 3y = f(x)$  con  $f(x) = x$  buscamos una  $y_p$  que la cumpla.

(La solución general de la homogénea está escrita arriba en el ejemplo 3).

A la vista de la  $x$  parece buena idea buscar un polinomio que la cumpla. Llevemos  $y_p = Ax + B$  a la ecuación precisar los  $A$  y  $B$ :  $0 + 4A + 3(Ax + B) = x$ . Para que esto se cumpla debe ser  $3A = 1$  y  $4A + 3B = 0$ , es decir,  $A = \frac{1}{3}$  y  $B = -\frac{4}{9}$ . Es la  $y_p = \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}$  [y la solución de la ecuación será entonces  $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x} + \frac{x}{3} - \frac{4}{9}$ ].

Si ahora  $f(x) = e^x$  no es adecuado probar polinomios. La buena conjetura será  $y_p = Ae^x$  pues sus derivadas son otras exponenciales. Yendo a ecuación obtenemos  $A(1+4+3)e^x = e^x \rightarrow A = \frac{1}{8}$ ,  $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{8}e^x$ .

¿Y si  $f(x) = e^{-x}$ ? Probar  $y_p = Ae^{-x}$  no va a funcionar, porque ya hay soluciones de la homogénea de esa misma forma (es decir, porque  $-1$  era uno de los dos autovalores de la ecuación). En esos casos (como dirá el teorema) hay que multiplicar la  $y_p$  por potencias de  $x$  [lo que se llevaría la ecuación es  $y_p = Axe^{-x}$ ].

Por último, sea  $f(x) = \cos x$ . ¿Qué se debe probar? Como al derivar cosenos aparecen senos y viceversa, la conjetura será  $y_p = A \cos x + B \sin x \rightarrow y_p' = -As + Bc$ ,  $y_p'' = -Ac - Bs \rightarrow (2A + 4B)c + (2B - 4A)s = c$ .  $B = 2A$ ,  $10A = 1$ ,  $A = \frac{1}{10}$ ,  $B = \frac{1}{5}$ . La solución general es en este caso  $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{10} \cos x + \frac{1}{5} \sin x$ .

El **método de coeficientes indeterminados** de los ejemplos anteriores se precisa en este teorema:

Si  $f(x) = p_m(x)$ ,  $p_m$  polinomio de grado  $m$ , y  $\mu = 0$  no es autovalor tiene [c] una solución particular  $y_p = P_m(x)$  con  $P_m$  del mismo grado  $m$ . Si  $\mu = 0$  es autovalor de multiplicidad  $r$ , existe solución  $y_p = x^r P_m(x)$ .

**Teor 2.** Si  $f(x) = e^{\mu x} p_m(x)$ , con  $p_m$  de grado  $m$ , y  $\mu$  no es autovalor, hay  $y_p = e^{\mu x} P_m(x)$ , con  $P_m$  de grado  $m$ . Si  $\mu$  es autovalor de multiplicidad  $r$ , hay  $y_p = x^r e^{\mu x} P_m(x)$ .

Si  $f(x) = e^{px} [p_j(x) \cos qx + q_k(x) \sin qx]$ ,  $p_j, q_k$  de grados  $j, k$ , y  $p \pm iq$  no es autovalor, hay  $y_p = e^{px} [P_m(x) \cos qx + Q_m(x) \sin qx]$  con  $P_m$  y  $Q_m$  de grado  $m = \max\{j, k\}$ . Si  $p \pm iq$  es autovalor hay  $y_p = x e^{px} [P_m(x) \cos qx + Q_m(x) \sin qx]$ .

[Los  $P$  y  $Q$  tienen coeficientes arbitrarios que se precisan llevando la  $y_p$  a la ecuación].

[El método también es aplicable a las lineales de primer orden con coeficientes constantes].

**Ej 4.** Resolvamos  $y'' + 4y' + ay = 8x + 2$  si  $a = 4$  y si  $a = 0$ . [Soluciones de la no homogénea en Ej 3.].

En el primer caso ( $\lambda = 0$  no autovalor) se lleva a la ecuación:  $y_p = Ax + B \rightarrow 4A + 4Ax + 4B = 8x + 2$   
 $\rightarrow 4A = 8$ ,  $4A + 4B = 2$ ,  $A = 2$ ,  $B = -\frac{3}{2}$ . La solución general es:  $y = (c_1 + c_2 x) e^{-2x} + 2x - \frac{3}{2}$ .

En el segundo,  $\mu = 0$  es autovalor y hay que multiplicar por  $x$ :  $y_p = Ax^2 + Bx$ ,  $y_p' = 2Ax + B$ ,  $y_p'' = 2A$   
 $\rightarrow 2A + 8Ax + 4B = 8x + 2 \rightarrow A = 1$ ,  $B = 0$ . Solución general:  $y = c_1 + c_2 e^{-4x} + x^2$ .

[O bien:  $y' = v \rightarrow v' = -4v + 8x + 2$ . Con la **fv** o probando  $v_p = Ax + B$  se llega a  $v = \uparrow Ce^{-4x} + 2x$ ].

**Ej 5.**  $\begin{cases} y'' - y = 4e^x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$   $\mu^2 - 1 = 0, \mu = \pm 1$ . Solución general de la homogénea:  $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ .  
 Como  $\mu = 1$  es autovalor, hay que 'engordar' la  $y_p$  con una  $x$ :  
 $y_p = Ax e^x, y_p'' = A(x+2)e^x \rightarrow A(x+2) - Ax = 2A = 4 \rightarrow A = 2, y_p = 2x e^x$ .  
 O (más largo) con la **fv**:  $|W|(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2, y_p = e^{-x} \int \frac{e^x 4e^x}{-2} dx - e^x \int \frac{e^{-x} 4e^x}{-2} dx = -e^x + 2x e^x$ .  
 La solución de la no homogénea es  $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + 2x e^x \xrightarrow{d.i.} \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 + 2 = 0 \end{cases} \rightarrow y = e^{-x} - e^x + 2x e^x$ .

**Ej 6.** Hallemos una  $y_p$  de  $y'' + y = f(x)$  para varias  $f(x)$ . [ $\mu = \pm i \rightarrow y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + y_p$ ].

Si  $f(x) = 7$ , la  $y_p = 7$  salta a la vista (siempre lo hacen las soluciones constantes).

Si  $f(x) = x^3$ , hay  $y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$  ( $P_3$  arbitrario, no siendo  $\lambda = 0$  autovalor)

$$\rightarrow 6Ax + 2B + 3Ax^2 + 2Bx + C = x^3 \rightarrow A = 1, B = 0, 6A + C = 0, D = 0, y_p = x^3 - 6x.$$

Si  $f(x) = 2xe^x$ , existe  $y_p = e^x(Ax + B), y_p' = e^x(Ax + B + A), y_p'' = e^x(Ax + B + 2A)$

$$\rightarrow e^x[(Ax + B + 2A) + (Ax + B)] = 2xe^x \rightarrow A = 1, B = -1, y_p = e^x(x - 1).$$

Si  $f(x) = e^x \cos x$ , como  $1 \pm i$  no es autovalor, hay que probar una  $y_p = e^x(A \cos x + B \sin x)$

$$\rightarrow (A + 2B) \cos x + (B - 2A) \sin x = \cos x \rightarrow \begin{cases} A + 2B = 1 \\ B - 2A = 0 \end{cases} \rightarrow y_p = e^x \left( \frac{1}{5} \cos x + \frac{2}{5} \sin x \right).$$

Si  $f(x) = 3 \sin 2x$ , por no ser  $\pm 2i$  autovalores se prueba:  $y_p = A \cos 2x + B \sin 2x \rightarrow$

$$-4A \cos 2x - 4B \sin 2x + A \cos 2x + B \sin 2x = 3 \sin 2x \rightarrow A = 0, B = -1, y_p = -\sin 2x.$$

[En este caso sin  $y'$  de hecho bastaba probar  $y_p = B \sin 2x$  porque todo son senos].

Si  $f(x) = 2 \sin x$ , como  $\pm i$  es autovalor hay que engordar:  $y_p = x(A \cos x + B \sin x)$

$$\text{Derivando y sustituyendo: } 2B \cos x - 2A \sin x = 2 \sin x \rightarrow A = -1, B = 0, y_p = -x \cos x.$$

Si  $f(x) = \cos^2 x$ , parecería que no podemos usar coeficientes indeterminados, pero como

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \rightarrow \text{hay } y_p = A + B \cos 2x + C \sin 2x \rightarrow y_p = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cos 2x.$$

Si  $f(x) = (\cos x)^{-1}$ , no hay más remedio que acudir a la fórmula de variación de las constantes:

$$|W|(x) = 1 \rightarrow y_p = \sin x \int \frac{\cos x}{\cos x} dx - \cos x \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = x \sin x + \cos x \ln(\cos x).$$

[En los casos anteriores también se podría haber usado la **fv**, pero alargando los cálculos innecesariamente].

Imponemos ahora **datos iniciales** en  $x = 0$  a ecuaciones del Ej 6 y, por primera vez, **datos de contorno** (en  $x = a$  y  $x = b$  distintos). Como sabemos (por ser las funciones continuas), los iniciales proporcionan siempre una **única solución**. Pero las cosas **se complican con los de contorno** (que serán estudiados en 3.3 y 3.4).

**Ej 6\*.** Imponemos  $y(0) = y'(0) = 0$  a las ecuaciones a)  $y'' + y = 0$ , b)  $y'' + y = 7$ , c)  $y'' + y = 3 \sin 2x$ .

Obtenemos: a)  $\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow y = 0$ , b)  $\begin{cases} c_1 + 7 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow y = 7 - 7 \cos x$ , c)  $\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 - 2 = 0 \end{cases} \rightarrow y = 2 \sin x - \sin 2x$ , que son en los tres casos la única solución cumpliendo esos datos, como nos aseguraba el teorema 1.

Unos primeros datos de contorno  $y(0) = y(\frac{\pi}{2}) = 0$  nos van a seguir dando soluciones únicas. Se tiene:

$$\text{a) } \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow y = 0, \text{ b) } \begin{cases} c_1 + 7 = 0 \\ c_2 + 7 = 0 \end{cases} \rightarrow y = 7 - 7 \cos x - 7 \sin x, \text{ c) } \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow y = -\sin 2x,$$

Pero van a suceder cosas raras con estos segundos datos de contorno:  $y(0) = y(\pi) = 0$ .

Para el caso a)  $\begin{cases} c_1 = 0 \\ -c_1 = 0 \end{cases} \rightarrow c_1 = 0$ , pero es válido cualquier  $c_2$ . Hay **infinitas soluciones**  $y = c_2 \sin x$ .

Para el b)  $\begin{cases} c_1 + 7 = 0 \\ -c_1 + 7 = 0 \end{cases}$  que es imposible que se cumpla. **No tiene solución** la ecuación con esos datos.

Para c)  $\begin{cases} c_1 = 0 \\ -c_1 = 0 \end{cases}$  que se cumple  $\forall c_2$ . También aquí hay **infinitas soluciones**:  $y = c_2 \sin x - \sin 2x$ .

[Se verá en la próxima sección que cuando el problema de contorno para la ecuación homogénea tenga la solución única  $y \equiv 0$ , también será única la solución del problema para la ecuación no homogénea. Y cuando tenga soluciones no triviales, el problema no homogéneo podrá tener infinitas o ninguna solución].

**Ecuaciones de Euler:** [u]  $x^2y'' + axy' + by = h(x)$ ,  $x > 0$ .

Haciendo el cambio de variable independiente  $x = e^s$  (o sea,  $s = \ln x$ ):  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{ds}$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^2} \left[ \frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds} \right]$ ,

[u] se convierte en la siguiente ecuación lineal con coeficientes constantes:

$$\frac{d^2y}{ds^2} + (a-1)\frac{dy}{ds} + by = h(e^s), \text{ de ecuación característica } \mu^2 + (a-1)\mu + b = 0.$$

Conocemos las soluciones de la ecuación homogénea para esta lineal de coeficientes constantes. Deshaciendo el cambio, tenemos que la solución general de una ecuación de Euler **homogénea** es:

$$\begin{aligned} \text{Si } \mu_1 \neq \mu_2 \text{ reales, } y &= c_1x^{\mu_1} + c_2x^{\mu_2} \\ \text{Si } \mu \text{ doble (real), } y &= (c_1 + c_2 \ln x)x^\mu \\ \text{Si } \mu = p \pm qi, y &= [c_1 \cos(q \ln x) + c_2 \operatorname{sen}(q \ln x)]x^p \end{aligned}$$

(observemos que la 'ecuación característica' de una ecuación de Euler sería la que obtendríamos probando en la homogénea soluciones de la forma  $x^\mu$  y la de una de coeficientes constantes se obtendría probando soluciones  $e^{\mu x}$ ).

Para hallar la solución particular de la no homogénea disponemos siempre de la **fórmula de variación de las constantes** con  $f(x) = h(x)/x^2$ . Para la ecuación de coeficientes constantes en  $s$  tenemos además el método de **coeficientes indeterminados** de las lineales con coeficientes constantes, **si  $h(e^s)$  es del tipo adecuado**.

**Ej 1\*.**  $xy'' - 2y' = 2x$ , o bien,  $y'' - \frac{2}{x}y' = 2$ , ó  $x^2y'' - 2xy' = 2x^2 \rightarrow \mu(\mu-1) - 2\mu + 0 = 0$ ,  $\mu = 0, 3$ .

Como  $h(e^s)$  sería  $e^{2s}$  existe solución particular  $y_p = Ae^{2s} = Ax^2$  (al no ser 2 autovalor).

Llevamos esta  $y_p$  a la (primera) ecuación:  $2Ax - 4Ax = 2x \rightarrow y_p = -x^2 \rightarrow y = c_1 + c_2x^3 - x^2$ , que es la solución general que ya obtuvimos en el ejemplo 1.

En este caso el tanteo sí ahorra tiempo, pero volvemos a hallar la  $y_p$  con la **fv**:

$$|W|(x) = \begin{vmatrix} 1 & x^3 \\ 0 & 3x^2 \end{vmatrix} = 3x^2, f(x) = 2 \rightarrow y_p = x^3 \int \frac{2dx}{3x^2} - \int \frac{2x^3 dx}{3x^2} = -\frac{2x^2}{3} - \frac{x^2}{3} = -x^2.$$

Y vamos a imponer un par de parejas de datos adicionales que no proporcionan solución única.

Los primeros los damos en el punto patológico  $x=0$  en el que la función  $a(x)$  es discontinua:

$$y(0) = y'(0) = 0, \text{ lo cumplen las infinitas soluciones } y = c_2x^3 - x^2,$$

Y los otros son datos de contorno:  $y'(1) = y'(2) = 0 \rightarrow \begin{cases} 3c_2 - 2 = 0 \\ 12c_2 - 4 = 0 \end{cases}$ . Imposible. No hay solución.

**Ej 7.** Calculemos la solución general de  $x^2y'' + xy' - y = 2x$ .

La 'ecuación característica' es  $\mu^2 + (1-1)\mu - 1 = 0 \rightarrow \mu = \pm 1 \rightarrow$

La homogénea tiene por solución general  $x_h = c_1x + c_2x^{-1}$  (válida como otras veces  $\forall x \neq 0$ ).

$$|W|(x) = \begin{vmatrix} x & x^{-1} \\ 1 & -x^{-2} \end{vmatrix} = -2x^{-1}, f(x) = 2x^{-1} \rightarrow y_p = x^{-1} \int \frac{xx^{-1}dx}{-x^{-1}} - x \int \frac{x^{-1}x^{-1}dx}{-x^{-1}} = x \ln x - \frac{x}{2}.$$

La solución general de la no homogénea es  $y = c_1x + \frac{c_2}{x} + x \ln x$  (incluyendo el  $-\frac{x}{2}$  en  $c_1x$ ).

La  $y_p$  se podría hallar utilizando coeficientes indeterminados en la ecuación  $y'' - y = 2e^s$  a la que conduce el cambio  $x = e^s$ . La  $y_p$  que deberíamos probar en la ecuación en  $s$  (por ser  $\mu = 1$  autovalor) es  $y_p = Ase^s$ , o lo que es lo mismo, podríamos probar  $y_p = Ax \ln x$  en la de Euler inicial. Haciéndolo, se comprueba que debe ser  $A = 1$  como antes y se llega a la misma solución.

Que quede claro que el método de coeficientes indeterminados se ha dado para ecuaciones de coeficientes constantes y no (directamente) para las de Euler. En este ejemplo no tiene sentido, a la vista del  $2x$  de la derecha de la ecuación, probar en ella  $y_p = Ax + B$ . De hecho, si se hace, se obtiene la expresión sin sentido  $-B = 2x$  (una constante no puede ser igual a una función).

### 3.3 Autovalores y autofunciones de problemas de contorno

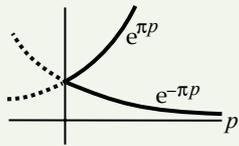
#### Problemas homogéneos

Vimos que una EDO lineal de orden 2 con coeficientes continuos tenía una única solución cumpliendo un par de **datos iniciales**. Los **problemas de contorno**, que se suelen plantear para EDOs con una constante  $\lambda$  (que aparece al resolver EDPs separando variables), tienen propiedades muy diferentes. Para ciertos valores de  $\lambda$  (**autovalores**) existirán soluciones no triviales  $\{y_n\}$  (**autofunciones**). Antes de dar la teoría general, estudiemos un par de ejemplos para la ecuación homogénea más sencilla (y que aparecerá más veces cuando resolvamos EDPs):  $y'' + \lambda y = 0$ .

**Ej 1.**  $(P_1) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$   $y \equiv 0$  es siempre solución de este problema. ¿Las habrá no triviales? Como su polinomio característico es  $\mu^2 + \lambda = 0 \rightarrow \mu = \pm\sqrt{-\lambda}$ , será diferente la solución general según  $\lambda$  sea menor, igual o mayor que 0.

Imponemos las condiciones de contorno en cada caso:

Si  $\lambda < 0$  la solución general es  $y = c_1 e^{px} + c_2 e^{-px}$ , con  $p = \sqrt{-\lambda} > 0$ .

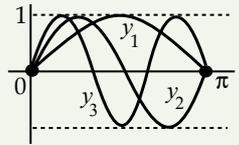
$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 = 0 \\ y(\pi) = c_1 e^{\pi p} + c_2 e^{-\pi p} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_2 = -c_1 \\ c_1 [e^{\pi p} - e^{-\pi p}] = 0 \end{cases} \rightarrow c_1 = c_2 = 0 \text{ (pues } e^{\pi p} \neq e^{-\pi p} \text{ si } p > 0). \text{ Ningún } \lambda < 0 \text{ es autovalor.}$$


Si  $\lambda = 0$  es  $y = c_1 + c_2 x \rightarrow \begin{cases} y(0) = c_1 = 0 \\ y(\pi) = c_1 + c_2 \pi = 0 \end{cases} \rightarrow y \equiv 0$ .  $\lambda = 0$  tampoco es autovalor.

Y para  $\lambda > 0$  es  $y = c_1 \cos wx + c_2 \sin wx$ , con  $w = \sqrt{\lambda} > 0 \rightarrow \begin{cases} y(0) = c_1 = 0 \\ y(\pi) = c_2 \sin w\pi = 0 \end{cases}$

Para tener solución no trivial debe ser  $c_2 \neq 0$ . Esto sucede si  $\sin w\pi = 0$ ,  $w\pi = \pi\sqrt{\lambda} = n\pi \rightarrow \lambda_n = n^2$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Para cada uno de estos  $\lambda_n$  (**autovalores**) hay soluciones no triviales  $y_n = c_2 \sin nx \equiv \{\sin nx\}$  (**autofunciones**).



[No confundamos estos autovalores de problemas de contorno con los autovalores raíces del polinomio característico]. La teoría de problemas de contorno está llena de notaciones de aire algebraico como las llaves anteriores que simplemente significan los 'múltiplos de lo de dentro'. Los ángulos de la siguiente expresión también tienen ese origen, porque las integrales que definen tienen las propiedades de un producto escalar.

Comprobemos que se cumple si  $m \neq n$ :

$$\langle y_n, y_m \rangle \equiv \int_0^\pi \sin nx \sin mx \, dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi [\cos(n-m)x - \cos(n+m)x] \, dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin(n-m)x}{n-m} - \frac{\sin(n+m)x}{n+m} \right]_0^\pi = 0.$$

[Si  $m = n$ , el valor no es 0, sino  $\langle y_n, y_n \rangle = \int_0^\pi \sin^2 nx \, dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 - \cos 2nx) \, dx = \frac{\pi}{2}$ ].

**(P<sub>1</sub>) posee infinitos autovalores  $\lambda_n = n^2$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Las autofunciones  $y_n = \{\sin nx\}$  asociadas a cada  $\lambda_n$  son un espacio vectorial de dimensión 1. La  $n$ -sima autofunción tiene  $n-1$  ceros en  $(0, \pi)$ . Autofunciones distintas son ortogonales en  $[0, \pi]$  [respecto del producto escalar  $\langle u, v \rangle = \int_0^\pi u v \, dx$ ].**

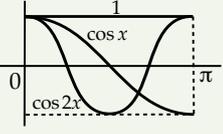
**Ej 2.**  $(P_2) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = y'(\pi) = 0 \end{cases}$  Imponemos estas nuevas condiciones:

$\lambda < 0$ ,  $y' = p[c_1 e^{px} - c_2 e^{-px}] \rightarrow \begin{cases} y'(0) = p[c_1 - c_2] = 0 \rightarrow c_2 = c_1 \\ y'(\pi) = p[c_1 e^{\pi p} - c_2 e^{-\pi p}] = 0 \rightarrow c_1 p [e^{\pi p} - e^{-\pi p}] = 0 \end{cases} \rightarrow y \equiv 0$ .

$\lambda = 0$ ,  $y' = c_2 \rightarrow \begin{cases} y'(0) = c_2 = 0 \\ y'(\pi) = c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda = 0$  autovalor con autofunción  $y_0 = c_1 = \{1\}$ .

$\lambda > 0$ ,  $y' = w[-c_1 \sin wx + c_2 \cos wx] \rightarrow \begin{cases} y'(0) = w c_2 = 0, c_2 = 0 \\ y'(\pi) = -w c_1 \sin w\pi = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = n^2, y_n = c_1 \cos nx$ .

Los autovalores  $\lambda_n = n^2$  y autofunciones  $y_n = \{\cos nx\}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  (suelen escribirse así, poniendo  $\{1\}$  como caso particular  $\{\cos 0\}$ ) tienen las mismas propiedades resaltadas para el problema anterior. Por ejemplo, la  $y_n$  que ocupa el lugar  $n$  se anula  $n-1$  veces y sigue habiendo ortogonalidad:

$$\langle y_n, y_m \rangle = \int_0^\pi \cos nx \cos mx \, dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi [\cos(n-m)x + \cos(n+m)x] \, dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin(n-m)x}{n-m} + \frac{\sin(n+m)x}{n+m} \right]_0^\pi = 0.$$


Tratemos ya el problema general. Consideremos la ecuación lineal de orden dos dependiente de  $\lambda$ :

$$y'' + a(x)y' + b(x)y + \lambda c(x)y = 0, \text{ con } a, b, c \text{ continuas en } [a, b] \text{ y } c(x) > 0 \text{ en } [a, b].$$

La reescribimos en la forma llamada 'autoadjunta' o 'Sturm-Liouville' multiplicando por  $e^{\int a}$ :

$$[e^{\int a} y']' + b e^{\int a} y + \lambda c e^{\int a} y \equiv [p y']' - q y + \lambda r y = 0, \text{ con } p \in C^1, q, r \in C, p, r > 0.$$

Las condiciones que más nos interesan son las llamadas condiciones **separadas** (cada una afecta a los valores de  $y$  o de  $y'$  sólo en uno de los extremos del intervalo).

Se llama **problema de Sturm-Liouville separado regular** a uno de la forma:

$$(P_s) \begin{cases} [p y']' - q y + \lambda r y = 0 \\ \alpha y(a) - \alpha' y'(a) = 0, \beta y(b) + \beta' y'(b) = 0 \end{cases} \text{ (condiciones separadas)}$$

siendo  $p \in C^1, q, r$  continuas,  $p, r > 0$  en  $[a, b], |\alpha| + |\alpha'|, |\beta| + |\beta'| \neq 0$ .

[Si  $p, r \leq 0$  todo se complica. Las últimas condiciones dicen que  $\alpha$  y  $\alpha', \beta$  y  $\beta'$  no se anulan a la vez].

En estos problemas homogéneos siempre  $y \equiv 0$  es solución y lo son los múltiplos de cualquier otra. Los ejemplos 1 y 2 eran unos  $(P_s)$ . Se prueba este teorema que generaliza sus propiedades:

Los autovalores de  $(P_s)$  son una sucesión infinita  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$  que tiende a  $\infty$ . Las autofunciones  $\{y_n\}$  forman un espacio vectorial de dimensión 1 y cada  $y_n$  posee exactamente  $n-1$  ceros en  $(a, b)$ . Las autofunciones asociadas a autovalores distintos son ortogonales en  $[a, b]$  respecto al **peso**  $r$ , es decir:

**Teor 1.**

$$\langle y_n, y_m \rangle \equiv \int_a^b r y_n y_m dx = 0, \text{ si } y_n, y_m \text{ están asociadas a } \lambda_n \neq \lambda_m.$$

Si  $\alpha \alpha' \geq 0, \beta \beta' \geq 0$  y  $q(x) \geq 0$  en  $[a, b]$ , entonces todos los  $\lambda_n \geq 0$ .

**Ej 3.**  $(P_3) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = y(1) = 0 \end{cases}$  [Casi escrito en forma autoadjunta:  $[y']' + \lambda y = 0$ . Es el peso  $r \equiv 1$ ]. Hallemos sus  $\lambda_n$ . Como  $\alpha \alpha' = \beta \beta' = 0, q \equiv 0$ , bastará mirar los  $\lambda \geq 0$ .

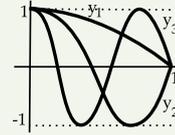
[Ahora sabemos que podíamos haber hecho esto con  $(P_1)$  y  $(P_2)$ . Que conste que **hay problemas con**  $\lambda < 0$ , como el  $(P_5)$ , aunque todos los problemas de interés físico del capítulo 4 darán lugar a  $\lambda \geq 0$ ].

$$\lambda = 0: y = c_1 + c_2 x, y' = c_2 \rightarrow \begin{cases} y'(0) = c_2 = 0 \\ y(1) = c_1 + c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow y \equiv 0. \lambda = 0 \text{ no es autovalor.}$$

$$\lambda > 0: y = c_1 \cos wx + c_2 \sin wx. y'(0) = 0 \rightarrow c_2 = 0 \rightarrow y(1) = c_1 \cos w = 0$$

$$\rightarrow w_n = \frac{2n-1}{2} \pi, \lambda_n = \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4}, y_n = \{\cos \frac{2n-1}{2} \pi x\}, n = 1, 2, \dots$$

Según el teorema las  $\{y_n\}$  son ortogonales:  $\int_0^1 y_n y_m dx = 0, n \neq m$ , lo que es fácil de comprobar, y la autofunción  $n$ -sima (como las tres dibujadas) tiene  $n-1$  ceros en  $(0, 1)$ .

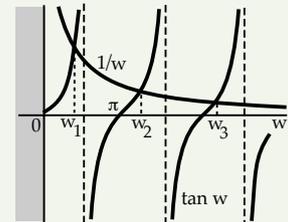


**Ej 4.**  $(P_4) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = y(1) + y'(1) = 0 \end{cases}$  Aquí es  $\alpha \alpha' = 0, \beta \beta' = 1 > 0, q \equiv 0 \Rightarrow \lambda \geq 0$ .  $\lambda = 0 \rightarrow \begin{cases} y'(0) = c_2 = 0 \\ y(1) + y'(1) = c_1 + 2c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow y \equiv 0$ . No es autovalor.

$$\lambda > 0: y = c_1 \cos wx + c_2 \sin wx. y'(0) = w c_2 = 0 \rightarrow y(1) + y'(1) = c_1 [\cos w - w \sin w] = 0.$$

**No podemos calcular exactamente los  $\lambda_n$** , pero el corchete se anula infinitas veces, por ser  $\tan w_n = \frac{1}{w_n}$  para infinitos  $w_n$ , que sólo se pueden dar aproximadamente (con ordenador:  $w_1 \approx 0.860, w_2 \approx 3.426, w_3 \approx 9.529, \dots$ ). Por quedar  $c_1$  indeterminado para cada  $\lambda_n = w_n^2$  serán las  $y_n = \{\cos w_n x\}$ . Las  $y_n$  resultarán ortogonales (lo que también se puede comprobar).

[La mayoría de problemas de S-L no son resolubles exactamente, pues pocas lineales de orden dos lo son elementalmente, y aunque lo sean puede ocurrir lo del ejemplo].



**Ej 5.**  $(P_5) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) + y'(0) = y(1) + y'(1) = 0 \end{cases}$  Como  $\alpha \alpha' < 0$  podrían aparecer autovalores negativos. Vamos a comprobar que, de hecho,  $\lambda = -1$  **es autovalor**.

$$\lambda = -1 \rightarrow \mu = \pm 1 \rightarrow \begin{cases} y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} \\ y' = c_1 e^x - c_2 e^{-x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y(0) + y'(0) = 2c_1 = 0 \\ y(1) + y'(1) = 2c_1 e = 0 \end{cases} \forall c_2. \text{ Autovalor con } y_0 = \{e^{-x}\}.$$

[No es difícil ver que no hay más autovalores negativos y que  $\lambda = 0$  no lo es. Los infinitos positivos:  $y(0) + y'(0) = c_1 + w c_2 = 0, c_1 = -w c_2 \rightarrow \lambda_n = n^2 \pi^2, y_n = \{\sin n \pi x - n \pi \cos n \pi x\}, n = 1, 2, \dots$ ].

En los dos siguientes problemas de Sturm-Liouville aparecen ecuaciones nuevas (resolubles), el peso ya no va a ser  $r(x) = 1$  y debermos escribirlas en forma autoadjunta para saber quién es:

**Ej 6.**  $(P_6) \begin{cases} x^2 y'' + xy' + \lambda y = 0 \\ y(1) = y(e) = 0 \end{cases}$   $p(x) = e^{\int a} = e^{\int \frac{dx}{x}} = x \rightarrow [xy']' + \lambda \frac{y}{x} = 0$ . Es  $r(x) = \frac{1}{x}$ .  
Es problema separado regular ( $p, r > 0$  en  $[1, e]$ ).

La ecuación es de Euler:  $\mu(\mu-1) + \mu + \lambda = 0 \rightarrow \mu = \pm\sqrt{-\lambda}$ . Basta mirar los  $\lambda \geq 0$ .

$\lambda = 0, y = c_1 + c_2 \ln x$ . Imponiendo los datos:  $\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_1 + c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$  (no es autovalor).

$\lambda > 0, y = c_1 \cos(w \ln x) + c_2 \operatorname{sen}(w \ln x), \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 \operatorname{sen} w = 0 \end{cases} \lambda_n = n^2 \pi^2, y_n = \{\operatorname{sen}(n\pi \ln x)\}, n = 1, 2, \dots$

Y como siempre, las autofunciones serán ortogonales (respecto al peso  $r$ , no sin él):

$$\int_1^e \frac{\operatorname{sen}(n\pi \ln x) \operatorname{sen}(m\pi \ln x)}{x} dx = 0, m \neq n.$$

**Ej 7.**  $(P_7) \begin{cases} y'' - 2y' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = y'(1) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mu^2 - 2\mu + \lambda = 0, \\ \mu = 1 \pm \sqrt{1 - \lambda}. \end{cases}$  Forma autoadjunta;  $[e^{-2x} y']' + \lambda e^{-2x} y = 0$ .

Sabemos que los  $\lambda \geq 0$ , pero esto no ahorra cálculos aquí, pues hay que mirar los  $\lambda <, =, > 1$ :

$\lambda < 1: y = c_1 e^{(1+p)x} + c_2 e^{(1-p)x}, y' = c_1(1+p)e^{(1+p)x} + c_2(1-p)e^{(1-p)x}$ , con  $p = \sqrt{1-\lambda} > 0$   
 $\rightarrow \begin{cases} c_1[1+p] + c_2[1-p] = 0 \\ c_1[1+p]e^{1+p} + c_2[1-p]e^{1-p} = 0 \end{cases} \rightarrow c_2(1-p)e[e^{-p} - e^p] = 0 \rightarrow p = 1$  ( $\lambda = 0$ ),  $y_0 = \{1\}$ .

$\lambda = 1: y = [c_1 + c_2 x] e^x, y' = [c_1 + c_2 + c_2 x] e^x \rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 + 2c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow y \equiv 0$ .  $\lambda = 1$  no autovalor.

$\lambda > 1: y = [c_1 \cos wx + c_2 \operatorname{sen} wx] e^x, w = \sqrt{\lambda - 1}$   
 $y' = [(c_1 + c_2 w) \cos wx + (c_2 - c_1 w) \operatorname{sen} wx] e^x \rightarrow y'(0) = c_1 + c_2 w = 0, c_1 = -w c_2 \rightarrow$   
 $y'(1) = c_2 e(1 + w^2) \operatorname{sen} w = 0 \rightarrow$   
 $w = n\pi, n = 1, 2, \dots \rightarrow \lambda_n = 1 + n^2 \pi^2, y_n = \{e^x [\operatorname{sen} n\pi x - n\pi \cos n\pi x]\}, n = 1, 2, \dots$

Las autofunciones serán ortogonales respecto al peso  $r(x) = e^{-2x}$ :

$$\langle y_0, y_n \rangle = \int_0^1 e^{-x} [\operatorname{sen} n\pi x - n\pi \cos n\pi x] dx = [-e^{-x} \operatorname{sen} n\pi x]_0^1 = 0,$$

$$\langle y_n, y_m \rangle = \int_0^1 [\operatorname{sen} n\pi x - n\pi \cos n\pi x] [\operatorname{sen} m\pi x - m\pi \cos m\pi x] dx = \dots = 0 \text{ (si } m \neq n \text{)}.$$

**Problema periódico.** En 4.5 nos aparecerá también el siguiente problema, único que no es separado, pues sus condiciones de contorno mezclan valores en los extremos del intervalo:

**Ej 8.**  $(P_8) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(-\pi) = y(\pi), y'(-\pi) = y'(\pi) \end{cases}$  [Estas condiciones equivalen a pedir que  $y$  sea  $2\pi$ -periódica].

$\lambda < 0 \rightarrow \begin{cases} c_1[e^{\pi p} - e^{-\pi p}] - c_2[e^{\pi p} - e^{-\pi p}] = 0 \\ c_1[e^{\pi p} - e^{-\pi p}] + c_2[e^{\pi p} - e^{-\pi p}] = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} e^{\pi p} - e^{-\pi p} & e^{-\pi p} - e^{\pi p} \\ e^{\pi p} - e^{-\pi p} & e^{\pi p} - e^{-\pi p} \end{vmatrix} = 2(e^{\pi p} - e^{-\pi p})^2 \neq 0$  si  $p > 0$ .

El determinante de los coeficientes no es 0 y sólo tiene la solución  $c_1 = c_2 = 0$ . No hay  $\lambda < 0$ .

$\lambda = 0 \rightarrow \begin{cases} c_1 - c_2 \pi = c_1 + c_2 \pi \\ c_2 = c_2 \end{cases}$  se satisface para  $c_2 = 0$  y cualquier  $c_1$ :  $y_0 = c_1 = \{1\}$ .

$\lambda > 0 \rightarrow \begin{cases} 2c_2 \operatorname{sen} \pi w = 0 \\ 2c_1 w \operatorname{sen} \pi w = 0 \end{cases} \rightarrow \operatorname{sen} \pi w = 0 \rightarrow \lambda_n = n^2, n = 1, 2, \dots$

Para esos  $\lambda_n$  las condiciones de contorno se cumplen para todo  $c_1$  y todo  $c_2$ .

Las autofunciones son, pues:  $y_n = c_1 \cos nx + c_2 \operatorname{sen} nx \equiv \{\cos nx, \operatorname{sen} nx\}$ .

[Es claro que exigir simplemente que  $y$  sea  $2\pi$ -periódica lleva a los mismos  $\lambda_n$  e  $\{y_n\}$ ].

Las propiedades de (P7) son algo distintas: sigue habiendo una **sucesión infinita de autovalores**  $\lambda_n = n^2, n = 1, 2, \dots$  tendiendo a  $\infty$ , pero **las autofunciones**  $y_0 = \{1\}, y_n = \{\cos nx, \operatorname{sen} nx\}$  **forman**, si  $n > 0$ , **un espacio vectorial de dimensión 2**. Utilizando relaciones trigonométricas se comprueba que sigue siendo cierto que **autofunciones diferentes son ortogonales** entre sí.

## Problemas no homogéneos

Resolviendo EDPs por separación de variables aparecerán sobre todo problemas de contorno homogéneos. Pero a veces (en 4.5) también alguno no homogéneo, de propiedades diferentes. En ellos ni  $y \equiv 0$  será solución ni lo son los múltiplos de una solución dada. Damos brevemente la teoría empezando por un ejemplo sencillo:

**Ej 9.** Discutamos cuántas soluciones tiene  $\begin{cases} y'' = 3x - d \\ y(1) = y(2) + by'(2) = 0 \end{cases}$ , con  $d, b$  constantes.

La solución general es:  $y = c_1 + c_2x + \frac{1}{2}x^3 - \frac{d}{2}x^2$  (con  $y' = c_2 + \frac{3}{2}x^2 - dx$ ). Imponiendo los datos:

$$\begin{cases} y(1) = c_1 + c_2 + \frac{1}{2} - \frac{d}{2} = 0 \\ y(2) + by'(2) = c_1 + 2c_2 + 4 - 2d + bc_2 + 6b - 2bd = 0 \end{cases}, \text{ es decir: } \begin{cases} c_1 + c_2 = \frac{d}{2} - \frac{1}{2} \\ c_1 + (2+b)c_2 = 2bd + 2d - 6b - 4 \end{cases}$$

Hay **solución única** en  $c_1$  y  $c_2$  del sistema **si el homogéneo tiene sólo la trivial** (si el determinante de los coeficientes  $1+b \neq 0$ ). **Si el homogéneo tiene infinitas, el no homogéneo tendrá infinitas o ninguna.** Para  $b \neq -1$ , se puede despejar de forma única  $c_1$  y  $c_2$ , y la solución queda precisada  $\forall d$ .

Pero si  $b = -1$ :  $\begin{cases} c_1 + c_2 = \frac{d-1}{2} \\ c_1 + c_2 = 2 \end{cases}$ , este sistema sólo tiene solución cuando  $\frac{d-1}{2} = 2 \Leftrightarrow d = 5$ , y entonces una de las dos constantes queda libre. Si  $b = -1, d \neq 5$ , no hay solución.

Generalicemos este ejemplo. Sea el problema para la **ecuación no homogénea**:

$$(P_f) \begin{cases} [p(x)y']' + g(x)y = f(x) \\ \alpha y(a) - \alpha' y'(a) = \beta y(b) + \beta' y'(b) = 0 \end{cases}, p \in C^1, g, f \in C, p > 0 \text{ en } [a, b].$$

y llamemos  $(P_h)$  al problema homogéneo asociado ( $f \equiv 0$ ). Entonces se demuestra que:

**Teor 2.**  $(P_f)$  tiene solución única  $\Leftrightarrow (P_h)$  tiene sólo la solución  $y \equiv 0$ .  
Si  $(P_h)$  tiene soluciones no triviales  $\{y_h\}$  entonces según sea  $\int_a^b f(x) y_h(x) dx \neq 0$ ,  $(P_f)$  tiene infinitas soluciones o ninguna solución.

$$\begin{matrix} 1 \rightarrow 1 \\ \infty \rightarrow 0 \end{matrix}$$

Gran parte del teorema sale de imponer las condiciones de contorno a la solución  $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p$ , por las propiedades de los sistemas algebraicos. Más complicado es probar que esa integral, donde  $f$  es la del problema escrito en forma autoadjunta, distingue entre infinitas y ninguna solución.

**Ej 9\*.** Para el Ej 9,  $(P_h)$  tiene sólo la solución  $y \equiv 0$  si  $b \neq -1$ . Y si  $b = -1$  es  $y_h = \{1-x\}$  (pues  $c_1 + c_2 = 0$ ).

El  $(P_f)$  [para  $[y']' = x - d$ ,  $f$  es la inicial], tendrá entonces solución única si  $b \neq -1$ , e infinitas ó 0, para  $b = -1$ , según se anule o no la integral  $\int_1^2 (3x-d)(1-x) dx = \frac{d}{2} - \frac{5}{2}$  ( $= 0 \Leftrightarrow d = 5$ ).

[Tiene las mismas propiedades un problema con **condiciones de contorno no homogéneas**:

$$(P_{AB}) \begin{cases} [p(x)y']' + g(x)y = 0 \\ \alpha y(a) - \alpha' y'(a) = A, \beta y(b) + \beta' y'(b) = B \end{cases} \begin{matrix} \text{Solución única si } (P_h) \text{ sólo tiene la } y \equiv 0 \\ \text{e infinitas o ninguna si } (P_h) \text{ tiene infinitas} \end{matrix}$$

Para estudiar un **problema de S-L no homogéneo**:

$$(P_\lambda) \begin{cases} [py']' - qy + \lambda ry = f(x) \\ \alpha y(a) - \alpha' y'(a) = \beta y(b) + \beta' y'(b) = 0 \end{cases}$$

del Teor 2 se deduce, si  $(P_s)$  es el problema separado de Sturm-Liouville homogéneo (el de  $f \equiv 0$ ):

**Teor 3.**  $(P_\lambda)$  tiene solución única  $\Leftrightarrow \lambda$  no es autovalor de  $(P_s)$ . Si  $\lambda_n$  es autovalor con autofunción  $\{y_n\}$ ,  $(P_{\lambda_n})$  no tiene solución si  $\int_a^b f y_n dx \neq 0$  o tiene infinitas si  $\int_a^b f y_n dx = 0$ .

**Ej 10.** Sea  $\begin{cases} x^2 y'' - 2xy' + \lambda y = 2 \\ y'(1) = y(2) = 0 \end{cases}$ . Precisar si  $\lambda = 0$  y  $\lambda = 2$ , son o no autovalores del homogéneo y cuántas soluciones tiene el no homogéneo en esos dos casos.

Ecuación de Euler con  $\mu^2 - 3\mu + \lambda = 0$ . Si  $\lambda = 0$  la solución de la ecuación homogénea es  $y = c_1 + c_2 x^3$ .

Imponiéndole los datos  $\begin{cases} y'(1) = 3c_2 = 0 \\ y(2) = c_1 + 8c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow c_1 = c_2 = 0$ .  $\lambda = 0$  no es autovalor y el no homogéneo tendrá solución única (no es corto hallarla).

Si  $\lambda = 2$ ,  $y = c_1 x + c_2 x^2 \rightarrow \begin{cases} y'(1) = c_1 + 2c_2 = 0 \\ y(2) = 2c_1 + 4c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow c_1 = -2c_2$ . Autovalor con autofunción  $\{x^2 - 2x\}$ . No homogéneo con infinitas o ninguna.

Para discutirlo con el teorema:  $[\frac{y'}{x^2}]' + \frac{2}{x^4} y = \frac{2}{x^4}$ ,  $\int_1^2 \frac{2}{x^4} (x^2 - 2x) dx = [\frac{2}{x^2} - \frac{2}{x}]_1^2 = -\frac{1}{2} \neq 0$ . Sin solución.

O se puede deducir a partir de la solución general de la no homogénea  $y = c_1 x + c_2 x^2 + 1$  ( $y_p$  a ojo).

### 3.4. Series de Fourier

Sean  $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$  las **autofunciones** del problema de Sturm-Liouville separado regular:

$$(P) \begin{cases} [py']' - qy + \lambda ry = 0 \\ \alpha y(a) - \alpha' y'(a) = y(b) + \beta' y'(b) = 0 \end{cases}$$

Y llamemos, como en 3.3,  $\langle u, v \rangle = \int_a^b r u v dx$  al producto escalar respecto al peso  $r(x)$ .

[El  $r$  es el de forma autoadjunta de arriba; muchas veces ese peso será 1, pero no siempre].

**Toda función  $f$  suficientemente buena en  $[a, b]$  puede ser escrita como una suma infinita de las autofunciones de (P), que se denomina **serie de Fourier de  $f$** :**

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x)$$

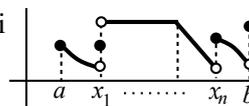
Los  $c_n$  deben ser (si la serie puede ser integrada término a término), por ser las  $y_n$  ortogonales:

$$\int_a^b r f y_m dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_a^b r y_n y_m dx = c_m \int_a^b r y_m y_m dx \Rightarrow c_n = \frac{\langle f, y_n \rangle}{\langle y_n, y_n \rangle}, \quad n=1, 2, \dots$$

Para qué la serie con esos coeficientes converja realmente hacia  $f$  le pediremos que sea  $C^1$  a trozos:

Una  $f$  es  $C^1$  a trozos en  $[a, b] = [a, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \dots \cup [x_n, b]$  si

- $f$  y  $f'$  son continuas en cada  $(x_k, x_{k+1})$ ,
- los límites laterales de  $f, f'$  en cada  $x_k$  son finitos.



**Teor 1.** Si  $f$  es  $C^1$  a trozos en  $[a, b]$  la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle f, y_n \rangle}{\langle y_n, y_n \rangle} y_n(x) = f(x)$  en los  $x \in (a, b)$  en que  $f$  es continua y en los  $x \in (a, b)$  en que  $f$  es discontinua la suma es  $\frac{1}{2} [f(x^-) + f(x^+)]$ .

El teorema **no dice nada sobre la convergencia en los extremos  $a$  y  $b$** .

Caso particular de los desarrollos de Fourier son estos **desarrollos en series trigonométricas**:

Los autovalores y autofunciones de  $(P_s) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(L) = 0 \end{cases}$  son  $\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}$  e  $y_n = \left\{ \sin \frac{n\pi x}{L} \right\}, n=1, 2, \dots$

[Fácil de comprobar. Un problema en  $[a, b]$  se llevaría al anterior (con  $L=b-a$ ) haciendo  $s=x-a$ ].

Se llama **serie de Fourier en senos** de  $f$  en  $[0, L]$  a su desarrollo de Fourier en estas autofunciones:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad \text{con } b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n=1, 2, \dots \quad [s]$$

Ya que el peso es  $r(x) \equiv 1$  y se tiene que  $\langle y_n, y_n \rangle = \int_0^L \sin^2 \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{1}{2} \int_0^L [1 - \cos \frac{2n\pi x}{L}] dx = \frac{L}{2}$ .

Los de  $(P_c) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = y'(L) = 0 \end{cases}$  son  $\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, y_n = \left\{ \cos \frac{n\pi x}{L} \right\}, n=0, 1, \dots [y_0 = \{1\}]$

Y la **serie de Fourier en cosenos** de una  $f$  en  $[0, L]$  será:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad \text{con } a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n=0, 1, 2, \dots \quad [c]$$

Pues  $\langle y_0, y_0 \rangle = \int_0^L 1^2 dx = L$  e  $\langle y_n, y_n \rangle = \int_0^L \left[ \cos \frac{n\pi x}{L} \right]^2 dx = \frac{L}{2},$  si  $n \geq 1$ .

[Ponemos  $\frac{a_0}{2}$  en la serie para que la fórmula del  $a_n$  valga también para  $a_0$ ].

Otras familias de autofunciones muy habituales (dan lugar a las llamadas, respectivamente, series en **senos impares** y en **cosenos impares** en  $[0, L]$ ) son las de estos problemas fáciles de resolver:

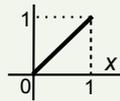
$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(L) = 0 \end{cases} \quad \text{con } \lambda_n = \frac{[2n-1]^2 \pi^2}{2^2 L^2}, y_n = \left\{ \sin \frac{[2n-1] \pi x}{2L} \right\}, \langle y_n, y_n \rangle = \frac{L}{2}, n=1, 2, \dots$$

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = y'(L) = 0 \end{cases} \quad \text{con } \lambda_n = \frac{[2n-1]^2 \pi^2}{2^2 L^2}, y_n = \left\{ \cos \frac{[2n-1] \pi x}{2L} \right\}, \langle y_n, y_n \rangle = \frac{L}{2}, n=1, 2, \dots$$

**En los 4 casos anteriores** la fórmula para el coeficiente  $c_n$  de la serie de Fourier (que se deduce de la general  $\langle f, y_n \rangle / \langle y_n, y_n \rangle$ ) adopta la forma:

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) y_n(x) dx$$

[No olvidando el  $\frac{a_0}{2}$  de las series en cosenos, únicas con ese término, pues las otras empiezan desde  $n=1$ ].

**Ej 1.** Sea  $f(x) = x, x \in [0, 1]$ . Desarrollémosla en senos, en cosenos y en cosenos impares: 

En senos:  $b_n = 2 \int_0^1 x \sin n\pi x \, dx = -\frac{2x}{n\pi} \cos n\pi x \Big|_0^1 + \frac{2}{n\pi} \int_0^1 \cos n\pi x \, dx = -\frac{2}{n\pi} \cos n\pi$ ,  
 $\rightarrow f(x) = x = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n\pi x = \frac{2}{\pi} \left[ \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \dots \right]$ .

En cosenos, aunque tenemos una única fórmula, hay que hacer dos cálculos: para  $a_0$  y para el resto.

$a_0 = 2 \int_0^1 x \, dx = 1$ ,  $a_n = 2 \int_0^1 x \cos n\pi x \, dx = \frac{2x}{n\pi} \sin n\pi x \Big|_0^1 - \frac{2}{n\pi} \int_0^1 \sin n\pi x \, dx = \frac{2}{n^2 \pi^2} [\cos n\pi - 1]$ ,  
 $n = 1, 2, \dots$   
 $\rightarrow x = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos n\pi x = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} \cos(2m-1)\pi x$ .

Y el que falta:  $x = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(2n-1)} - \frac{8}{\pi^2(2n-1)^2} \right] \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2}$ , pues  $c_n = 2 \int_0^1 x \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2} \, dx = \dots$

Las tres series, por el teorema 1, convergen hacia  $x$  para cada  $x \in (0, 1)$ . Lo mismo haría el desarrollo en autofunciones de cualquier otro problema de Sturm-Liouville. En general no sabremos qué sucede en  $x=0$  y en  $x=1$ , pero sí se podrá decir para las dos primeras series, por los argumentos que siguen.

Observemos que todos los sumandos de una **serie en senos** ( $\sin \frac{n\pi x}{L}$ ) son impares y que además todos ellos tienen periodo  $2L$  con lo que la serie tendrá esas mismas propiedades. Si la  $f$  inicialmente definida en  $[0, L]$  que desarrollamos se extiende de forma **impar** a  $[-L, L]$  y luego de forma  **$2L$ -periódica** a todo  $\mathbf{R}$ , esa función extendida será la suma de la serie. Donde sea continua, la serie tenderá hacia su valor (y si no, tenderá hacia el valor medio, pudiendo aparecer discontinuidades en los extremos del intervalo inicial).

Razonando análogamente, una **serie en cosenos** (de sumandos pares y periódicos) **convergerá hacia la extensión par y  $2L$ -periódica** de la  $f$  inicial, lo que permite ver también lo que sucede en los extremos.

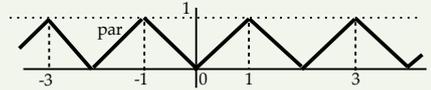
En el caso particular de que la  $f$  sea continua deducimos de las ideas anteriores:

La serie en cosenos de una  $f$  continua en  $[0, L]$ , con  $f'$  continua a trozos, converge hacia  $f$  en todo  $[0, L]$ . Para que lo haga la serie en senos debe ser además  $f(0) = f(L) = 0$ .

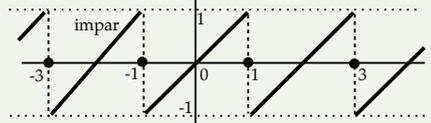
[Si fuese  $f(0) \neq 0$  ó  $f(L) \neq 0$ , la  $f$  extendida impar y  $2L$ -periódica no sería continua en 0 o en  $L$ . Además es claro que las series en senos se anulan en 0 y  $L$ , pues lo hace cada sumando].

**Ej 1\*.** Ya podemos saber hacia qué convergen en los extremos las dos primeras series del ejemplo anterior.

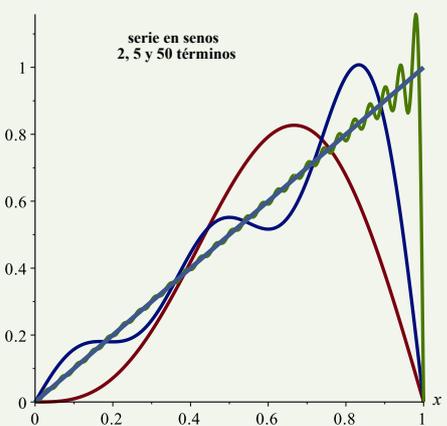
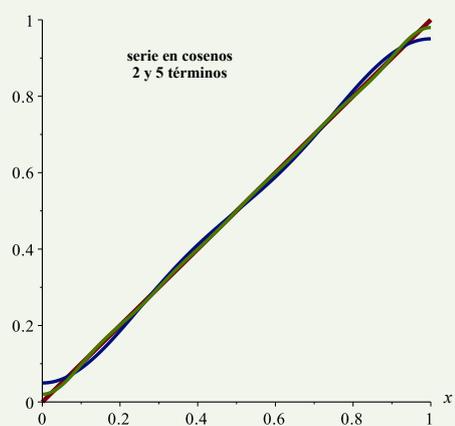
La serie de cosenos sí converge a  $f$  en todo  $[0, 1]$ . Pero la serie en senos no converge hacia  $f$  en todo el intervalo (lo hace en  $[0, 1)$ , en  $x=1$  la suma será 0).



[Aunque las series en cosenos converjan mejor, al resolver EDPs por separación de variables no elegiremos el tipo de series en las que desarrollar las funciones. El problema nos impondrá unas autofunciones determinadas].



Utilizamos el ordenador para comprobarlo. Para la serie en cosenos sumamos 2 y 5 términos y ya se tiene una buena aproximación. Para la de senos, en cambio, además de acercarse más lentamente se ve que cerca de  $x=1$ , aunque sumemos 50 términos de la serie, no se ajusta bien al valor real.



[Cerca de las discontinuidades siempre aparecen esos 'picos'. Es el llamado '**fenómeno de Gibbs**'. Aunque se pueden dar argumentos para las series en senos y cosenos impares, no entraremos en ello].

**Ej 2.** Hallemos el desarrollo de  $f(x)=\pi$  en serie de las autofunciones  $y_n(x)$  de  $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = y'(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$ .

El problema es uno de los 4 conocidos: el de los cosenos impares.

Sustituyendo en las expresiones dadas deducimos las autofunciones:  $y_n = \{\cos(2n-1)x\}$ ,  $n=1, 2, \dots$

Y tenemos la fórmula para hallar los  $c_n = \frac{2}{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \pi \cos(2n-1)x \, dx = \frac{4}{2n-1} \sin(2n-1)x \Big|_0^{\pi/2}$ .

Por tanto:  $\pi = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \cos(2n-1)x = 4 \left[ \cos x - \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{5} \cos 5x - \frac{1}{7} \cos 7x \dots \right]$ .

Como la  $f$  desarrollada es continua en  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , la suma de la serie  $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$  será  $\pi = f(x)$ .

Aunque no tenemos resultados generales en los extremos para estas series, en este caso es posible ver que en  $x=0$  sí es  $\pi = 4 \left[ 1 - \frac{1}{3} + \dots \right] = 4 \arctan 1$  (pues  $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \dots$ ), pero que en  $\frac{\pi}{2}$  suma 0 (los cosenos se anulan).

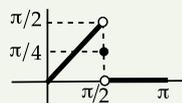
En cualquier otro punto, por ejemplo, el  $x=1$ , con ordenador podemos comprobar lo que asegura el teorema 1: sumando 100 términos de la serie se obtiene 3.132..., sumando 1000, 3.14227...

Parecemos estar haciendo tonterías escribiendo una sencilla constante como una serie infinita de cosenos, pero este tipo de cálculos será necesario para resolver ecuaciones en derivadas parciales.

**Ej 3.** Desarrollemos la discontinua  $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$  en serie de autofunciones de  $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y'(\pi) = 0 \end{cases}$ .

Las autofunciones son los conocidos senos impares:  $y_n = \left\{ \sin \frac{(2n-1)x}{2} \right\}$ ,  $n=1, 2, \dots$

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin \frac{(2n-1)x}{2} \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} x \sin \frac{(2n-1)x}{2} \, dx = \frac{8 \sin \frac{(2n-1)\pi}{4} - 2 \cos \frac{(2n-1)\pi}{4}}{\pi(2n-1)^2} \cdot \frac{\pi}{4}$$



La serie tiende hacia  $f(x)$  en los  $x \in (0, \pi)$  en que es continua [en  $(0, \frac{\pi}{2})$  y  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ ],

hacia  $\frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)] = \frac{\pi}{4}$  en el  $x = \frac{\pi}{2}$  donde  $f$  es discontinua (y en los extremos no lo sabemos).

[Es claro que la serie suma 0 en  $x=0$  (son 0 los senos) y el ordenador sugiere que también en  $x=\pi$  vale 0].

Cuando desarrollemos en cualquier familia de autofunciones que no sean las 4 clásicas habrá que acudir a la **expresión general de los coeficientes**  $c_n = \langle f, y_n \rangle / \langle y_n, y_n \rangle$ . Esto nos pasa en los dos ejemplos siguientes.

**Ej 4.** Desarrollamos  $f(x)=x$ ,  $x \in [0, 1]$  en las autofunciones del Ej 4 de 3.3:  $\{\cos w_n x\}$  con  $\tan w_n = \frac{1}{w_n}$ .

$$\begin{aligned} \text{El peso es } r(x) = 1 \rightarrow \langle \cos w_n x, \cos w_n x \rangle &= \int_0^1 \cos^2 w_n x \, dx = \frac{1}{2} + \frac{\sin 2w_n \cos w_n}{2w_n} = \frac{w_n^2 + \cos^2 w_n}{2w_n^2} \\ \langle x, \cos w_n x \rangle &= \int_0^1 x \cos w_n x \, dx = \frac{\sin w_n}{w_n} + \frac{\cos w_n - 1}{w_n^2} = \frac{2 \cos w_n - 1}{w_n^2} \end{aligned}$$

$$\text{Por tanto: } x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(2 \cos w_n - 1)}{w_n^2 + \cos^2 w_n} \cos w_n x.$$

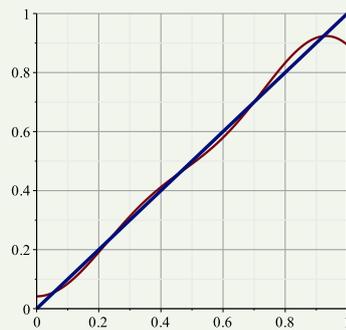
[Usamos el Maple para calcular varios coeficientes y dibujar algunas sumas parciales de la serie. Lo primero será aproximar los  $w_n$ :

$$w_1 \approx 0.8603, w_2 \approx 3.4256, w_3 \approx 6.4373, w_4 \approx 9.5293 \dots$$

De ellos deducimos los  $c_n$ :

$$c_1 \approx 0.5223, c_2 \approx -0.4614, c_3 \approx 0.0460, c_4 \approx -0.0651 \dots$$

A la derecha está el dibujo de  $f(x)=x$  y de la cuarta suma parcial. Parece también converger en los extremos, cosa que no sabíamos].



**Ej 5.** Desarrollamos ahora  $f(x)=1$  en las  $y_n$  del Ej 5 de 3.3:  $y_0 = \{e^{-x}\}$  e  $y_n = \{\sin n\pi x - n\pi \cos n\pi x\}$ .

$$c_0 = \frac{\langle 1, e^{-x} \rangle}{\langle e^{-x}, e^{-x} \rangle} = \frac{\int_0^1 e^{-x} \, dx}{\int_0^1 e^{-2x} \, dx} = \frac{1 - e^{-1}}{(1 - e^{-2})/2} = \frac{2e}{e+1}$$

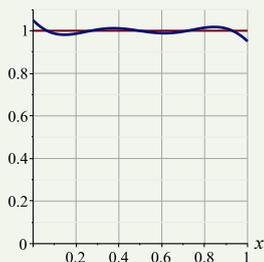
$$\langle y_n, 1 \rangle = \left[ -\frac{1}{n\pi} \cos n\pi x - \sin n\pi x \right]_0^1 = \frac{1 - (-1)^n}{n\pi} \quad (\text{se anula si } n \text{ par}).$$

$$\langle y_n, y_n \rangle = \int_0^1 [\sin^2 n\pi x + n^2 \pi^2 \cos^2 n\pi x - 2n\pi \sin n\pi x \cos n\pi x] \, dx = \frac{1 + n^2 \pi^2}{2}$$

El desarrollo es, pues:  $1 = \frac{2e}{e+1} e^{-x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2[1 - (-1)^n]}{n\pi[1 + n^2 \pi^2]} (\sin n\pi x - n\pi \cos n\pi x)$ .

Para cada  $x \in (0, 1)$  la suma de los infinitos términos de la serie debe ser 1.

Maple muestra que la convergencia es buena (incluso en los extremos). El dibujo es sólo la suma del término con la exponencial y de los dos primeros trigonométricos no nulos ( $n=1$  y  $n=3$ ).



La teoría de series de Fourier se puede extender para incluir los problemas periódicos. Así para:

$$(P_p) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(-L) = y(L), y'(-L) = y'(L) \end{cases}, \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, n=0, 1, \dots, y_0 = \{1\}, y_n = \left\{ \cos \frac{n\pi x}{L}, \sin \frac{n\pi x}{L} \right\}$$

se deduce la siguiente **serie de Fourier en senos y cosenos** en  $[-L, L]$ :

$$[p] \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right], \text{ con coeficientes:}$$

$$[1] \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, n=0, 1, 2, \dots \quad \text{y} \quad [2] \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, n=1, 2, \dots,$$

ya que se cumple:  $\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = 0$  para todo  $m$  y  $n$ ;  $\int_{-L}^L 1^2 dx = 2L$ ;

$$\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ L & m = n \end{cases}; \quad \int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ L & m = n \end{cases}.$$

[Las fórmulas [1] y [2] también valen para desarrollar una  $f$  definida inicialmente en cualquier otro intervalo  $[a, a+2L]$  (cambiando los límites a la integral) pues  $\int_a^{a+2L} \cos^2 = \int_a^{a+2L} \sin^2 = L$ ].

La serie [p] también converge hacia  $f(x)$  en los puntos de continuidad. Y además se puede decir qué sucede en los extremos  $-L$  y  $L$  (por definir una función  $2L$ -periódica en todo  $\mathbf{R}$ ):

**Teor 2.**

Supongamos que  $f$  es  $C^1$  a trozos en  $[-L, L]$  y extendamos  $f$  fuera de  $[-L, L]$  de forma  $2L$ -periódica. Entonces la serie [p] con  $a_n$  y  $b_n$  dados por [1] y [2] converge hacia  $f(x)$  en todos los puntos en que su extensión es continua (y en los puntos de discontinuidad converge hacia  $\frac{1}{2} [f(x^-) + f(x^+)]$ ).

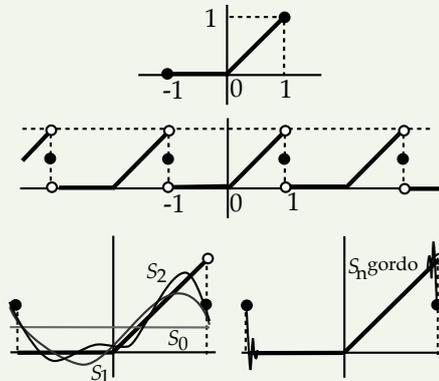
Las fórmulas [s] y [c] para los coeficientes de las series en senos y en cosenos se pueden ver como casos particulares de [1] y [2]. Si una  $f$  es **impar** en  $[-L, L]$ , es impar  $f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}$  y es par  $f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}$ . Si  $f$  es **par**,  $f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}$  es par y  $f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}$  es impar. Por tanto,  $a_n=0$  y [1] se convierte en [s] en el primero, y en el segundo  $b_n=0$  y [2] pasa a ser [c].

**Ej 6.** Sea  $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ .

Su serie en senos y cosenos está casi calculada en el Ej 1:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos n\pi x - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin n\pi x.$$

Viendo su extensión  $2\pi$ -periódica, deducimos que la suma de esta serie será 0 en  $(-1, 0)$  y  $x$  en  $(0, 1)$  (valores de la  $f$  inicial), pero sumará  $1/2$  (valor medio entre 0 y 1) en  $-1$  y  $1$ . Cerca de estos dos puntos de discontinuidad la convergencia volverá a ser mala y lenta como en todos los casos, y volverá a darse el fenómeno de Gibbs.



## 4. Ecuaciones en derivadas parciales

### 4.1. EDPs lineales de primer orden

Sea la EDP de primer orden: [E]  $A(x, y) u_y + B(x, y) u_x = H(x, y) u + F(x, y)$ ,  $u = u(x, y)$ .

Para resolverla usaremos la EDO de primer orden [e]  $\frac{dy}{dx} = \frac{A(x, y)}{B(x, y)}$  **ecuación característica**

Si  $A, B \in C^1$  y no son 0 a la vez en una región del plano, [e] tendrá en ella unas curvas integrales:

$$\xi(x, y) = K \quad \text{curvas características de [E]}$$

Por la regla de la cadena, el **cambio de variable**  $\begin{cases} \xi = \xi(x, y) \\ \eta = y \end{cases}$  (o bien  $\eta = x$ ), convierte [E] en:

$$\begin{cases} u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \\ u_x = u_\xi \xi_x \end{cases} \rightarrow Au_\eta + [A\xi_y + B\xi_x]u_\xi = Hu + F$$

Como sobre las soluciones  $y(x)$  definidas por  $\xi(x, y) = K$  es  $\xi_x + \xi_y \frac{dy}{dx} = \frac{1}{B} [A\xi_y + B\xi_x] = 0$ , vemos que [1] pasa a ser una ecuación en las nuevas variables  $(\xi, \eta)$  en la que no aparece  $u_\xi$ :

$$[E^*] \quad A(\xi, \eta) u_\eta = H(\xi, \eta) u + F(\xi, \eta), \quad u = u(\xi, \eta).$$

Análogamente, si hubiésemos escogido  $\eta = x$  habríamos llegado a: [E\*]  $Bu_\eta = Hu + F$ .

(Se observa que tras el cambio queda el término con la variable elegida).

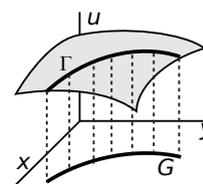
[E\*] (o [E\*<sub>2</sub>]) es una EDO lineal de primer orden en la variable  $\eta$  si miramos la  $\xi$  como constante y, por tanto, es resoluble (si  $F=0$  sería homogénea y si  $H=0$  bastaría integrar). En su solución aparecerá una constante arbitraria para cada  $\xi$ , es decir, una función arbitraria de  $\xi$ :

$$u(\xi, \eta) = p(\xi) e^{\int \frac{H}{A} d\eta} + e^{\int \frac{H}{A} d\eta} \int \frac{F}{A} e^{-\int \frac{H}{A} d\eta} d\eta, \quad \text{con } p \text{ arbitraria de } C^1.$$

Deshaciendo el cambio queda resuelta [E] en función de  $x$  e  $y$ . En la solución general, como se ve, siempre aparece una función arbitraria de las características.

¿Cómo determinar una **única solución** de [E]?, es decir, ¿cómo precisar la  $p$  arbitraria? Cada solución describe una superficie en el espacio. Generalizando los problemas con datos iniciales para EDOs definimos:

El **problema de Cauchy** para [E] consiste en hallar la solución  $u(x, y)$  que tome valores dados sobre una curva  $G$  del plano  $xy$ , es decir, que contenga una curva dada  $\Gamma$  del espacio. En particular, si  $G$  es una recta  $x = cte$  ó  $y = cte$  [por ejemplo, si se pide  $u(x, 0) = f(x)$ ], se tiene lo que se llama un **problema de valores iniciales**.



**Ej 1.**  $\begin{cases} (y-1)u_y - xu_x = 2x^2y \\ u(x, 0) = 0 \end{cases}$  La ecuación característica  $\frac{dy}{dx} = \frac{y-1}{-x}$  se puede mirar como lineal:  
 $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} + \frac{1}{x}$ .  $e^{-\int 1/x} = \frac{1}{x}$ ,  $y = \frac{C}{x} + \frac{1}{x} \int \frac{x}{x} dx = \frac{C}{x} + 1$  (o  $y_p = 1$  a ojo).  
 O separable:  $\int \frac{dy}{y-1} = \int \frac{dx}{-x}$ ,  $\ln(y-1) = C - \ln x$ ,  $y-1 = Ce^{-\ln x} = \frac{C}{x} \rightarrow xy - x = C$  **características**.  
 Más cortos resultan los cálculos haciendo:  
 $\begin{cases} \xi = x(y-1) \\ \eta = x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_y = x u_\xi \\ u_x = (y-1)u_\xi + u_\eta \end{cases} \rightarrow -xu_\eta = 2x^2y, \quad u_\eta = -2xy = -2\eta(\frac{\xi}{\eta} + 1) = -2\xi - 2\eta$ .  
 Integrando:  $u(\xi, \eta) = -2\xi\eta - \eta^2 + p(\xi)$ . La **solución general** es, pues:  $u(x, y) = x^2 - 2x^2y + p(xy - x)$ .  
 [Peor:  $\begin{cases} \xi = x(y-1) \\ \eta = y \end{cases}$ ,  $\begin{cases} u_y = x u_\xi + u_\eta \\ u_x = (y-1)u_\xi \end{cases} \rightarrow (y-1)u_\eta = 2x^2y, \quad u_\eta = \xi^2 \frac{2\eta}{(\eta-1)^3}, \quad u = -\xi^2 \left[ \frac{1}{(\eta-1)^2} + \frac{2}{\eta-1} \right] + p(\xi)$ .  
 [Aunque en hemos visto qué ecuaciones quedaban eligiendo  $\eta = x$  ó  $y$  conviene hacer el cambio, usando la regla de la cadena, para detectar posibles errores en la características].  
 Imponemos el **dato inicial**:  $u(x, 0) = x^2 + p(-x) = 0$ ,  $p(-x) = -x^2$ . Para precisar la  $p$  llamamos  $-x = v \rightarrow x = -v \rightarrow p(v) = -v^2 \rightarrow u(x, y) = x^2 - 2x^2y - x^2y^2 + 2x^2y - x^2 = -x^2y^2$ .

**Ej 2.**  $\begin{cases} u_y + 2u_x = u - x + 2y \\ u(x, x) = 1 - x \end{cases}$   $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$ ,  $2y = x + C$ .  $x - 2y = C$  características [o  $2y - x = C$ , o  $y - \frac{x}{2} = C$ , todas pueden valer].

$\begin{cases} \xi = x - 2y \\ \eta = y \end{cases}$ ,  $\begin{cases} u_y = -2u_\xi + u_\eta \\ u_x = u_\xi \end{cases}$ ,  $u_\eta = u - \xi \rightarrow u = p(\xi) e^\eta + \xi$ .  $u(x, y) = p(x - 2y) e^y + x - 2y$  solución general  
 $u_p$  a ojo

O bien:  $\begin{cases} \xi = x - 2y \\ \eta = x \end{cases}$ ,  $\begin{cases} u_y = -2u_\xi \\ u_x = u_\xi + u_\eta \end{cases}$ ,  $u_\eta = \frac{u - \xi}{2} \rightarrow u = q(\xi) e^{\eta/2} + \xi = q(x - 2y) e^{x/2} + x - 2y$ , casi como antes.

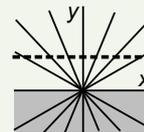
Imponiendo el dato:  $u(x, x) = p(-x) e^x - x = 1 - x$ ,  $p(-x) = e^{-x}$ ,  $p(v) = e^v \rightarrow$

$u(x, y) = e^{x-2y} e^y + x - 2y = e^{x-y} + x - 2y$  (parecido con la  $q$ ).

Comprobando:  $u(x, x) = 1 + x - 2x$ .  $u_y = -e^{x-y} - 2$ ,  $u_x = e^{x-y} + 1$ ,  $e^{x-y} = e^{x-y} + x - 2y - x + 2y$ .



**Ej 3.**  $\begin{cases} yu_y + xu_x = 2u \\ u(x, 1) = x^3 \end{cases}$   $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$  lineal  $\rightarrow y = Cx \rightarrow \begin{cases} \xi = y/x \\ \eta = y \end{cases} \rightarrow \eta u_\eta = 2u$  (lineal homogénea)  
 $\rightarrow u = p(\xi) \eta^2 = p(\frac{y}{x}) y^2$ ,  $u(x, 1) = p(\frac{1}{x}) = x^3$ ,  $p(v) = \frac{1}{v^3}$ ;  $u = \frac{x^3}{y}$ .  
[La solución es única, pero, como se ve, no llega más allá de  $y=0$ ].



No siempre los datos de Cauchy (como los anteriores) determinan una sola solución de la ecuación.

**Ej 4.**  $\begin{cases} y^2 u_y + u_x = 2xu \\ \frac{dy}{dx} = y^2 \end{cases}$  (separable),  $\frac{1}{y} = K - x \rightarrow x + \frac{1}{y} = K$  características.

$\begin{cases} \xi = x + \frac{1}{y} \\ \eta = x \end{cases}$  [mejor]  $\rightarrow u_\eta = 2xu = 2\eta u \rightarrow u = p(\xi) e^{\eta^2} = p(x + \frac{1}{y}) e^{x^2}$ ,  $p \in C^1$ .

$\begin{cases} \xi = x + \frac{1}{y} \\ \eta = y \end{cases}$  [peor]  $\rightarrow y^2 u_\eta = 2xu \xrightarrow{x = \xi - \frac{1}{\eta}} u_\eta = (\frac{2\xi}{\eta^2} - \frac{2}{\eta^3}) u \rightarrow u = q(\xi) e^{\frac{1}{\eta^2} - \frac{2\xi}{\eta}} = q(x + \frac{1}{y}) e^{-\frac{1}{y^2} - \frac{2x}{y}}$ .

[Aunque no lo parezca, las expresiones con  $p$  y  $q$  definen la misma solución general].

Impongamos ahora diferentes datos de Cauchy a la ecuación y veamos lo que resulta:

$u(x, 1) = 1 \rightarrow p(x+1) e^{x^2} = 1 \xrightarrow{x+1=v} p(v) = e^{-(v-1)^2} \rightarrow u = e^{x^2 - (x + \frac{1}{y} - 1)^2} = e^{2x - \frac{2x}{y} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{y^2} - 1}$ .

O bien,  $q(x+1) e^{-1-2x} = 1 \xrightarrow{x+1=v} q(v) = e^{2v-1}$  ↗

Estos cálculos han determinado de forma **única** la solución del problema de valores iniciales.

$u(0, y) = y \rightarrow p(\frac{1}{y}) = y \xrightarrow{1/y=v} p(v) = \frac{1}{v} \rightarrow u = \frac{y}{1+xy} e^{x^2}$ , que también parece ser **única**.

$u(x, -\frac{1}{x}) = 0$  y  $u(x, -\frac{1}{x}) = 1$ . Ahora estamos imponiendo datos sobre una característica.

Para el primero:  $p(0) e^{x^2} = 0$ . Lo cumple toda  $p \in C^1$  con  $p(0) = 0$ . **Infinitas soluciones**.

Para el segundo:  $p(0) e^{x^2} = 1$ ,  $p(0) = e^{-x^2}$ . Imposible. **No tiene solución**.

**Datos sobre características dan lugar siempre a 0 o  $\infty$  soluciones** [ se acaba en  $p(\text{cte}) = \text{algo}$ , que puede ser constante o no ].

**Ej 5.**  $\begin{cases} 2xu_y - u_x = 4xy \\ \frac{dy}{dx} = -2x \end{cases} \rightarrow y + x^2 = K$  características.

$\begin{cases} \xi = y + x^2 \\ \eta = y \end{cases} \rightarrow 2xu_\eta = 4xy$ ,  $u_\eta = 2\eta \rightarrow u = p(\xi) + \eta^2 = p(y + x^2) + y^2$ .

$\begin{cases} \xi = y + x^2 \\ \eta = x \end{cases} \rightarrow -u_\eta = 4xy \xrightarrow{y = \xi - \eta^2} -u_\eta = 4\xi\eta - 4\eta^3 \rightarrow u = q(\xi) + \eta^4 - 2\xi\eta^2 = q(y + x^2) - 2yx^2 - x^4$ .

Imponemos como en el ejemplo anterior varios datos de Cauchy y analizamos la unicidad:

$u(1, y) = 0 \rightarrow p(y+1) + y^2 = 0$ ,  $p(v) = -(v-1)^2 \rightarrow u = 2y + 2x^2 - 2yx^2 - x^4 - 1$ .  
 $q(y+1) - 2y - 1 = 0$ ,  $q(v) = 2v - 1$

[Solución **única**,  $p$  ó  $q$  fijadas  $\forall v$ .  $x=1$  no es tangente a las características].

$u(x, -x^2) = 0 \rightarrow p(0) + x^4 = 0$ . Imposible, **no hay solución**. Dato sobre característica, como:

$u(x, -x^2) = x^4 \rightarrow p(0) = 0$ . Cada  $p \in C^1$  con  $p(0) = 0$  da una solución diferente: hay **infinitas**.



En general, no sólo hay problemas de unicidad si se imponen datos sobre característica, sino también cuando hay tangencia entre la curva  $G$  y las características. De hecho se prueba que **si  $G$  no es tangente en ningún punto a las características hay solución única del problema**.

## 4.2. Orden 2. Clasificación y problemas clásicos

### Clasificación, formas canónicas y soluciones

Consideremos [E]  $L[u] \equiv \boxed{A u_{yy} + B u_{xy} + C u_{xx} + D u_y + E u_x + H u = F(x, y)}$ .

Nos limitamos en estas notas al caso de que  $A, B, \dots, H$  sean constantes ( $A, B$  y  $C$  no todas nulas). Como en las de primer orden, quizás un **cambio de variable** bien elegido haga desaparecer términos de [E], de forma que resulte una ecuación resoluble elementalmente. Hagamos un cambio genérico y analicemos la expresión de [E] en función de las nuevas variables:

$\begin{cases} \xi = px+qy \\ \eta = rx+sy \end{cases}$ , con  $p, q, r, s$  constantes y jacobiano  $J = ps - qr \neq 0$ . Entonces:

$$\begin{aligned} u_{yy} &= q^2 u_{\xi\xi} + 2qsu_{\xi\eta} + s^2 u_{\eta\eta} \\ u_y &= qu_{\xi} + su_{\eta} \\ u_{xy} &= pqu_{\xi\xi} + (ps+qr)u_{\xi\eta} + rsu_{\eta\eta} \rightarrow \\ u_x &= pu_{\xi} + ru_{\eta} \\ u_{xx} &= p^2 u_{\xi\xi} + 2pru_{\xi\eta} + r^2 u_{\eta\eta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &[q^2 A + pqB + p^2 C] u_{\xi\xi} + [2qsA + (ps+qr)B + 2prC] u_{\xi\eta} + [s^2 A + rsB + r^2 C] u_{\eta\eta} + \dots \\ &= A^* u_{\xi\xi} + B^* u_{\xi\eta} + C^* u_{\eta\eta} + \dots = F(\xi, \eta) \quad [\text{los puntos son los términos en } u_{\xi}, u_{\eta} \text{ y } u]. \end{aligned}$$

Intentemos hacer  $A^* = C^* = 0$  eligiendo  $p, q, r, s$  adecuados. Para ello debe ser:  $\begin{cases} q^2 A + pqB + p^2 C = 0 \\ s^2 A + rsB + r^2 C = 0 \end{cases}$ .

Si  $B^2 - 4AC > 0$  y  $A \neq 0$  podemos elegir  $p=r=1$  y  $q, s = \frac{1}{2A} [-B \mp \sqrt{B^2 - 4AC}]$ .

[Si  $A=0$  y  $C \neq 0$  tomamos  $q=1, p=0$  y  $s=1, r=-\frac{B}{C}$ ;  $A=C=0$  es caso trivial].

Si  $B^2 - 4AC = 0$ ,  $q$  y  $s$  coinciden y sería  $J=0$ . Y si es  $< 0$ ,  $q$  y  $s$  serían complejas.

Además, es fácil verificar que  $(B^*)^2 - 4A^*C^* = [B^2 - 4AC] J^2$  y, por tanto, el signo de  $B^2 - 4AC$  no varía con cambios de coordenadas. Todo lo anterior nos lleva a definir:

$\begin{aligned} &> 0 \\ \text{Si } B^2 - 4AC &= 0 \\ &< 0 \end{aligned}$	se dice, respectivamente, que la EDP [E] es	<b>hiperbólica</b> <b>parabólica</b> <b>elíptica</b>
---	---	--

Encontremos la forma más sencilla en que podemos escribir [E] (su **forma canónica**) en cada caso. Si es **hiperbólica**, arriba hemos visto que se convierte con el cambio

$$\begin{cases} \xi = x - \frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} y \\ \eta = x - \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} y \end{cases} \text{ en } B^* u_{\xi\eta} + \dots = F. \text{ Como } (B^*)^2 > 0, \text{ podemos escribir la}$$

**forma canónica de las hiperbólicas:**  $\boxed{u_{\xi\eta} + \dots = F^*(\xi, \eta)}$ .

A las dos familias de rectas  $\xi = K, \eta = K$  se les llama **características** de [E].

Si [E] es **parabólica**, sólo tenemos  $\xi = x - \frac{B}{2A} = K$  [una familia de características]. Para esta  $\xi$  es  $A^* = 0$ , y como  $(B^*)^2 - 4A^*C^* = 0$  también es  $B^* = 0$ . Como  $\eta$  se suele tomar  $\eta = y$ . Así haciendo

$$\begin{cases} \xi = x - \frac{B}{2A} y \\ \eta = y \end{cases} \text{ y dividiendo por } C^* \text{ se obtiene la}$$

**forma canónica de las parabólicas:**  $\boxed{u_{\eta\eta} + \dots = F^*(\xi, \eta)}$ .

Si es **elíptica**, las  $\xi, \eta$  son rectas complejas:  $\frac{2Ax - By}{2A} \pm i \frac{\sqrt{4AC - B^2}}{2A}$  y (no hay características reales). Pero no es difícil comprobar que el cambio:

$$\begin{cases} \xi = \frac{2Ax - By}{\sqrt{4AC - B^2}} \\ \eta = y \end{cases} \text{ lleva [E] a la}$$

**forma canónica de las elípticas:**  $\boxed{u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \dots = F^*(\xi, \eta)}$ .

[Si  $A, B$  y  $C$  son no constantes y es  $B(x, y)^2 - 4A(x, y)C(x, y) >, =, < 0$  en cada  $(x, y)$  de una región  $\Omega$  del plano se dice, respectivamente, que la EDP [E] es **hiperbólica, parabólica o elíptica** en  $\Omega$ . Las características en este caso general son soluciones de EDOs de primer orden (quizás no resolubles)].

**Ej 1.**  $u_{yy} - 4u_{xy} + 5u_{xx} + u = 0 \rightarrow B^2 - 4AC = -4 < 0$ , elíptica. Con el cambio de la página anterior:

$$\begin{cases} \xi = x+2y \\ \eta = y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_y = 2u_\xi + u_\eta \\ u_x = u_\xi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_{yy} = 4u_{\xi\xi} + 4u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \\ u_{xy} = 2u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta} \\ u_{xx} = u_{\xi\xi} \end{cases}$$

Llevándolo a la ecuación se llega a la forma canónica:  $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + u = 0$ .

**Ej 2.**  $4u_{yy} - 4u_{xy} + u_{xx} = 0 \rightarrow B^2 - 4AC = 0 \rightarrow$  parabólica en todo  $\mathbf{R}^2$ .

El cambio en este caso sería  $\xi = x + \frac{y}{2}$ , o mejor (son las mismas características):

$$\begin{cases} \xi = 2x+y \\ \eta = y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_y = u_\xi + u_\eta \\ u_x = 2u_\xi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \\ u_{xy} = 2u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} \\ u_{xx} = 4u_{\xi\xi} \end{cases} \rightarrow 4u_{\eta\eta} = 0, \quad u_{\eta\eta} = 0.$$

Esta forma canónica tan sencilla se resuelve fácilmente:  $u_\eta = p(\xi) \rightarrow u = \eta p(\xi) + q(\xi)$ .

Por tanto, la **solución general** de la ecuación es:

$$u(x, y) = y p(2x+y) + q(2x+y), \text{ con } p \text{ y } q \text{ funciones } C^2 \text{ arbitrarias.}$$

Como en este caso, a veces es posible hallar elementalmente la **solución general** de [E] tras ponerla en forma canónica (en la mayoría, como en el ejemplo 1, será imposible). Identifiquemos las **formas canónicas resolubles**:

**Si sólo hay derivadas respecto a una de las variables:**  $u_{\eta\eta} + E^*u_\eta + H^*u = F^*$ .

Esta lineal de orden 2, ordinaria si la vemos como función de  $\eta$ , se integra viendo la  $\xi$  como un parámetro. Un par de constantes para cada  $\xi$  dan lugar a dos funciones arbitrarias de  $\xi$  en la solución. La ecuación, como vemos, debe ser parabólica.

**Si sólo aparece  $u_{\xi\eta}$  y una derivada primera:**  $u_{\xi\eta} + D^*u_\xi = F^*$  o  $u_{\xi\eta} + E^*u_\eta = F^*$ .

La primera se resuelve haciendo  $u_\xi = v$ : la lineal de primer orden  $v_\eta + D^*v = F^*$  se resuelve viendo  $\xi$  como parámetro. La  $v$  contiene, pues, una función arbitraria de  $\xi$ . Al integrarla para hallar la  $u$  aparece otra función arbitraria (de  $\eta$ ). Las cosas son análogas cuando en vez de la  $u_\xi$  aparece la  $u_\eta$ . La ecuación es hiperbólica.

[En las EDOs de segundo orden aparecen dos constantes arbitrarias; aquí hay, en los dos casos, dos funciones arbitrarias (evaluadas en las características como en las EDPs de primer orden)].

[También se ve que, al aparecer dos funciones arbitrarias, para aislar una única solución de la ecuación se deberán imponer dos funciones dato. En la página siguiente se presentará el problema de Cauchy para las EDPs de segundo orden].

[Otras pocas EDPs más pueden llevarse a estas formas resolubles haciendo cambios del tipo  $u = e^{py} e^{qx} w$  que hacen desaparecer alguna derivada de menor orden o el término con la  $u$ ].

[Ni la ecuación del calor  $u_t - u_{xx}$  ni ninguna elíptica son resolubles por este camino].

**Ej 3.**  $u_{yy} + 5u_{xy} + 4u_{xx} + 3u_y + 3u_x = 9 \rightarrow B^2 - 4AC = 9$ , hiperbólica.

$$\frac{B \mp \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{1}{4} \rightarrow \begin{cases} \xi = x-y \\ \eta = x-4y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_y = -u_\xi - 4u_\eta \\ u_x = u_\xi + u_\eta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_{yy} = u_{\xi\xi} + 8u_{\xi\eta} + 16u_{\eta\eta} \\ u_{xy} = -u_{\xi\xi} - 5u_{\xi\eta} - 4u_{\eta\eta} \\ u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \end{cases}$$

Sustituyendo en la EDP se llega a:  $u_{\xi\eta} + u_\eta = -1$ , del segundo de los tipos citados. Para resolverla:

$$u_\eta = v \rightarrow v_\xi = -v - 1 \rightarrow v = p^*(\eta) e^{-\xi} - 1 \rightarrow u(\xi, \eta) = p(\eta) e^{-\xi} + q(\xi) - \eta$$

La solución general es, pues:  $u(x, y) = p(x-4y) e^{y-x} + q(x-y) + 4y - x$ , con  $p, q$  arbitrarias.

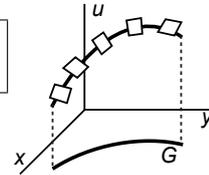
[La ecuación similar  $u_{yy} + 5u_{xy} + 4u_{xx} + 3u_x = 9 \rightarrow u_{\xi\eta} - \frac{1}{3}u_\eta - \frac{1}{3}u_\xi = -1$ , no es resoluble].

## Unicidad de los problemas clásicos

¿Qué datos adicionales se piden a la EDP lineal [E]  $L[u] = F$  de orden 2 para aislar una única solución? Para una EDO de orden 2 se fijaba el valor de la solución y de su derivada en el instante inicial. En una EDP de primer orden se daban los valores de  $u$  en toda una curva  $G$  (no tangente a las características). Cuando [E] era resoluble aparecían dos funciones arbitrarias en la solución. Todo lleva a plantear el

**Problema de Cauchy** para [E]: hallar la solución que tome unos valores dados de  $u$  y la derivada  $u_n$  en la dirección del vector normal sobre una curva  $G$  del plano  $xy$ .

[Geoméricamente: hallar la superficie solución que contenga una curva dada y tenga en cada punto de ella unos planos tangentes también dados. La derivada normal  $u_n$  será casi siempre una derivada parcial:  $u_x$  o  $u_y$ ].



En particular, al tomar como  $G$  el eje  $x$  se tiene el **problema de valores iniciales** que consiste en hallar la solución de [E] que cumple  $u(x, 0) = f(x)$ ,  $u_y(x, 0) = g(x)$ . Como en las de primer orden se prueba que:

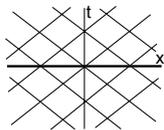
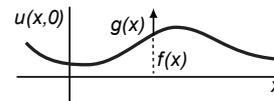
**Teor 1.** Si los datos  $f$  y  $g$  son derivables y el eje  $x$  no es una recta característica de la EDP, el problema de valores iniciales tiene solución única.

¿Es el problema de Cauchy adecuado a toda EDP de orden 2? No, no lo es. En los problemas reales surgen condiciones mucho más variadas: en unos casos condiciones iniciales y de contorno a la vez, en otros sólo de contorno... Además los datos de Cauchy tienen malas propiedades para algunas EDPs. Por ejemplo, para Laplace (sin características reales) un problema de valores iniciales tiene solución única pero puede no tener 'dependencia continua' (variando poco los datos, varían mucho las soluciones). Conozcamos los principales problemas asociados a las **ecuaciones clásicas** en dos variables [en más variables las cosas son análogas]. Sólo (P<sub>1</sub>) será de Cauchy. Para cada uno habría que probar (y esto es muy complicando, en general) que tiene solución única y dependencia continua (se dice entonces que el problema está 'bien planteado').

**Ondas.** La ecuación de ondas es la única de las clásicas resoluble a partir de su forma canónica. Para la **cuerda infinita** sí es un problema bien planteado este problema de Cauchy:

**problema puro de valores iniciales:**

$$(P_1) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t), & x, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), & u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$$



(tiene sentido real cuando  $t$  es pequeño y estamos lejos de los extremos).

$$B^2 - 4AC = 4c^2, \text{ hipérbolica. Características } x \pm ct = K \text{ (página 43).}$$

El teorema 1 nos dice que hay solución única y se puede probar la dependencia continua.

La resolvemos para  $F \equiv 0$ :  $\begin{cases} \xi = x+ct \\ \eta = x-ct \end{cases}$ ,  $\begin{cases} u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \\ u_{tt} = c^2[u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}] \end{cases}$ ,  $-4c^2 u_{\xi\eta} = 0$ ,  $u_{\xi\eta} = 0$  forma canónica  $\rightarrow$

$u_{\xi} = p^*(\xi) \rightarrow u = p(\xi) + q(\eta)$ . La **solución general de la ecuación de ondas homogénea** es:

$$u(x, t) = p(x+ct) + q(x-ct), \text{ con } p \text{ y } q \text{ funciones arbitrarias de } C^2.$$

Imponiendo los datos:  $\begin{cases} p(x) + q(x) = f(x) \\ cp'(x) - cq'(x) = g(x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} p'(x) + q'(x) = f'(x) \\ p'(x) - q'(x) = \frac{1}{c}g(x) \end{cases}$   $p'$  y  $q'$  son las mismas derivadas ordinarias en ambas expresiones.

$$\rightarrow 2p'(x) = f'(x) + \frac{1}{c}g(x), \quad p(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds + k, \quad q(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds - k \rightarrow$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds \quad \text{fórmula de D'Alembert}$$

Para la **cuerda finita** se ve que tiene solución única

$$(P_2) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t), & x \in [0, L], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), & u_t(x, 0) = g(x) \\ u(0, t) = h_0(t), & u(L, t) = h_L(t) \end{cases}$$

Sus extremos se mueven verticalmente según  $h_0(t)$  y  $h_L(t)$  dadas [un caso particular importante es que estén fijos  $u(0, t) = u(L, t) = 0$ ]. Como **siempre que hay extremos**, aparecen **condiciones de contorno** adicionales y el camino habitual para resolverlos será la **separación de variables**.

**Calor.** Para la **varilla infinita** el problema adecuado es:

$$(P_3) \begin{cases} u_t - ku_{xx} = F(x, t), & x \in \mathbf{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & u \text{ acotada} \end{cases}$$

Se prueba que está bien planteado. Basta un solo dato, la distribución inicial de temperaturas  $f(x)$ , para fijar las posteriores [ $t=0$  es característica y  $(P_3)$  no es problema de valores iniciales típico]. Para resolverlo se necesita la transformada de Fourier de la última sección adicional 5.4.

Para la **varilla acotada** hay varias condiciones de contorno, con diferentes significados físicos. Si los extremos toman a lo largo del tiempo las **temperaturas dadas**  $h_0(t)$  y  $h_L(t)$  se tiene:

$$(P_4) \begin{cases} u_t - ku_{xx} = F(x, t), & x \in (0, L), t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & u(0, t) = h_0(t), u(L, t) = h_L(t) \end{cases}$$

Si lo que fijamos es el **flujo de calor** en los extremos obtenemos:

$$(P_5) \begin{cases} u_t - ku_{xx} = F(x, t), & x \in (0, L), t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & u_x(0, t) = h_0(t), u_x(L, t) = h_L(t) \end{cases}$$

[En particular, si  $h_0(t) = h_L(t) = 0$ , los extremos están **aislados**].

Combinando  $u$  y  $u_x$  se expresa la **radiación libre** de calor hacia un medio a temperatura dada:

$$u(0, t) - au_x(0, t) = h_0(t) \quad \text{ó} \quad u(L, t) + bu_x(L, t) = h_L(t), \quad \text{con } a, b > 0$$

[Si el extremo  $x=L$  está más (menos) caliente que  $h_L$  irradia (chupa) calor pues  $u_x = (h_L - u)/b < 0$  ( $> 0$ ) y el calor viaja en sentido opuesto al gradiente de las temperaturas; igual en el otro extremo].

$(P_4)$  ó  $(P_5)$  (y los otros 7 problemas que aparecen combinando los 3 tipos de condiciones) están bien planteados. Probemos la **unicidad**. Si  $u_1$  y  $u_2$  son soluciones,  $u = u_1 - u_2$  cumple el problema con  $F = f = h_0 = h_L = 0$ . Nuestro objetivo es deducir que  $u \equiv 0$ . Multiplicando la ecuación por  $u$  e integrando en  $x$  entre 0 y  $L$ :

$$\int_0^L uu_t dx - k \int_0^L uu_{xx} dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L u^2 dx - k [uu_x]_{(0,t)}^{(L,t)} + k \int_0^L u_x^2 dx = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_0^L [u(x, t)]^2 dx \leq 0$$

[si  $u=0$  ó  $u_x=0$  en los extremos la implicación es clara; es también fácil verlo si  $u - au_x = 0, a > 0$  ó si  $u + bu_x = 0, b > 0$ ; no se puede probar la unicidad si  $a < 0$  ó  $b < 0$  (físicamente inadmisibles)].

La última integral es una función  $U(t)$  no creciente ( $U' \leq 0$ ), que cumple  $U(0) = 0$  (pues  $u(x, 0) = 0$ ) y es  $U(t) \geq 0$  (integrando positivo). De las tres cosas se sigue que  $U(t) \equiv 0 \Rightarrow u \equiv 0, u_1 \equiv u_2$ . Unicidad.

**Laplace.** Los problemas son de contorno. Los dos más importantes son:

<b>Problema de Dirichlet:</b>	$(P_D) \begin{cases} \Delta u = F \text{ en } D \\ u = f \text{ en } \partial D \end{cases}$	<b>Problema de Neumann:</b>	$(P_N) \begin{cases} \Delta u = F \text{ en } D \\ u_n = f \text{ en } \partial D \end{cases}$
-------------------------------	--	-----------------------------	--



con  $D$  abierto acotado y  $u_n$  derivada según el vector normal unitario exterior  $\mathbf{n}$ .

Si la ecuación está describiendo una distribución estacionaria de temperaturas en una placa, en  $(P_D)$  fijamos la temperatura en el borde y en  $(P_N)$  el flujo de calor en dirección normal al borde.

Si  $F$  y  $f$  son regulares y  $\partial D$  es  $C^1$  a trozos, **el  $(P_D)$  es un problema bien planteado.**

Probemos su unicidad mediante una fórmula que generaliza la integración por partes a  $\mathbf{R}^2$ :

**Fórmula de Green**    Sea  $u \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ . Entonces  $\iint_D u \Delta u \, dx dy = \oint_{\partial D} u u_n \, ds - \iint_D \|\nabla u\|^2 \, dx dy$

[Identidad  $u \Delta u = \text{div}[u \nabla u] - \|\nabla u\|^2$  y teorema de la divergencia  $\iint_D \text{div } \mathbf{f} \, dx dy = \oint_{\partial D} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, ds$ ].

$u_1, u_2$  soluciones de  $(P_D)$ .  $u = u_1 - u_2$  cumple el problema con  $F = f = 0$ . Por la fórmula de Green:

$$\iint_D \|\nabla u\|^2 \, dx dy = 0 \Rightarrow \nabla u = \mathbf{0} \Rightarrow u = \text{cte} \Rightarrow u \equiv 0 \text{ (pues } u=0 \text{ en } \partial D \text{)}.$$

**Para que  $(P_N)$  pueda tener solución es necesario que  $F$  y  $f$  satisfagan la relación:**

$$\iint_D F \, dx dy = \oint_{\partial D} f \, ds$$

[basta aplicar el teorema de la divergencia a  $\nabla u$  para verlo],

**y si el problema de Neumann  $(P_N)$  tiene solución, esta contiene una constante arbitraria.**

Ecuación y condición de contorno sólo contienen derivadas. En la prueba de la unicidad, podemos dar todos los pasos excepto la última implicación. Se dice que  $(P_N)$  'tiene unicidad salvo constante'.

Además se imponen a Laplace condiciones del tipo  $u + au_n = f, a > 0$ , y hay problemas mixtos con condiciones tipo Dirichlet en partes de  $\partial D$ , en otras tipo Neumann... (todos con solución única).

### 4.3. Separación de variables. Ecuación del calor

Este antiguo método nos permitirá hallar la solución (en forma de **serie de Fourier**) de parte de los problemas clásicos citados en 4.2: los planteados en un **intervalo finito** en una variable. En esta sección resolveremos varios para el calor en **varillas finitas**. En 4.4 y 4.5 veremos los de la cuerda finita y los de Laplace.

Empezamos resolviendo un **problema homogéneo** (lo son ecuación y condiciones de contorno).

$$\text{Sea } \boxed{\begin{array}{l} [P_1] \left\{ \begin{array}{l} u_t - k u_{xx} = 0, \quad x \in (0, L), \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \end{array} \right. \end{array}} \quad \begin{array}{l} [\text{edp}] \\ [\text{ci}] \\ [\text{cc}] \end{array}$$

No hay fuentes de calor externas, los extremos de la varilla se mantienen a 0 grados y suponemos que los datos iniciales vienen dados por una  $f$  que es  $C^1$  a trozos en  $[0, L]$ .

**Busquemos soluciones de la forma**  $u(x, t) = X(x)T(t)$ . Debe ser entonces:

$$XT' - kX''T = 0, \text{ es decir, } \frac{X''}{X} = \frac{T'}{kT} \quad (\text{mejor que } \frac{kX''}{X} = \frac{T'}{T}).$$

Como un miembro es función sólo de  $x$  y el otro de  $t$ , ambos deben ser iguales a una constante:

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{k} \frac{T'}{T} = -\lambda \quad (\text{ponemos } -\lambda \text{ para que nos quede la ecuación habitual}).$$

Así obtenemos una EDO para  $X(x)$  y otra para  $T(t)$ :  $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 & [\text{eX}] \\ T' + \lambda k T = 0 & [\text{eT}] \end{cases}$ .

El producto de una solución de [eX] por una de [eT] es entonces solución de la [edp], para cualquier valor de  $\lambda$ . Pero nos interesan sólo las soluciones que satisfacen las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} u(0, t) = X(0)T(t) = 0 &\Rightarrow X(0) = 0 \quad (\text{si fuese } T(t) \equiv 0 \text{ obtendríamos } u \equiv 0 \rightarrow \\ u(L, t) = X(L)T(t) = 0 &\Rightarrow X(L) = 0 \quad \text{y no se cumpliría la condición inicial}). \end{aligned}$$

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad X_n = \left\{ \sin \frac{n \pi x}{L} \right\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Llevando estos valores de  $\lambda$  a la ecuación [eT] obtenemos:  $T' = -\frac{kn^2 \pi^2}{L^2} T \rightarrow T_n = \left\{ e^{-kn^2 \pi^2 t / L^2} \right\}$ .

Hemos deducido hasta ahora que para cada  $n$  son soluciones de [edp] cumpliendo [cc] las funciones

$$u_n(x, t) = \left\{ e^{-kn^2 \pi^2 t / L^2} \sin \frac{n \pi x}{L} \right\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Una combinación lineal finita de las  $u_n$  también lo hará. Suponemos que también lo hace la serie:

$$\boxed{u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-kn^2 \pi^2 t / L^2} \sin \frac{n \pi x}{L}} \quad [\text{S}]$$

Sólo le falta a [S] cumplir la condición inicial [ci]. Para que lo haga:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n \pi x}{L} = f(x) \Rightarrow \boxed{c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n \pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots} \quad [\text{c}]$$

pues la serie es precisamente la **serie de Fourier en senos** en  $[0, L]$  de  $f$ , conocida desde 3.4.

**La serie [S], con los coeficientes dados por [c], es la solución de [P<sub>1</sub>].**

Observemos que  $u(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \quad \forall x \in [0, L]$  (**la varilla tiende a ponerse a 0 grados**, como era de esperar).

Se debería ver que la convergencia es suficientemente buena (suma infinita de funciones derivables puede ser no derivable). Cuando  $f$  es  $C^1$  a trozos, se puede probar que converge en  $[0, L] \times (0, \infty)$  y que  $u_t$  y  $u_{xx}$  se pueden calcular derivando término a término (y así se satisface la ecuación). En  $x=0$  y  $x=L$  está claro que es  $u=0$ . Y la condición inicial se satisface en este sentido: la  $u(x, t)$  definida por la serie para  $t > 0$  y por  $u(x, 0) = f(x)$  es una función continua salvo en los puntos de  $t=0$  en que la  $f$  es discontinua.

[Aunque  $f$  sea discontinua, se ve que la solución (como ocurre también en la varilla infinita) es  $C^\infty$  para cualquier  $t > 0$ : **las discontinuidades desaparecen instantáneamente**. Esto será muy distinto en la ecuación de ondas: para ella las soluciones heredan los picos y discontinuidades de los datos iniciales].

Si las **condiciones de contorno son no homogéneas, comenzaremos haciéndolas 0 hallando una  $v$  que las satisfaga y realizando un cambio de variable.** Por ejemplo, para:

$$[P_2] \begin{cases} u_t - k u_{xx} = 0, & x \in (0, L), t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & u(0, t) = T_0, u(L, t) = T_L \end{cases}, T_0, T_L \text{ constantes,}$$

una  $v$  que las cumple es  $v(x) = [1 - \frac{x}{L}]T_0 + \frac{x}{L}T_L$ . Haciendo  $w = u - v$ , nuestro problema pasa a ser uno como el [P<sub>1</sub>] del que acabamos de hallar la solución:

$$\begin{cases} w_t - k w_{xx} = 0 \\ w(x, 0) = f(x) - v(x) \\ w(0, t) = w(L, t) = 0 \end{cases} \rightarrow u(x, t) = [1 - \frac{x}{L}]T_0 + \frac{x}{L}T_L + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-kn^2 \pi^2 t / L^2} \text{sen} \frac{n\pi x}{L} = v + w,$$

$$\text{con } c_n = \frac{2}{L} \int_0^L [f(x) - v(x)] \text{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, n = 1, 2, \dots$$

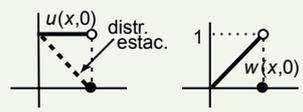
Como  $w \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ ,  $v(x)$  es la **distribución estacionaria** de temperaturas hacia la que tienden las temperaturas en la varilla, independientemente de las condiciones iniciales.

[Si  $T_0$  y  $T_L$  son funciones de  $t$ , la  $v(x, t)$  de arriba sigue cumpliendo las condiciones de contorno, pero la ecuación para  $w$  resulta ser no homogénea, del tipo de las que vamos a resolver ahora].

[Separando variables directamente en [P<sub>2</sub>] se llegaría a  $X(0)T(t) = T_1$  (y otra análoga para  $x = L$ ), expresión de la que no se deduce absolutamente nada y por eso se debe buscar la  $v$ ].

**Ej 1.** 
$$u_t - u_{xx} = 0, x \in (0, 1), t > 0$$
  

$$u(x, 0) = 1, u(0, t) = 1, u(1, t) = 0$$
  $\rightarrow v(x) = 1 - x.$



Operando se llega a 
$$u(x, t) = 1 - x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-n^2 \pi^2 t} \text{sen}(n\pi x).$$

[No importa que para  $t=0$  sea incoherente el dato inicial con el de contorno en  $x=1$ ; la solución será, como dijimos, una función continua para  $t > 0$  y para hallar las integrales el valor en un punto no influye].

Veamos cómo se resuelve el **problema no homogéneo con condiciones de contorno homogéneas** (si estas no lo fuesen empezariamos como en [P<sub>2</sub>] con un cambio  $w = u - v$ ):

$$[P_3] \begin{cases} u_t - k u_{xx} = F(x, t), & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases} \quad [\text{Tomamos } L = \pi \text{ para abreviar las expresiones}].$$

Las **autofunciones del problema homogéneo** [P<sub>1</sub>] eran  $\{\text{sen } nx\}, n = 1, 2, \dots$ . Probamos en [P<sub>3</sub>] la siguiente serie (relacionada con la ecuación) que ya satisface las condiciones de contorno :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \text{sen } nx \quad \text{con las } T_n(t) \text{ funciones a determinar.}$$

[Tomando las  $T_n = c_n e^{-kn^2 t}$  que aparecieron al resolver [P<sub>1</sub>], la  $u$  satisfaría la ecuación con  $F \equiv 0$ .

**Debemos dar más libertad a las  $T_n$**  para conseguir al meter la serie en la ecuación una  $F \neq 0$ ].

**Llevando la serie a la ecuación** (se supone que es derivable término a término) obtenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} [T'_n(t) + kn^2 T_n(t)] \text{sen } nx = F(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \text{sen } nx \Rightarrow \boxed{T'_n + kn^2 T_n = B_n(t)}.$$

$$\text{con } B_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(x, t) \text{sen } nx dx \quad [\text{desarrollo de } F(x, t) \text{ en senos para } t \text{ fijo}].$$

E imponiendo a la serie el **dato inicial** deducimos:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \text{sen } nx = f(x) \Rightarrow \boxed{T_n(0) = c_n}, \text{ con } c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \text{sen } nx dx.$$

Resolviendo la EDO lineal **no homogénea** para  $T_n$  con este dato inicial (mediante la fórmula de las lineales de primer orden o, a veces, por tanteo) hallamos la  $T_n(t)$  y, con ello, la solución de [P<sub>3</sub>].

Otra posibilidad (más larga) de resolver [P<sub>3</sub>] es dividirlo en 2 subproblemas más sencillos, uno con  $F = 0$  (el [P<sub>1</sub>]) y otro con  $f = 0$  que sería como el anterior, pero con las condiciones iniciales  $T_n(0) = 0$ . Por ser ecuación y condiciones adicionales lineales, la solución total sería la suma de las soluciones de ambos. Como se ve, en general, para los problemas no homogéneos hay que hacer dos desarrollos en serie y resolver EDOs no homogéneas (frente al único desarrollo y las EDOs homogéneas de los homogéneos).

Resolvemos ahora el problema **homogéneo** para la varilla con **extremos aislados**:

$$[P_4] \begin{cases} u_t - k u_{xx} = 0, & x \in (0, L), t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0 \end{cases}$$

Separando variables aparecen las mismas EDOs del problema [P<sub>1</sub>] (claro, es la misma EDP). Pero ahora cambian las condiciones de contorno de la  $X$ :

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X'(L) = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, n=0, 1, 2, \dots, X_n = \left\{ \cos \frac{n\pi x}{L} \right\} [X_0 = \{1\}].$$

Para estos valores de  $\lambda$  se tienen las  $T_n = \{e^{-kn^2 \pi^2 t / L^2}\} [T_0 = \{1\}]$ .

Siguiendo los caminos del [P<sub>1</sub>], probamos la serie: 
$$u(x, t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-kn^2 \pi^2 t / L^2} \cos \frac{n\pi x}{L}.$$

Queremos que se satisfaga la condición inicial:  $u(x, 0) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi x}{L} = f(x)$ .

Así que los  $c_n$  desconocidos serán aquí los coeficientes de la serie de Fourier en cosenos de  $f$ :

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, n=0, 1, 2, \dots$$

Observemos que de nuevo la solución se puede interpretar como la suma de una distribución de temperaturas estacionaria [ $c_0/2$ ] y otra transitoria que tiende a 0 cuando  $t \rightarrow \infty$ . Era esperable que toda la varilla (aislada) tendiese a la misma temperatura y que esta fuese el valor medio de las temperaturas iniciales:

$$\frac{c_0}{2} = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx$$

Para resolver un problema **no homogéneo** con estas condiciones en la  $u_x$ , se prueba, como se hace siempre, una serie construida con las **autofunciones del homogéneo** que hemos hallado:

$$u(x, t) = T_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cos \frac{n\pi x}{L},$$

y se resuelven las EDOs que aparecen, con los datos que se deducen del dato inicial de la EDP.

Si las condiciones de contorno fueran  $u_x(0, t) = F_0(t)$ ,  $u_x(L, t) = F_L(t)$  (flujo dado en los extremos), no se puede encontrar (en general) una  $v(x, t)$  que sea una recta (se pueden probar parábolas) y, al hacer  $w = u - v$ , la ecuación en  $w$  que resulta es normalmente no homogénea.

**Ej 2.** 
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) = 0 \\ u_x(0, t) = 0, u_x(1, t) = 2 \end{cases}$$

Tanteando con  $v = Ax^2 + Bx$  obtenemos que  $v = x^2$  cumple las condiciones de contorno.  
Y haciendo  $w = u - x^2$  se tiene el problema:

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} = 2 \\ w(x, 0) = -x^2 \\ w_x(0, t) = w_x(1, t) = 0 \end{cases} \rightarrow w = T_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cos n\pi x \rightarrow T_0' + \sum_{n=1}^{\infty} [T_n' + n^2 \pi^2 T_n] \cos n\pi x = 2$$

[la función 2 ya está desarrollada en cosenos].

Del dato inicial:  $T_0(0) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \cos n\pi x = -x^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x = -\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2 \pi^2} \cos n\pi x$ ,  
pues  $a_0 = -2 \int_0^1 x^2 dx = -\frac{2}{3}$ ,  $a_n = -2 \int_0^1 x^2 \cos n\pi x dx = \frac{2x^2}{n\pi} \sin n\pi x \Big|_0^1 - \frac{4}{n\pi} \int_0^1 x \sin n\pi x dx = -\frac{4x}{n^2 \pi^2} \cos n\pi x \Big|_0^1 + \frac{4}{n^2 \pi^2} \int_0^1 \cos n\pi x dx$

Resolvemos, pues:  $\begin{cases} T_0' = 2 \\ T_0(0) = -\frac{1}{3} \end{cases} \rightarrow T_0 = 2t + C \xrightarrow{d.i.} C = -\frac{1}{3}$ ,  $\begin{cases} T_n' + n^2 \pi^2 T_n = 0 \\ T_n(0) = a_n \end{cases} \rightarrow T_n = a_n e^{-n^2 \pi^2 t}$ .

La solución es, por tanto,  $u(x, t) = 2t + x^2 - \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} e^{-n^2 \pi^2 t} \cos n\pi x$ .

[ $u \rightarrow \infty$  si  $t \rightarrow \infty$  pues  $u_x = 2$  significa que por la derecha metemos constantemente calor].

Un ejemplo **no homogéneo**, cuyas condiciones de contorno no nos han aparecido aquí todavía:

**Ej 3.** 
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = t \operatorname{sen} x, & x \in (0, \frac{\pi}{2}), t > 0 \\ u(x, 0) = u(0, t) = u_x(\frac{\pi}{2}, t) = 0 \end{cases}$$
 Para saber qué serie probar, hallamos las **autofunciones del homogéneo**. Al separar variables en  $u_t - u_{xx} = 0$  vimos que aparecía  $X'' + \lambda X = 0$  (y la  $T' + \lambda T = 0$  que no es útil ahora).

Esto, y las  $X(0) = X'(\frac{\pi}{2}) = 0$ , que salen de los datos de contorno, da las  $X_n = \{\operatorname{sen}(2n-1)x\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Llevamos, pues, a la EDP:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \operatorname{sen}(2n-1)x \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} [T'_n + (2n-1)^2 T_n] \operatorname{sen}(2n-1)x = t \operatorname{sen} x.$$

La  $F(x, t)$  de la derecha ya está desarrollada en esas autofunciones (no necesitamos hacer integrales).

Hemos obtenido las ecuaciones ordinarias:  $T'_1 + T_1 = t$  y  $T'_n + (2n-1)^2 T_n = 0$ ,  $n > 1$ .

Además, del dato inicial deducimos:  $u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \operatorname{sen}(2n-1)x = 0 \rightarrow T_n(0) = 0 \forall n$ .

La única  $T_n \neq 0$  saldrá de:  $\begin{cases} T'_1 + T_1 = t \\ T_1(0) = 0 \end{cases} \rightarrow T_1 = Ce^{-t} + e^{-t} \int e^t t dt = Ce^{-t} + t - 1$   
[O más corto:  $T_{np} = At + B \rightarrow A + At + B = t$ ].

Imponiendo  $T_1(0) = 0$ , hallamos  $T_1$  y la solución única del problema:  $u(x, t) = (e^{-t} + t - 1) \operatorname{sen} x$ .

[La 'serie solución' sólo tiene un término y no hemos integrado para dar los  $T_n(0)$  y los  $B_n(t)$ . Esto ocurrirá cuando  $f$  o  $F$  sean autofunciones o sumas finitas de ellas. Si el dato inicial fuese  $u(x, 0) = f(x)$  no autofunción, o la ecuación hubiera sido  $u_t - u_{xx} = F(x, t)$ , deberíamos desarrollarlas en las autofunciones del problema haciendo las correspondientes integrales].

En este el problema de contorno es más complicado (aunque acabará siendo problema homogéneo).

**Ej 4.** 
$$\begin{cases} u_t - k u_{xx} = 0, & x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) = x \\ u_x(0, t) - u(0, t) = 0, & u_x(1, t) = 1 \end{cases}$$
 Vimos en 4.2 que hay unicidad. Para resolverlo lo primero será **hacer las condiciones de contorno homogéneas**.

Tanteando con rectas  $v = Mx + N$ , se ve que las cumple:  
$$v = x + 1 \rightarrow w = u - v \rightarrow \begin{cases} w_t - k w_{xx} = 0 \\ w(x, 0) = -1 \\ w_x(0, t) - w(0, t) = w_x(1, t) = 0 \end{cases}$$
 (problema homogéneo)

Separando variables se llega a  $T' + \lambda k T = 0$  y al problema de contorno:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) - X(0) = X'(1) = 0 \end{cases} \text{ que sabemos que no tiene autovalores } < 0.$$

Si  $\lambda = 0$ :  $X = c_1 + c_2 x \rightarrow \begin{cases} c_2 - c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda = 0$  no autovalor.

Si  $\lambda > 0$ :  $X = c_1 \cos wx + c_2 \operatorname{sen} wx$ ,  $w = \sqrt{\lambda} \rightarrow \begin{cases} c_2 w - c_1 = 0 \\ c_2 \cos w - c_1 \operatorname{sen} w = 0 \end{cases} \rightarrow c_2 = \frac{1}{w} c_1 = \frac{\operatorname{sen} w}{\cos w} c_1$   
 $\rightarrow c_1 (\cos w - w \operatorname{sen} w) = 0 \rightarrow \tan w = \frac{1}{w}$ .

Hay infinitos autovalores  $\lambda_n = w_n^2 > 0$  (que se pueden aproximar numéricamente). Y las autofunciones se pueden poner:

$$\left\{ \cos w_n x + \frac{1}{w_n} \operatorname{sen} w_n x \right\}, \text{ o mejor, } X_n = \left\{ \cos w_n (x - 1) \right\}.$$

Yendo a la ecuación en  $T$ :

$$T_n = \{e^{-\lambda_n k t}\} \rightarrow w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-w_n^2 k t} \cos w_n (x - 1).$$

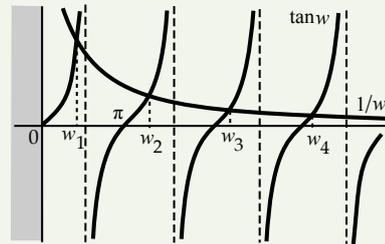
Imponiendo el dato inicial se determinan los  $c_n$  [serán aproximados al serlo los  $\lambda_n$ ]:

$$w(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n(x) = -1 \rightarrow c_n = -\frac{1}{\langle X_n, X_n \rangle} \int_0^1 X_n(x) dx = -\frac{4 \operatorname{sen} w_n}{2w_n + \operatorname{sen} 2w_n},$$

$$\text{pues } \int_0^1 \cos^2 w_n (x - 1) dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{4w_n} [\operatorname{sen} 2w_n (x - 1)]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2w_n}{4w_n}.$$

Sí es fácil de dar la distribución estacionaria hacia la que tienden las temperaturas en la varilla:

$$u(x, t) = w(x, t) + x + 1 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} x + 1.$$



Se puede usar el método en muchas otras ecuaciones separables además de la del calor:

**Ej 5.** 
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + 2u = 0, & x \in (0, \frac{\pi}{2}), t > 0 \\ u(x, 0) = \cos 5x, & u_x(0, t) = u(\frac{\pi}{2}, t) = 0 \end{cases}$$
 [El término  $+2u$  representa una pérdida de calor hacia el medio a lo largo de la varilla].

Separando variables:  $u(x, t) = X(x)T(t) \rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} + 2 = -\lambda$  [damos el 2 mejor a la  $T$  para obtener la clásica para la  $X$ ]

$\rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ T' + (2 + \lambda)T = 0 \end{cases}$  y de los datos de contorno:  $u_x(0, t) = X'(0)T(t) = 0 \rightarrow X'(0) = 0$   
 $u(\frac{\pi}{2}, t) = X(\frac{\pi}{2})T(t) = 0 \rightarrow X(\frac{\pi}{2}) = 0$

$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = (2n-1)^2, X_n = \{ \cos(2n-1)x \} \rightarrow T' = -(2 + \lambda_n)T, T_n = \{ e^{-[2+(2n-1)^2]t} \}$   
 $n = 1, 2, \dots$

La solución será de la forma:  $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-[2+(2n-1)^2]t} \cos(2n-1)x$ . Y, por el dato inicial:

$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(2n-1)x = \cos 5x \rightarrow c_3 = 1$  y el resto 0. Así pues:  $u(x, t) = e^{-27t} \cos 5x$ .

**Ej 6.** 
$$\begin{cases} u_t - \frac{1}{2t} u_{xx} = 3 \sin 2x, & x \in (0, \frac{\pi}{2}), t > 1 \\ u(x, 1) = u(0, t) = u(\frac{\pi}{2}, t) = 0 \end{cases}$$
 Haciendo  $u = XT$  en la homogénea:

$\frac{X''}{X} = \frac{2tT'}{T} = -\lambda \rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$  [además  $T' + \frac{1}{2t}T = 0$ ].

$\rightarrow X_n = \{ \sin 2nx \}, n = 1, 2, \dots. u = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin 2nx$  a la EDP  $\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} [T'_n + \frac{2n^2}{t} T_n] \sin 2nx = 3 \sin 2x$ .

Y del dato inicial  $u(x, 1) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(1) \sin 2nx = 0 \rightarrow T_n(1) = 0 \forall n$ . Sólo es no nula la solución de:

$\begin{cases} T'_1 + \frac{2}{t} T_1 = 3 \\ T_1(1) = 0 \end{cases}, T_1 = \frac{C}{t^2} + \frac{1}{t^2} \int 3t^2 dt = \frac{C}{t^2} + t \xrightarrow{d.i.} C = -1$ . La solución es  $u(x, t) = [t - \frac{1}{t^2}] \sin 2x$ .

Hasta ahora la EDO del problema de contorno siempre ha sido  $X'' + \lambda X = 0$ , y, por eso, las series de Fourier eran con peso  $r(x) = 1$ . Aquí aparece otra distinta para la que es necesario utilizar la teoría general de 3.4.

**Ej 7.** 
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} - 4u_x - 4u = 0, & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = e^{-2x}, & u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$$
  $u = XT \rightarrow \frac{T'}{T} = \frac{X'' + 4X'}{X} + 4 = -\lambda \rightarrow$  más corto ahora aquí

$\begin{cases} X'' + 4X' + (4 + \lambda)X = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}$  (en forma autoadjunta  $[e^{4x} X']' + 4e^{4x} X + \lambda e^{4x} X = 0$ ) y  $T' + \lambda T = 0$ .

Hay que resolver el problema de contorno (y debemos considerar los  $\lambda < 0$ ).  $\mu = -2 \pm \sqrt{-\lambda}$ .

$\lambda < 0$ :  $X = c_1 e^{(-2+\mu)x} + c_2 e^{(-2-\mu)x} \xrightarrow{c.c.} X \equiv 0$ .  $\lambda = 0$ :  $X = (c_1 + c_2 x) e^{-2x} \xrightarrow{c.c.} X \equiv 0$ .

$\lambda > 0$ :  $X = (c_1 \cos wx + c_2 \sin wx) e^{-2x}, c_1 = 0, c_2 e^{-2\pi} \sin w\pi = 0, \lambda_n = n^2, X_n = \{ e^{-2x} \sin nx \}, n = 1, 2, \dots$

Probamos pues la solución:  $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 t} e^{-2x} \sin nx$ . Sólo falta el dato inicial:

$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-2x} \sin nx = e^{-2x}$ . Aunque hay atajos seguimos con la teoría general:

Para calcular los  $c_n$  necesitamos hallar  $\langle X_n, X_n \rangle = \int_0^\pi e^{4x} e^{-4x} \sin^2 nx dx = \frac{\pi}{2}$ ,

y además:  $\langle e^{-2x}, X_n \rangle = \int_0^\pi e^{4x} e^{-2x} e^{-2x} \sin nx dx = -\frac{1}{n} \cos nx \Big|_0^\pi = \frac{1 - (-1)^n}{n}$  ( $= 0$  si  $n$  par).

Por tanto, la solución es:  $u(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m-1} e^{-(2m-1)^2 t} e^{-2x} \sin(2m-1)x$ .

Veamos ahora los atajos. El primero es observar que la igualdad de  $u(x, 0)$  equivale a:

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx = 1$  (desarrollo de 1 en senos)  $\rightarrow c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin nx dx$  (calculado arriba).

El segundo viene de recordar (4.2) que cambios  $u = e^{pt+qx} w$  pueden simplificar la ecuación. Podríamos tantear, pero en este caso todo pide hacer:

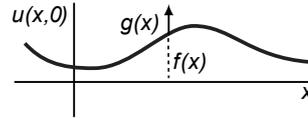
$u = e^{-2x} w \rightarrow u_t = e^{-2x} w_t, u_x = e^{-2x} [w_x - 2w], u_{xx} = e^{-2x} [w_{xx} - 4w_x + 4w] \rightarrow$

$\begin{cases} w_t - w_{xx} = 0 \\ w(x, 0) = 1, w(0, t) = w(\pi, t) = 0 \end{cases}$ , primer problema resuelto por separación de variables.

#### 4.4. Ondas. D'Alembert y separación de variables

En la sección 4.2 vimos que la solución general del **problema puro de valores iniciales**

$$(P_1) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x, t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = f(x), & u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$$



era  $u(x, t) = p(x+ct) + q(x-ct)$ ,  $p, q \in C^2$ , y que la solución única de  $(P_1)$  venía dada por:

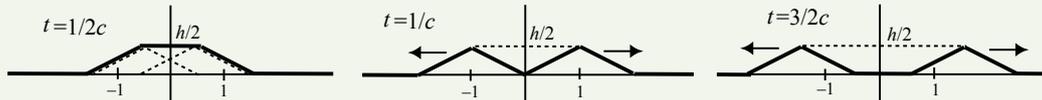
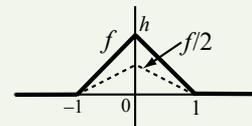
$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds \quad \text{fórmula de D'Alembert}$$

La solución de  $(P_1)$  es suma de dos ondas que viajan a velocidad  $c$ , una hacia las  $x$  crecientes y otra hacia las decrecientes. A la vista de D'Alembert, llamando  $G(x) \equiv \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds$ :

$q(x) = \frac{1}{2}f(x) - G(x)$  va hacia la derecha y  $p(x) = \frac{1}{2}f(x) + G(x)$  va hacia la izquierda.

**Ej 1.** Supongamos  $f=0$  salvo una perturbación en forma de triángulo en torno a 0 y que soltamos la cuerda sin impulso ( $g=0$ ).

Hagamos un dibujo de la solución para diferentes  $t$ . Bastará trasladar las dos ondas que viajan en sentidos opuestos [aquí ambas son  $\frac{1}{2}f(x)$ ]:



Ha sido fácil dibujar la solución [bastante más costaría dar su expresión analítica]. Los picos de la  $f$  inicial **siguen indefinidamente** y viajan también a velocidad  $c$ . Para que  $u$  sea solución de verdad ( $C^2$ ), debe  $f \in C^2$  y  $g \in C^1$ . Si  $u$  es continua pero no  $C^2$ , como ésta, se llama 'solución débil'.

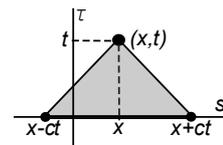
Si hay **fuerzas externas**, el problema es:

$$(P_2) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t), & x, t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = f(x), & u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

Se comprueba que su solución es:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c[t-\tau]}^{x+c[t-\tau]} F(s, \tau) ds d\tau \quad \text{[DA]}$$

Se ve que  $u(x, t)$  sólo depende de los valores de  $f$  en  $x-ct$  y  $x+ct$  [puntos de corte con el eje  $x$  de las características que pasan por  $(x, t)$ ] y de los de  $g$  en el intervalo  $[x-ct, x+ct]$ . Este intervalo se llama dominio de dependencia del punto  $(x, t)$ . Y se comprueba que el recinto de la integral doble es el triángulo del plano  $s\tau$  limitado por el eje  $\tau=0$  y esas características. Así pues, para dar la solución  $u$  en un punto  $(x, t)$  se necesita sólo: i) los valores de  $F$  en el triángulo, ii) los de  $g$  en su base, iii) los de  $f$  en los dos puntos.



**Ej 2.**

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 2 \\ u(x, 0) = x, & u_t(x, 0) = 3 \end{cases}$$

Utilizando directamente la última fórmula [DA]:

$$u = \frac{1}{2} [(x+t) + (x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} 3 ds + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-[t-\tau]}^{x+[t-\tau]} 2 ds d\tau = x + 3t + 2 \int_0^t [t-\tau] d\tau = x + 3t + t^2.$$

A veces es fácil hallar una solución particular  $v$  de la ecuación no homogénea y así evitar el cálculo de la integral doble, pues  $w = u - v$  conduce a un problema más sencillo con  $F = 0$ , (esto no se podrá hacer siempre cuando haya condiciones de contorno, pues podrían dejar de ser homogéneas). Por ejemplo si  $F$  depende sólo de  $x$  o de  $t$  se puede buscar una  $v(x)$  o una  $v(t)$ :

$$-v_{xx} = 2 \rightarrow v = -x^2 + Cx + K \rightarrow \text{si } v(x) = -x^2, \quad w \text{ cumple } \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0 \\ w(x, 0) = x + x^2, & w_t(x, 0) = 3 \end{cases}$$

$$\rightarrow w = \frac{1}{2} [(x+t) + (x+t)^2 + (x-t) + (x-t)^2] + \int_{x-t}^{x+t} 3 ds = x + x^2 + t^2 + 3t \rightarrow u = x + 3t + t^2.$$

$$v_{tt} = 2 \rightarrow v(t) = t^2 + 3t \rightarrow \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0 \\ w(x, 0) = x, & w_t(x, 0) = 0 \end{cases} \rightarrow w = x \rightarrow u = x + 3t + t^2.$$

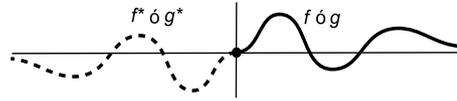
Pasemos a resolver problemas con **condiciones de contorno**. En primer lugar, el problema para la **cuerda semi-infinita**, sin fuerzas externas y fija en un extremo:

$$(P_3) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), & u_t(x, 0) = g(x), u(0, t) = 0 \end{cases} \quad \text{[para que no esté rota, debe ser } f(0) = 0 \text{].}$$

D'Alembert exige funciones definidas  $\forall x$  y  $f$  y  $g$  no lo están cuando  $x < 0$ . ¿Cómo extender estas funciones a todo  $\mathbf{R}$ ? Si llamamos  $f^*$  y  $g^*$  a sus extensiones se debe cumplir la condición:

$$u(0, t) = \frac{1}{2} [f^*(ct) + f^*(-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{-ct}^{ct} g^*(s) ds = 0,$$

es claro que  $f^*$  y  $g^*$  han de ser **impares respecto a 0**, es decir,  $f^*(-x) = -f^*(x)$ ,  $g^*(-x) = -g^*(x)$ .



Así pues, la solución de  $(P_3)$  es la del siguiente problema (para la cuerda infinita):

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f^*(x), & u_t(x, 0) = g^*(x) \end{cases}, \quad u(x, t) = \frac{1}{2} [f^*(x+ct) + f^*(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g^*(s) ds \quad \text{[De]}$$

pues  $u$  cumple la ecuación, las condiciones iniciales para  $x \geq 0$ , y la de contorno. El problema del uso de [De] es que  $f^*$  y  $g^*$  tienen, en general, **diversas expresiones en distintos intervalos**.

Resolvamos ahora el problema más general con **fuerzas externas y extremo móvil**:

$$(P_4) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t), & x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), & u_t(x, 0) = g(x), u(0, t) = h_0(t) \end{cases} \quad \text{[debe ahora ser } f(0) = h_0(0) \text{].}$$

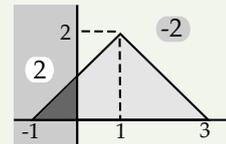
Primero **debemos hacer la condición de contorno homogénea**, hallando una  $v$  que la cumpla y haciendo  $w = u - v$ , ya que entonces será  $w(0, t) = 0$ , aunque probablemente se complicarán la ecuación y el resto de condiciones. La  $v$  más clara (no siempre la mejor) es:  $v(t) = h_0(t)$ .

La solución del problema en  $w$  la dará [DA] si sustituimos sus  $f$ ,  $g$  y  $F$  por  $f^*$ ,  $g^*$  y  $F^*$ , siendo ésta última la **extensión impar de  $F$  mirándola como función de  $x$** .

**Ej 3.** 
$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, & u(0, t) = t^2 \end{cases} \quad \text{Hallemos primero simplemente } u(1, 2).$$

Para anular la condición de contorno podemos usar la  $v$  citada:

$$w = u - t^2 \rightarrow \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = -2 \\ w(x, 0) = w_t(x, 0) = 0 \\ w(0, t) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = \begin{cases} 2, & x < 0 \\ -2, & x > 0 \end{cases} \\ w(x, 0) = w_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$



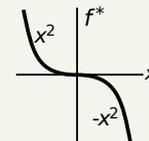
$$w(1, 2) = \frac{1}{2} \iint_{\Delta} F^* = \frac{1}{2} \left[ (2) \text{área}_{\triangle} + (-2) \text{área}_{\text{trapezoido}} \right] = -3 \rightarrow u(1, 2) = -3 + 4 = 1.$$

[Por ser constantes las  $F$  a integrar, nos hemos ahorrado el cálculo de integrales dobles. Pero si  $F$  fuese otra, habría que hacer 3 integrales dobles, una para el triángulo y 2 para el trapecio].

Pero podríamos conseguir un problema sin  $F$ , haciendo el cambio con una  $v$  mejor. Tanteando un poco se ve que  $v = x^2 + t^2$  cumple la condición y también la ecuación:

$$w = u - v \rightarrow \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0 \\ w(x, 0) = -x^2, & w_t(x, 0) = 0 \\ w(0, t) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0, & x, t \in \mathbf{R} \\ w(x, 0) = f^*(x) \\ w_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow w(1, 2) = \frac{1}{2} [f^*(3) + f^*(-1)] = -4 \rightarrow u(1, 2) = 5 - 4 = 1.$$



Con este segundo cambio no es difícil dar la  $u(x, t)$  para todo  $x, t \geq 0$  (con el primero costaría mucho). Está claro que hay que considerar **dos posibilidades**, pues, aunque  $x+t$  es positivo,  $x-t$  puede ser también negativo, y la  $f^*$  tiene expresiones distintas para valores positivos y negativos:

$$w = \frac{1}{2} [f^*(x+t) + f^*(x-t)] = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x+t)^2 + \frac{1}{2}(x-t)^2 = -2tx, & x \leq t \\ -\frac{1}{2}(x+t)^2 - \frac{1}{2}(x-t)^2 = -x^2 - t^2, & x \geq t \end{cases} \rightarrow u = \begin{cases} (x-t)^2, & x \leq t \\ 0, & x \geq t \end{cases}$$

[Como las ondas viajan a velocidad  $c=1$  los puntos a distancia  $\geq t$  debían estar parados en el instante  $t$ ].

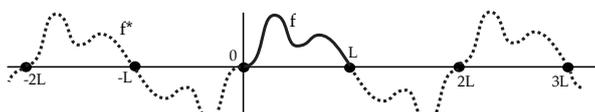
[Una condición de contorno de la forma  $u_x(0, t) = 0$  (que no trataremos aquí y que representa un extremo de la cuerda al que se le da libertad de subir y bajar) conduce a extensiones pares].

Estudiamos la **cuerda acotada** y fija en los extremos [única resoluble por separación de variables]:



$$(P_5) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x \in [0, L], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), & u_t(x, 0) = g(x) \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \end{cases} \quad \text{[debe ser } f(0) = f(L) = 0].$$

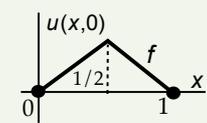
Para hallar su solución única usando D'Alembert **extendemos**  $f$  y  $g$  a  $[-L, L]$  **de forma impar respecto a 0 y luego de forma  $2L$ -periódica a todo  $\mathbf{R}$ :**

$$f^*(-x) = -f^*(x), f^*(x+2L) = f^*(x), g^*(-x) = -g^*(x), g^*(x+2L) = g^*(x).$$


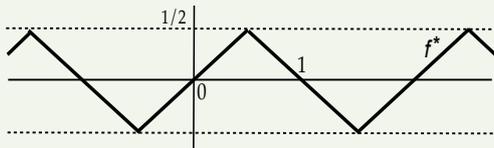
[Entonces  $f^*$  y  $g^*$  también serán impares respecto a  $L$  y tendrán, en general, infinitas expresiones].

La solución de  $(P_5)$  se obtiene entonces aplicando [De] a  $\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f^*(x), & u_t(x, 0) = g^*(x) \end{cases}$ .

**Ej 4.** 
$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in [0, 1], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1-x, & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases} \\ u_t(x, 0) = u(0, t) = u(1, t) = 0 \end{cases}$$
 (Puede representar la pulsación de la cuerda de una guitarra).



Es muy complicado hallar explícitamente  $u(x, t) = \frac{1}{2} [f^*(x+t) + f^*(x-t)] \forall x, t$  pues  $f^*$  tiene infinitas expresiones y habría que discutir en qué intervalos se mueven  $x+t$  y  $x-t$ :



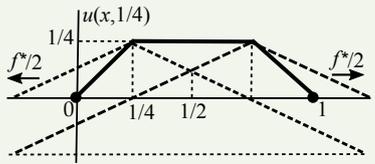
$$f^*(x) = \begin{cases} \dots \\ -1-x, & -3/2 \leq x \leq -1/2 \\ x, & -1/2 \leq x \leq 1/2 \\ 1-x, & 1/2 \leq x \leq 3/2 \\ x-2, & 3/2 \leq x \leq 5/2 \\ \dots \end{cases}$$

Algo más sencillo, pero aún largo, sería hallar la solución para un  $t$  o un  $x$  fijo. Pero sí es muy fácil hallar  $u$  para un  $(x, t)$  dado. No se necesita siquiera la expresión de  $f^*$ . Por ejemplo:

$$u\left(\frac{1}{4}, 3\right) = \frac{1}{2} [f^*\left(\frac{13}{4}\right) + f^*\left(-\frac{11}{4}\right)] = \frac{1}{2} [f^*\left(-\frac{3}{4}\right) + f^*\left(-\frac{3}{4}\right)] = -f\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{4}.$$

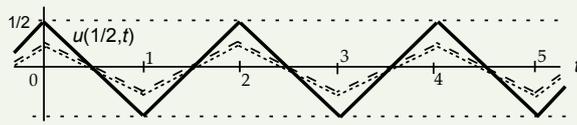
$f^*$  es 2-periódica  $f^*$  es impar

Tampoco se precisa conocer  $f^*$  (sí su gráfica) para hacer **dibujos**: basta trasladar  $\frac{1}{2}f^*$  a izquierda y derecha y sumar. Por ejemplo, empecemos dibujando  $u(x, \frac{1}{4}) = \frac{1}{2} [f^*(x+\frac{1}{4}) + f^*(x-\frac{1}{4})]$ :



El máximo de la gráfica de  $\frac{1}{2}f^*$  (la de  $f^*$  con la mitad de altura), se ha ido al ir hacia la izquierda hasta  $(1/4, 1/4)$  y al ir hacia la derecha a  $(3/4, 1/4)$ . Al sumar dos rectas con la misma pendiente sale otra con el doble, y al sumar dos con pendiente opuesta queda una constante.

Dibujemos ahora:

$$u\left(\frac{1}{2}, t\right) = \frac{1}{2} [f^*\left(\frac{1}{2}+t\right) + f^*\left(\frac{1}{2}-t\right)] = \frac{1}{2} [f^*\left(\frac{1}{2}+t\right) - f^*\left(t-\frac{1}{2}\right)] \rightarrow$$


La gráfica tiene periodo 2. Por las propiedades de  $f^*$  y  $g^*$ , **la  $u$  dada por [De] es  $\frac{2L}{c}$ -periódica en  $t$ .**

Las complicaciones de D'Alembert desaparecen sólo cuando las funciones extendidas son las propias funciones iniciales, es decir, si son ellas mismas impares y periódicas. Si fuese nuestra  $f(x) = \sin \pi x$ , simplemente la solución  $\forall x, t$  sería  $u(x, t) = \frac{1}{2} [\sin(x+t) + \sin(x-t)] = \sin x \cos t$ .

Si queremos resolver  $(P_6) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t), & x \in [0, L], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), & u_t(x, 0) = g(x) \\ u(0, t) = h_0(t), & u(L, t) = h_L(t) \end{cases}$  (hay fuerzas externas y movemos los extremos)

primero se halla una  $v$  que cumpla las condiciones de contorno y se hace  $w = u - v$ . Tanteando con funciones  $v = a(t)x + b(t)$  se ve fácilmente que una posible  $v$  es  $v(x, t) = \left[1 - \frac{x}{L}\right] h_0(t) + \frac{x}{L} h_L(t)$ .

La solución del problema en  $w$  vuelve a venir dada por [DA], poniendo en vez de sus  $f, g$  y  $F$ , las extensiones impares y  $2L$ -periódicas  $f^*, g^*$  y  $F^*$  (vista  $F$  como función de  $x$ ).

## Separación de variables para ondas

Resolvamos el **problema homogéneo** para la **cuerda vibrante** con **extremos fijos** (que acabamos de resolver extendiendo los datos y aplicando la fórmula de D'Alembert y podremos comparar).

$$(P_5) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x \in [0, L], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), & u_t(x, 0) = g(x) \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \end{cases}$$

Separando variables  $u = X(x)T(t)$  e imponiendo los datos de contorno obtenemos:

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2} \frac{T''}{T} = -\lambda \rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda X = 0, & X(0) = X(L) = 0 \\ T'' + \lambda c^2 T = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, X_n = \left\{ \sin \frac{n\pi x}{L} \right\}_{n=1, 2, \dots}$$

Las soluciones  $T_n$  para esos  $\lambda_n$  son combinaciones lineales de  $\sin \frac{n\pi ct}{L}$  y  $\cos \frac{n\pi ct}{L}$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Así que las  $u_n(x, t) = \left[ k_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + c_n \sin \frac{n\pi ct}{L} \right] \sin \frac{n\pi x}{L}$ , satisfacen EDP y condiciones de contorno.

$$\text{Probamos, pues: } u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ k_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + c_n \sin \frac{n\pi ct}{L} \right] \sin \frac{n\pi x}{L}$$

con  $k_n$  y  $c_n$  constantes que debemos determinar (en el calor sólo quedaba una arbitraria). Para que se cumplan las condiciones iniciales (que aquí son dos):

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \sin \frac{n\pi x}{L} = f(x) \rightarrow k_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, n = 1, 2, \dots$$

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{L} c_n \sin \frac{n\pi x}{L} = g(x) \rightarrow c_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, n = 1, 2, \dots$$

pues  $\frac{n\pi c}{L} c_n$  son los coeficientes del desarrollo de  $g$  en senos.

Se prueba que la serie converge y satisface realmente el problema si las extensiones impares y de periodo  $2L$  de  $f$  y  $g$  son  $C^2$  y  $C^1$ , respectivamente. Si  $f, g$  no son tan buenas, la suma de la serie es lo que llamamos una solución débil (en las ondas, como ya se dijo, no desaparecen las discontinuidades).

Para ciertas cuestiones (valores concretos, dibujos, ...) es mejor D'Alembert, pero la serie muestra mejor otras propiedades. Por ejemplo, por ser  $\frac{2L}{c}$ -periódicas en  $t$  las  $u_n$ , también  $u$  tiene este periodo.

Observemos además que la solución aparece como suma infinita de 'modos naturales de vibración' [ $\sin \frac{n\pi x}{L}$ ] cada uno de los cuales vibra con una frecuencia  $\frac{n\pi c}{L}$  (las 'frecuencias naturales' de la cuerda).

En términos acústicos  $u_1$  da el tono fundamental (su frecuencia es  $\frac{\pi c}{L}$ ) y los demás son los 'armónicos' (de frecuencia múltiplo de la anterior).

Como siempre (y como con D'Alembert), para empezar a resolver por separación de variables, **han de ser las condiciones de contorno homogéneas**. Y **para resolver los problemas no homogéneos se probarían series de autofunciones del homogéneo**.

**Ej 4\*.**

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in [0, 1], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1-x, & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases} \\ u_t(x, 0) = u(0, t) = u(1, t) = 0 \end{cases}$$

(Ejemplo 4 de antes que podía representar la pulsación de la cuerda de una guitarra).

Basta copiar de arriba:  $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \cos n\pi t \sin n\pi x$  (2-periódica),

con  $k_n = 2 \int_0^{1/2} x \sin n\pi x dx + 2 \int_{1/2}^1 (1-x) \sin n\pi x dx$

$$= -\frac{2x}{n\pi} \cos n\pi x \Big|_0^{1/2} - \frac{2(1-x)}{n\pi} \cos n\pi x \Big|_{1/2}^1 + \frac{2}{n\pi} \int_0^{1/2} \cos n\pi x dx - \frac{2}{n\pi} \int_{1/2}^1 \cos n\pi x dx$$

$$= \frac{2}{n\pi} \left[ -\cos \frac{n\pi}{2} + \cos \frac{n\pi}{2} \right] + \frac{2}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{2}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} = \frac{4}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} \quad (=0 \text{ si } n \text{ par}).$$

(Pulsando la cuerda en el centro desaparecen los armónicos pares).

También aquí las cosas serían muy simples si fuese  $f(x) = \sin \pi x$ , pues no habría que calcular integrales:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \sin n\pi x = \sin \pi x \rightarrow k_1 = 1 \text{ y los demás } 0 \rightarrow u(x, t) = \cos t \sin \pi x.$$

**Ej 5.** 
$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in [0, \pi], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = 0, & u_t(x, 0) = x \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$$

a) Resolverla por separación de variables.  
 b) Calcular  $u(2, 2)$  mediante la fórmula de D'Alembert y comparar ese valor con el que proporciona la serie,

a) Rehacemos cálculos sin mirar lo anterior. De los datos 0 se deduce  $X(0) = X(\pi) = 0$  y  $T(0) = 0$ .

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = n^2, X_n = \{ \text{sen } nx \}, \quad \begin{cases} T'' + \lambda T = 0 \\ T(0) = 0 \end{cases} \rightarrow T_n = \{ \text{sen } nt \}, n = 1, 2, \dots$$

$\rightarrow u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sen } nt \text{sen } nx$ .  $u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n \text{sen } nx = x \rightarrow n c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \text{sen } nx \, dx = -\frac{2 \cos n\pi}{n}$ .

Por tanto, la solución es la serie:  $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n^2} \text{sen } nt \text{sen } nx$ .

b)  $u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g^*$ , con  $g^*$  extensión impar y  $2\pi$ -periódica de  $x$ .

$$u(2, 2) = \frac{1}{2} \int_0^4 g^* = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} s \, ds + \frac{1}{2} \int_{\pi}^4 (s-2\pi) \, ds = 4 - 4\pi + \pi^2 = (\pi-2)^2.$$

O como es impar respecto a  $\pi$ :  $u(2, 2) = \frac{1}{2} \int_0^{2(\pi-2)} s \, ds = (\pi-2)^2$ .

[Sumando 10 términos de la serie con  $x=t=2$  se obtiene  $u(2,2) \approx 1.3047$  y es  $(\pi-2)^2 \approx 1.3032$ ].

Ecuación de ondas (no homogénea) con un término más (podría representar un rozamiento con el medio):

**Ej 6.** 
$$\begin{cases} u_{tt} + 2u_t - u_{xx} = (t+2) \text{sen } x, & x \in [0, \pi], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$$

Separando variables en la ecuación homogénea:  $u = XT \rightarrow X(T'' + 2T') = X''T, \frac{X''}{X} = \frac{T'' + 2T'}{T} = -\lambda$ .

$\rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases} \rightarrow X_n = \{ \text{sen } nx \}, n = 1, 2, \dots$  [y además  $T_n'' + 2T_n' + \lambda T_n = 0$  que aquí no se usa].

Llevamos a la EDP:  $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \text{sen } nx$ , obteniendo  $\sum_{n=1}^{\infty} [T_n'' + 2T_n' + n^2 T_n] \text{sen } nx = (t+2) \text{sen } x$ .  
 ya desarrollada

Además:  $u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \text{sen } nx = 0, u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(0) \text{sen } nx = 0 \Rightarrow T_n(0) = T_n'(0) = 0 \forall n$ .

Todas las ecuaciones son homogéneas con datos nulos (y es  $T_n \equiv 0$ ) menos  $\begin{cases} T_1'' + 2T_1' + T_1 = t+2 \\ T_1(0) = T_1'(0) = 0 \end{cases}$ ,

$T_1 = (c_1 + c_2 t) e^{-t} + t$  [ $\mu = -1$  doble y  $T_{1p} = At + B$ ]  $\xrightarrow{d.i.}$   $u(x, t) = t(1 - e^{-t}) \text{sen } x$ .

Acabamos la sección con algunas **reflexiones sobre el método de separación de variables**.

Todos los problemas que hemos visto estaban formados por una **EDP lineal**  $L[u] = F$ , con  $L$  lineal (es decir,  $L[au_1 + bu_2] = aL[u_1] + bL[u_2]$ ) y unas **condiciones adicionales lineales** también.

Ha sido posible resolverlos porque todas las ecuaciones eran '**separables**' (hay EDPs que no lo son) y los recintos que aparecieron eran '**simples**' (limitados por ' $variable = cte$ ').

Siempre nos hemos ocupado primero de garantizar que fueran **homogéneas las condiciones de contorno**.

En todos los **problemas homogéneos** hemos buscado soluciones de la EDP que eran productos  $u = XT$ , y ello nos llevó a unas  $X_n$  autofunciones de un problema de contorno y unas  $T_n$  soluciones de otra EDO también homogénea. Gracias a la linealidad pudimos construir la serie  $u(x, t) = \sum c_n T_n(t) X_n(x)$  y fijamos los  $c_n$  imponiendo la condición inicial (o las condiciones) y haciendo desarrollos de Fourier.

Para los **problemas no homogéneos**, buscando también una serie solución, metimos en la ecuación una serie cuyos términos eran **productos de las autofunciones del problema homogéneo por funciones a determinar de la otra variable**. Resolviendo la familia resultante de EDOs lineales no homogéneas con las condiciones que se deducían de las condiciones iniciales, obtuvimos la solución.

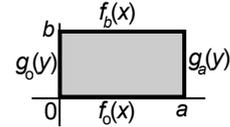
En los problemas resueltos hasta ahora necesariamente había **dos condiciones de contorno** y, además una o dos condiciones iniciales. Resolviendo Laplace en 4.5 veremos que a veces las condiciones de contorno no están a la vista (por ejemplo, en un círculo se exigirá periodicidad); y, en vez de condiciones iniciales, aparecerán otras dos de contorno (quizás alguna tampoco escrita, como la acotación).

## 4.5. Separación de variables para Laplace

En esta sección resolveremos por separación de variables problemas para la ecuación de **Laplace** (homogénea y no homogénea) tanto en coordenadas rectangulares como en polares y tanto para problemas de Dirichlet, como de Neumann, como mixtos. En cartesianas el problema de Sturm-Liouville a resolver será en  $x$  o en  $y$  según convenga (sus papeles son intercambiables), pero en polares será el de la  $\theta$  (para la EDO de siempre, preferible al de la ecuación de Euler que aparece para la  $r$ ).

Comenzamos por el **problema de Dirichlet en un rectángulo**, es decir:

$$[P_1] \begin{cases} \Delta u = F(x, y), \text{ en } (0, a) \times (0, b) \\ u(x, 0) = f_o(x), u(x, b) = f_b(x) \\ u(0, y) = g_o(y), u(a, y) = g_a(y) \end{cases}$$



Por ser lineales la ecuación y las condiciones, bastaría resolver los 5 subproblemas que se obtienen al hacer 4 de las 5 funciones que aparecen igual a 0 y sumar las 5 soluciones. Comencemos resolviendo, por ejemplo, uno de los 4 problemas para la **ecuación homogénea**:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \text{ en } (0, a) \times (0, b) \\ u(x, 0) = f_o(x) \\ u(x, b) = u(0, y) = u(a, y) = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} u(x, y) = X(x)Y(y) &\rightarrow X''Y + XY'' = 0 \rightarrow \\ -\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = \lambda &\rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ Y'' - \lambda Y = 0 \end{cases} \\ \text{[poniendo } -\lambda \text{ salen } X'' - \lambda X = 0, Y'' + \lambda Y = 0]. \end{aligned}$$

De  $u(0, y) = u(a, y) = 0$  se deduce que  $X(0) = X(a) = 0$ , con lo que el problema de contorno para la  $X$  tiene solución no trivial si

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{a^2}, \quad X_n = \left\{ \text{sen } \frac{n\pi x}{a} \right\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Para esos  $\lambda_n$  es  $Y_n = c_1 e^{n\pi y/a} + c_2 e^{-n\pi y/a}$ . La condición homogénea aún no aplicada  $u(x, b) = 0$  impone  $Y(b) = 0$ . Nos interesan las  $Y_n$  que la cumplen:

$$c_2 = -c_1 e^{2n\pi b/a} \rightarrow Y_n = c_1 e^{n\pi b/a} (e^{n\pi[y-b]/a} - e^{n\pi[b-y]/a}) \rightarrow Y_n = \left\{ \text{sh } \frac{n\pi[b-y]}{a} \right\}$$

Probamos entonces:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sh } \frac{n\pi[b-y]}{a} \text{sen } \frac{n\pi x}{a}.$$

Para satisfacer la condición de contorno no homogénea que falta (suponemos que  $f_o$  es  $C^1$  a trozos):

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sh } \frac{n\pi b}{a} \text{sen } \frac{n\pi x}{a} = f_o(x) \rightarrow c_n \text{sh } \frac{n\pi b}{a} = \frac{2}{a} \int_0^a f_o(x) \text{sen } \frac{n\pi x}{a} dx.$$

Análogamente se resuelven los otros 3 subproblemas con  $F \equiv 0$ . Uno vuelve a tener las  $X_n$  de antes, y en los otros dos es  $Y$  (con condiciones homogéneas) la que da las autofunciones  $Y_n = \left\{ \text{sen } \frac{n\pi y}{b} \right\}$ .

Para resolver el último subproblema, el de la **ecuación no homogénea**:

$$\begin{cases} \Delta u = F(x, y), \text{ en } (0, a) \times (0, b) \\ u(x, 0) = u(x, b) = u(0, y) = u(a, y) = 0 \end{cases}$$

como siempre se prueba una serie de autofunciones. Aquí hay dos posibilidades [elegiremos la que proporcione un desarrollo más fácil para  $F$ ]:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) \text{sen } \frac{n\pi x}{a} \quad \text{ó} \quad u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \text{sen } \frac{n\pi y}{b}$$

[En la práctica, anulando términos no homogéneos con cambios  $w = u - v$ , y con menos subproblemas se llega a la solución; lo único necesario para separar variables es que sea  $u = 0$  en  $x = 0, a$  ó en  $y = 0, b$ ].

Se prueba que las  $u$  dadas por las series son realmente soluciones. Si los datos con  $C^1$  a trozos (incluso si son discontinuos), la  $u$  tiene infinitas derivadas en el rectángulo abierto, es  $\Delta u = 0$  ahí y se toma el valor de contorno con continuidad para los puntos del borde en que los datos son continuos. La situación será totalmente análoga en el círculo. La situación es parecida a lo que ocurriría con la ecuación del calor, pero no con la de ondas, en la que los picos iniciales se mantenían indefinidamente.

Resolvemos ahora un **problema de Neumann** en cartesianas. Suponemos la ecuación no homogénea, pero con condiciones de contorno homogéneas:

$$[P_2] \begin{cases} \Delta u = F(x, y), & \text{en } (0, \pi) \times (0, \pi) \\ u_y(x, 0) = u_y(x, \pi) = u_x(0, y) = u_x(\pi, y) = 0 \end{cases}$$

Separando variables en la ecuación homogénea llegamos, claro, a las mismas ecuaciones que en [P<sub>1</sub>]:  $X'' + \lambda X = 0$ ,  $Y'' - \lambda Y = 0$ . Las condiciones de contorno obligan a que  $X'(0) = X'(\pi) = 0$ ,  $Y'(0) = Y'(\pi) = 0$ . Para este problema tenemos, pues, dos familias de autofunciones  $\{\cos nx\}$  ó  $\{\cos ny\}$ ,  $n=0, 1, \dots$  y podemos elegir cualquiera de ella para nuestra serie. Por ejemplo:

$$u(x, y) = X_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \cos ny \rightarrow$$

$$X_0'' + \sum_{n=1}^{\infty} [X_n'' - n^2 X_n] \cos ny = \frac{B_0(x)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n(x) \cos ny, \quad B_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(x, y) \cos ny \, dy.$$

Debemos resolver los infinitos problemas de contorno para EDOs:

$$X_0'' = \frac{1}{2} B_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} F(x, y) \, dy; \quad X_n'' - n^2 X_n = B_n, \quad n \geq 1; \quad \text{con } X_n'(0) = X_n'(\pi) = 0.$$

Las  $X_n$  con  $n \geq 1$  quedan determinadas de forma única (el problema homogéneo, como sabemos desde 3.3, tiene sólo la solución trivial).

Pero  $X_0'' = 0$ ,  $X_0'(0) = X_0'(\pi) = 0$  tiene soluciones no triviales ( $\{1\}$ ), con lo que, según 3.3, para que haya solución para  $X_0$  es necesario que sea  $\int_0^{\pi} 1 \cdot B_0(x) \, dx = 0$ . Es decir,

$$[P_2] \text{ tiene solución sólo si } \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} F(x, y) \, dx \, dy = 0 \text{ y entonces hay una constante arbitraria.}$$

Todo esto es coherente con lo dicho sobre Neumann en 4.2.

**Ej 1.** Calculemos la solución en el caso particular en que  $F(x, y) = x - a$ .

El problema sólo tiene solución si  $\iint_{\square} F = 0$ , es decir, si  $a = \frac{\pi}{2}$ .

Entonces nos queda  $X_0'' = x - \frac{\pi}{2}$ , pues, por suerte, la  $F(x, y)$  ya está desarrollada en  $\{\cos ny\}$ .

Por esta misma razón los  $B_n$ , y por tanto los  $X_n$ , son nulos si  $n \geq 1$ .

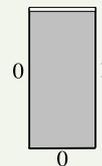
Integrando e imponiendo  $X_0'(0) = X_0'(\pi) = 0$  obtenemos  $u(x, y) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{\pi}{4}x^2 + C$ .

[Si hubiéramos resuelto probando  $u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(y) \cos nx$  sería necesario desarrollar en serie].

Un ejemplo más en cartesianas, para **Laplace con condiciones mixtas** (en parte Dirichlet, en parte Neumann). Es fácil ver con la fórmula de Green que todos ellos tienen solución única.

**Ej 2.**  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ ,  $(x, y) \in (0, 1) \times (0, \pi)$   
 $u(x, 0) = u_y(x, \pi) = u(0, y) = 0$ ,  $u(1, y) = 1$   $u = X(x)Y(y) \rightarrow$

$$\begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0, & Y(0) = Y'(\pi) = 0 \\ X'' - \lambda X = 0, & X(0) = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = \left(\frac{2n-1}{2}\right)^2, \quad Y_n = \left\{ \text{sen} \frac{(2n-1)y}{2} \right\}.$$



Para esos  $\lambda$  es  $X = c_1 e^{(2n-1)x/2} + c_2 e^{-(2n-1)x/2} \xrightarrow{X(0)=0} c_2 = -c_1$ ,  $X_n = \left\{ \text{sh} \frac{(2n-1)x}{2} \right\}$ .

Probamos  $u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n(x) Y_n(y)$ . Para precisar las  $c_n$  imponemos el dato  $u(1, y) = 1$  que falta:

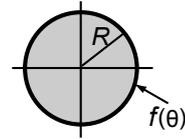
$$c_n \text{sh} \frac{2n-1}{2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \text{sen} \frac{(2n-1)y}{2} \, dy = \frac{4}{\pi(2n-1)} \left[ 1 - \cos \frac{(2n-1)\pi}{2} \right] \rightarrow$$

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1) \text{sh} \frac{2n-1}{2}} \text{sh} \frac{(2n-1)x}{2} \text{sen} \frac{(2n-1)y}{2}.$$

Recordemos que el **Laplaciano en coordenadas polares**  $\begin{cases} x=r \cos \theta \\ y=r \sin \theta \end{cases}$  era  $\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta}$ .

Resolvamos **en un círculo** el **problema de Dirichlet homogéneo** (y abajo el de Neumann):

$$[P_D] \begin{cases} \Delta u = 0, \text{ en } r < R \\ u(R, \theta) = f(\theta), \theta \in [0, 2\pi) \end{cases}$$



$$u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta) \rightarrow \frac{r^2 R'' + rR'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda \rightarrow \begin{cases} \Theta'' + \lambda\Theta = 0 \\ r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0 \end{cases}$$

Parece no haber condiciones para  $\Theta$ , pero está claro que la solución **debe ser  $2\pi$ -periódica** en  $\theta$ , es decir, debe ser  $\Theta(0) = \Theta(2\pi)$ ,  $\Theta'(0) = \Theta'(2\pi)$ . Para este problema periódico sabemos que:

$$\lambda_n = n^2, n=0, 1, 2, \dots, \Theta_0(\theta) = \{1\}, \Theta_n(\theta) = \{\cos n\theta, \sin n\theta\}.$$

Y las soluciones correspondientes para  $R$  son (ecuaciones de Euler):

$$R_0(r) = c_1 + c_2 \ln r, R_n(r) = c_1 r^n + c_2 r^{-n} \text{ si } n \geq 1.$$

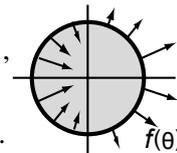
Parece lógico imponer por argumentos físicos que la solución **debe estar acotada cuando  $r \rightarrow 0$**  (matemáticamente también, si ha ser de  $C^2$ ), así pues  $c_2 = 0$  en ambos casos. Probamos, pues:

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n [a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta] \rightarrow u(R, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} R^n [a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta] = f(\theta)$$

$$\rightarrow a_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta, n=0, 1, \dots, b_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta, n=1, 2, \dots$$

El **problema de Neumann homogéneo** empieza como Dirichlet, hasta la  $u(r, \theta)$  que se prueba:

$$[P_N] \begin{cases} \Delta u = 0, \text{ en } r < R \\ u_r(R, \theta) = f(\theta), \theta \in [0, 2\pi) \end{cases} \rightarrow u = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n [a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta]$$



pero cambia la condición final:  $u_r(R, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n R^{n-1} [a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta] = f(\theta)$ .

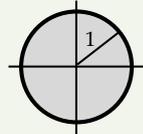
$$\rightarrow a_n = \frac{1}{n\pi R^{n-1}} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta, b_n = \frac{1}{n\pi R^{n-1}} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta, n=1, 2, \dots$$

**siempre que no tenga término independiente el desarrollo en senos y cosenos de  $f(\theta)$** . Es decir

debe cumplirse  $\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = 0$  [confirma lo que vimos en 4.2: debía ser  $\oint_{\partial D} f ds = \iint_D F dx dy = 0$ ].

Además (desaparece al derivar)  $a_0$  **queda indeterminado** [Neumann tiene unicidad salvo constante].

Resolvemos ahora un ejemplo de problema de **Dirichlet no homogéneo en el círculo**:

**Ej 3.**  $\begin{cases} u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_{\theta\theta}}{r^2} = 4 \text{ en } r < 1 \\ u(1, \theta) = \sin 2\theta \end{cases}$  Probamos serie de autofunciones del homogéneo. 

$$u(r, \theta) = a_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(r) \cos n\theta + b_n(r) \sin n\theta]$$

$$\rightarrow a_0'' + \frac{1}{r} a_0' + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \left[ a_n'' + \frac{1}{r} a_n' - \frac{n^2}{r^2} a_n \right] \cos n\theta + \left[ b_n'' + \frac{1}{r} b_n' - \frac{n^2}{r^2} b_n \right] \sin n\theta \right) = 4,$$

constante ya desarrollada en esa familia de autofunciones.

Hay que resolver las ecuaciones:  $r a_0'' + a_0' = 4r$ ,  $r^2 a_n'' + r a_n' - n^2 a_n = 0$ ,  $r^2 b_n'' + r b_n' - n^2 b_n = 0$ .

La condición  $u(1, \theta) = \sin 2\theta$  (desarrollada ya) impone:  $a_n(1) = 0 \forall n$ ;  $b_2(1) = 1$ ;  $b_n(1) = 0, n \neq 2$ .

La acotación cuando  $r \rightarrow 0$  será la otra condición necesaria para determinar la solución de cada EDO de segundo orden. Para la de  $a_0$  necesitamos una solución particular, que se puede hallar con la **fv**:

$$\begin{vmatrix} 1 & \ln r \\ 0 & 1/r \end{vmatrix} = \frac{1}{r}, a_{0p} = \ln r \int \frac{1 \cdot 4 dr}{1/r} - \int \frac{\ln r \cdot 4 dr}{1/r} = \dots = r^2.$$

o, mejor, tanteando una  $a_{0p} = Ar^2$  ( $a_{0p} = Ae^{2s}$  y no autovalor)  $\rightarrow 2A + 2A = 4$ ,  $A = 1$ . Así pues:

$$a_0 = c_1 + c_2 \ln r + r^2 \xrightarrow{\text{acotada}} c_2 = 0 \xrightarrow{a_0(1)=0} c_1 = -1, b_2 = c_1 r^2 + c_2 r^{-2} \xrightarrow{\text{acotada}} c_2 = 0 \xrightarrow{b_2(1)=1} c_1 = 1.$$

Podemos asegurar además que el resto de  $a_n$  y  $b_n$  son cero (0 es claramente solución y no hay más por tener un problema de Dirichlet solución única). La solución del problema es:

$$u(r, \theta) = r^2 - 1 + r^2 \sin 2\theta \quad [\text{Se podría escribir en cartesianas: } u = (x+y)^2 - 1].$$

Los siguientes ejemplos ya no son círculos (ni coronas circulares) y el problema de contorno en  $\theta$  no será el periódico sino el que indiquen las condiciones de contorno que deben figurar explícitamente. La acotación seguirá siendo necesaria cuando el origen pertenezca al borde del recinto.

Primero uno de **Neumann homogéneo** en el semicírculo (que no exige integrales y tendrá  $C$  arbitraria).

**Ej 4.**  $\Delta u = 0$  en  $r < 1$ ,  $0 < \theta < \pi$   
 $u_r(1, \theta) = \cos^3 \theta$ ,  $u_\theta(r, 0) = u_\theta(r, \pi) = 0$

La ecuación para  $\Theta$  que sale al separar variables es conocida (y también la de  $R$ ). Junto a los datos en  $\theta=0, \pi$  nos da las  $\Theta_n$ : 

$$\begin{cases} \Theta'' + \lambda \Theta = 0 \\ \Theta'(0) = \Theta'(\pi) = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = n^2, \Theta_n(\theta) = \{\cos n\theta\}, n=0, 1, 2, \dots \rightarrow$$

$$r^2 R'' + rR - n^2 R = 0 \rightarrow \begin{cases} R_0 = c_1 + c_2 \ln r \xrightarrow{R \text{ acot.}} R_0 = \{1\} \\ R_n = c_1 r^n + c_2 r^{-n} \rightarrow R_n = \{r^n\} \end{cases} \rightarrow u(r, \theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n \cos n\theta.$$

$$u_r(1, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \cos n\theta = \cos^3 \theta = \frac{3}{4} \cos \theta + \frac{1}{4} \cos 3\theta. \text{ No hay que integrar:}$$

$$a_1 = \frac{3}{4}, a_3 = \frac{1}{12}, a_0 \text{ sin condición, el resto } 0 \rightarrow u(r, \theta) = C + \frac{3r}{4} \cos \theta + \frac{r^3}{12} \cos 3\theta, C \text{ cualquiera.}$$

Otro homogéneo con **condiciones mixtas** (y otras condiciones de contorno) que sí exige integrar.

**Ej 5.**  $\Delta u = 0$ , en  $r < 1$ ,  $0 < \theta < \pi$   
 $u_r(1, \theta) = \theta$ ,  $u(r, 0) = u_\theta(r, \pi) = 0$

$\begin{cases} \Theta'' + \lambda \Theta = 0 \\ \Theta(0) = \Theta(\pi) = 0 \end{cases}, \lambda_n = \frac{(2n-1)^2}{4}, \Theta_n = \{\sin \frac{2n-1}{2} \theta\}_{n=1,2,\dots}$  

Para esos  $\lambda_n$ :  $r^2 R'' + rR - \lambda_n R = 0$ ,  $R = c_1 r^{n-\frac{1}{2}} + c_2 r^{-n+\frac{1}{2}} \xrightarrow{R \text{ acot.}} R_n = \{r^{n-\frac{1}{2}}\}$ ,  $u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^{n-\frac{1}{2}} \sin \frac{2n-1}{2} \theta$ .

$$u_r(1, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{2n-1}{2} \sin \frac{2n-1}{2} \theta = \theta, c_n = \frac{2}{2n-1} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \theta \sin \frac{2n-1}{2} \theta d\theta \rightarrow u = \frac{16}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} r^{n-\frac{1}{2}} \sin \frac{2n-1}{2} \theta.$$

Un problema (mixto) no homogéneo y que no exige integrar.

**Ej 6.**  $\Delta u = r^2 \cos 3\theta$ ,  $r < 2$ ,  $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$   
 $u(2, \theta) = u_\theta(r, 0) = u(r, \frac{\pi}{6}) = 0$

$\begin{cases} \Theta'' + \lambda \Theta = 0 \\ \Theta'(0) = \Theta(\frac{\pi}{6}) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda_n = 9(2n-1)^2, n=1, 2, \dots \\ \Theta_n = \{\cos 3(2n-1)\theta\} \end{cases}$  

Probamos:  $u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r) \cos 3(2n-1)\theta \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left[ R_n'' + \frac{1}{r} R_n' - \frac{9(2n-1)^2}{r^2} R_n \right] \cos 3(2n-1)\theta = r^2 \cos 3\theta$

$$\rightarrow \begin{cases} r^2 R_1'' + r R_1' - 9 R_1 = r^4 \\ R_1 \text{ acotada en } 0, R_1(2) = 0 \end{cases} \xrightarrow{R_p = Ar^4} R_1 = c_1 r^3 + c_2 r^{-3} + \frac{1}{7} r^4 \xrightarrow{\text{c.c.}} R_1 = \frac{1}{7} [r^4 - 2r^3].$$

Concluimos que la solución (única) es  $u(r, \theta) = \frac{1}{7} [r^4 - 2r^3] \cos 3\theta$ .

El recinto de este último problema de **Dirichlet no homogéneo** no toca el origen. La acotación se sustituye por un dato explícito sobre  $r=1$  y todas las condiciones de contorno están a la vista:

**Ej 7.**  $\Delta u = \sin \theta$ ,  $1 < r < 2$ ,  $0 < \theta < \pi$   
 $u(1, \theta) = u(2, \theta) = u(r, 0) = u(r, \pi) = 0$

Las autofunciones del homogéneo las dará el problema de contorno: 

$$\begin{cases} \Theta'' + \lambda \Theta = 0 \\ \Theta(0) = \Theta(\pi) = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = n^2, \Theta_n(\theta) = \{\sin n\theta\}, n=1, 2, \dots \text{ Probamos } u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r) \sin n\theta.$$

[La serie de cosenos y senos del Ej 3. no cumple los datos de contorno (aquí no hay periodicidad)].

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ R_n'' + \frac{1}{r} R_n' - \frac{n^2}{r^2} R_n \right] \sin n\theta = \sin \theta \text{ [ya desarrollada en senos].}$$

[Si fuese una  $F(r, \theta)$  cualquiera, se desarrollaría en senos, viendo la  $r$  como constante].

Las dos condiciones para las  $R_n$  salen de las otras condiciones de contorno:

$$\sum_{n=0}^{\infty} R_n(1) \sin n\theta = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(2) \sin n\theta = 0 \Rightarrow R_n(1) = R_n(2) = 0 \quad \forall n.$$

Sólo tendrá solución no nula  $r^2 R_1'' + r R_1' - R_1 = r^2$  con los datos de contorno nulos de arriba.

$$R_{1p} = Ar^2 [\lambda=2 \text{ no autovalor}] \rightarrow A = \frac{1}{3} \rightarrow R_1 = c_1 r + c_2 r^{-1} + \frac{1}{3} r^2 \xrightarrow{\text{c.c.}} c_1 = -\frac{7}{9}, c_2 = \frac{4}{9}.$$

La solución es, por tanto:  $u(r, \theta) = (\frac{1}{3} r^2 - \frac{7}{9} r + \frac{4}{9} r^{-1}) \sin \theta$ .

## 5. Otros temas más allá del curso

### 5.1. Integrales de superficie

Generalizamos los dos tipos de integrales de línea. Una **superficie** a veces viene dada por  $F(x, y, z) = 0$ . Si se puede despejar la  $z$ , por  $z = f(x, y)$ . Pero lo más general es que se puede describir mediante:

$$\mathbf{r} : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \text{ con } \mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), (u, v) \in A \quad [2 \text{ grados de libertad frente al único } t \text{ de las curvas}].$$

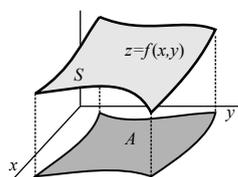
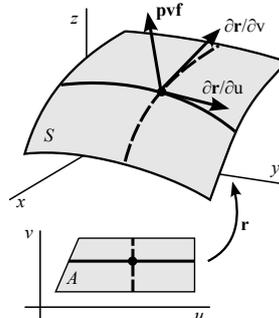
Suponemos que la superficie  $S = \mathbf{r}(A)$  es  $C^1$  [que lo es  $\mathbf{r}$ ]. Entonces:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u} \mathbf{k} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v} \mathbf{k}$$

serán unos vectores tangentes a las curvas contenidas en  $S$  obtenidas tomando, respectivamente,  $v = k$  y  $u = k$ . Su producto vectorial

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \text{ será un vector normal a } S.$$

producto vectorial fundamental



Si la superficie se puede escribir en la forma  $z = f(x, y)$  una posible parametrización de  $S$  es  $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$ , con  $(x, y) \in A$  proyección de  $S$  sobre  $z = 0$ . El producto vectorial fundamental resulta ser en este caso:

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = (-f_x, -f_y, 1).$$

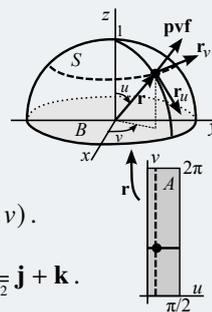
**Ej 1a.** Parametricemos la semisuperficie esférica unidad superior. Una posibilidad:

$$\begin{aligned} x(u, v) &= \cos u \cos v & u \in [0, 2\pi] & \quad \mathbf{r}_u = \cos u \cos v \mathbf{i} + \cos u \sin v \mathbf{j} - \sin u \mathbf{k} \\ y(u, v) &= \cos u \sin v & v \in [0, \pi/2] & \quad \mathbf{r}_v = -\sin u \sin v \mathbf{i} + \sin u \cos v \mathbf{j} \\ z(u, v) &= \sin u \end{aligned}$$

$$\text{Entonces } \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos u \cos v & \cos u \sin v & -\sin u \\ -\sin u \sin v & \sin u \cos v & \cos u \end{vmatrix} = \sin^2 u \cos v \mathbf{i} + \sin^2 u \sin v \mathbf{j} + \sin u \cos u \mathbf{k} = \sin u (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u) = \sin u \mathbf{r}(u, v).$$

O bien:

$$(x, y, \sqrt{1-x^2-y^2}), (x, y) \in B \text{ círculo unidad y } \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \mathbf{i} + \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$



### Integrales de superficie de campos escalares

Sea  $S$  la superficie  $C^1$  dada por  $\mathbf{r} : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  y sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(\mathbf{r}(u, v))$  es continua. Entonces:  $\iint_S f dS \equiv \iint_A f(\mathbf{r}(u, v)) \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du dv$ .

[Y si  $S$  está formada por varias superficies  $C^1$  se suman las integrales].

[Como en las de línea se prueba que la integral de una  $f$  escalar no depende de la parametrización].

[Cuando  $f \equiv 1$  el valor de la integral representa el **área de la superficie**  $S$ ].

**Ej 1b.** Halleemos la integral de  $f(x, y, z) = z^2$  sobre la superficie  $S$  del ejemplo 1a.

Primero con  $\mathbf{r}(u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$ .  $\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| = |\sin u| \|\mathbf{r}\| = \sin u$  [ $\mathbf{r}$  es unitario y  $\sin u \geq 0$ ].

$$\text{Por tanto, } \iint_S z^2 dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^2 u \sin u du dv = \frac{2\pi}{3} [-\cos^3 u]_0^{\pi/2} = \frac{2\pi}{3}.$$

Con la otra parametrización, el módulo del producto vectorial fundamental resulta ser:

$$\|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\| = \left[ \frac{x^2}{1-x^2-y^2} + \frac{y^2}{1-x^2-y^2} + 1 \right]^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \Rightarrow \iint_S z^2 dS = \iint_B \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \sqrt{1-r^2} dr d\theta = \frac{2\pi}{3} [-(1-r^2)^{3/2}]_0^1 = \frac{2\pi}{3}.$$

polares

Veamos que la integral de superficie nos calcula bien el área de  $S$ :

$$\text{área de } S = \iint_S 1 dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin u du dv = 2\pi [-\cos u]_0^{\pi/2} = 2\pi. \quad [\text{El de toda la superficie esférica era } 4\pi \cdot 1^2].$$

## Integrales de superficie de campos vectoriales

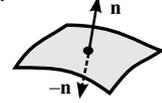
Sea  $S$  de  $C^1$  dada por  $\mathbf{r}: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  y sea  $\mathbf{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  continua sobre  $S$ . Entonces:

$$\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} \equiv \iint_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS \equiv \iint_A \mathbf{f}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) du \, dv = \iint_A \mathbf{f}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{n}(u, v) \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| du \, dv$$

[si  $\mathbf{n}$  es el vector unitario normal con el mismo sentido que el producto vectorial fundamental].

Se demuestra que, **salvo el signo**, esta integral es **independiente de la parametrización**.

[Hay dos normales unitarias a una superficie orientada:  $\mathbf{n}$  y  $-\mathbf{n}$  (que conste que las hay no orientadas como la banda de Moebius). Parametrizaciones diferentes proporcionan **p.v.f.** con el sentido de una o de otra.  $\mathbf{f}$ ,  $S$  y el sentido de la normal sí determinan la integral].



[El significado físico de esta integral es **flujo del campo vectorial  $\mathbf{f}$  a través de la superficie  $S$** ].

**Ej 1c.** Integremos  $\mathbf{f}(x, y, z) = (x, y, z)$  sobre la semisuperficie esférica  $S$  de siempre.

$$\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \iint_A \mathbf{r}(u, v) \cdot \left[ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{r unitario}}}{\text{sen } u \, \mathbf{r}(u, v)} \right] du \, dv = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \text{sen } u \, du \, dv = 2\pi \left[ -\cos u \right]_0^{\pi/2} = 2\pi.$$

Con la otra parametrización:  $\mathbf{f} \cdot (\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y) = (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2}) \left( \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, 1 \right) \Rightarrow$

$$\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \iint_B \frac{dx \, dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{polares}}}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r(1-r^2)^{-1/2} dr \, d\theta = 2\pi \left[ -(1-r^2)^{1/2} \right]_0^1 = 2\pi.$$

## Teorema de la divergencia en el espacio (o de Gauss-Ostrogradsky)

Sea  $V$  una región del espacio limitado por una superficie conexa y sea  $\mathbf{f} \in C^1$ . Entonces:

$$\iiint_V \text{div } \mathbf{f} \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial V} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS, \text{ con } \mathbf{n} \text{ vector normal unitario exterior a } V.$$

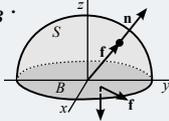
**Ej 1d.** Comprobémoslo para la  $\mathbf{f}(x, y, z) = (x, y, z)$  de arriba y la semiesfera unidad superior.

Por una parte:  $\iiint_V \text{div } \mathbf{f} \, dx \, dy \, dz = 3 \iiint_V dx \, dy \, dz = 3 \times \text{volumen de } V = 3 \times \frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi \cdot 1^3 = 2\pi.$

Por otra,  $\partial V$  tiene dos partes, la  $S$  superior y el círculo  $B$  de la base:  $\iint_{\partial V} = \iint_S + \iint_B.$

Para  $S$  es  $\mathbf{n} = \mathbf{f} = \mathbf{r}$  [ $\Rightarrow \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = 1$ ], y para  $B$  es  $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$  [ $\Rightarrow \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = (x, y, 0) \cdot (0, 0, -1) = 0$ ].

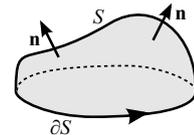
Por tanto,  $\iint_{\partial V} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_S 1 \, dS + 0 = \text{área de } S = 2\pi.$



## Teorema de Stokes

Sea  $S$  una superficie en el espacio limitada por la curva  $\partial S$  y sea  $\mathbf{f} \in C^1$ .

Entonces:  $\iint_S \text{rot } \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS = \oint_{\partial S} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$ , con  $\mathbf{n}$  vector unitario normal a  $S$  y con los sentidos de  $\mathbf{n}$  y de recorrido de  $\partial S$  indicados en el dibujo.



**Ej 1e.** Comprobamos el teorema para: i)  $\mathbf{f}(x, y, z) = (x, y, z)$  y ii)  $\mathbf{g}(x, y, z) = (0, 0, y)$ , y la  $S$  habitual.

Para i) es  $\text{rot } \mathbf{f} = \mathbf{0} \Rightarrow \iint_S \text{rot } \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0$ . Como  $\text{rot } \mathbf{f} = \mathbf{0}$ , sabemos que  $\mathbf{f}$  deriva de un potencial.

Casi a simple vista se ve que  $U = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$  cumple  $\nabla U = \mathbf{0}$ . Por tanto,  $\oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = 0$  también.

Para ii) debemos echar alguna cuenta más pues  $\text{rot } \mathbf{g} = \mathbf{i}$  [ $\Rightarrow \text{rot } \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} = (1, 0, 0) \cdot (x, y, z) = x$ ].

Así pues,  $\iint_S \text{rot } \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_S x \, dS = \int_0^{2\pi} \cos v \, dv \int_0^{\pi/2} \text{sen}^2 u \, du = 0$  [la primera integral lo es].

Integral que también se puede hacer:  $\iint_B \frac{x \, dx \, dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2(1-r^2)^{-1/2} \cos \theta \, dr \, d\theta = 0.$

Una posible parametrización de  $\partial S$  es  $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \text{sen } t, 0)$ ,  $t \in [0, 2\pi] \Rightarrow \mathbf{g}(\mathbf{c}(t)) = (0, 0, \text{sen } t)$ .

Por tanto,  $\oint \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} (0, 0, \text{sen } t) \cdot (-\text{sen } t, \cos t, 0) dt = \int_0^{2\pi} 0 \, dt = 0$ , como debía ser.

[La integral de línea a lo largo de la circunferencia se ha anulado, a pesar de no ser el campo conservativo. En este caso,  $\mathbf{g}$  y  $\mathbf{c}'$  eran ortogonales. Sobre otras curvas cerradas, la integral de  $\mathbf{g}$  será distinta de 0. Dijimos que para que  $\mathbf{g}$  fuese conservativo, su integral a lo largo de **todo** camino cerrado debía ser nula].

## 5.2. Soluciones de EDOs por medio de series

**Series de potencias y funciones analíticas** (junto a estas notas se incluye un **repaso de series**).

Una función  $f(x)$  es **analítica** en  $x=x_0$  si viene dada por una **serie de potencias** cerca de  $x_0$ :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-x_0)^k = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + c_3(x-x_0)^3 + \dots$$

A partir de ahora, suponemos que  $x=0$  (si no, con  $x-x_0=s$  estaríamos en ese caso):  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ .

A cada serie de potencias está asociado un **radio de convergencia**  $R$  tal que:  
 Si  $R=0$ , la serie sólo converge en  $x=0$ . Si  $R=\infty$ , converge para todo  $x$ .  
 Si  $0 < R < \infty$ , converge si  $|x| < R$  y diverge si  $|x| > R$  (en  $x = \pm R$  no se sabe).

Una serie de potencias, para  $|x| < R$  (donde converge), **se puede derivar e integrar término a término**:

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \dots, \quad f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} = 2c_2 + 6c_3x + \dots, \dots$$

$$\int \left( \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \right) dx = C + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} x^{k+1} = C + c_0x + \frac{c_1}{2}x^2 + \dots \quad \text{si } |x| < R.$$

Y también se pueden sumar, multiplicar, ... estas series como si fuesen polinomios:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad \text{si } |x| < R_f \quad \text{y} \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \quad \text{si } |x| < R_g \Rightarrow \text{Si } |x| < \min\{R_f, R_g\},$$

$$f(x) + g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} [a_k + b_k] x^k, \quad f(x)g(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \dots$$

Caso particular de estas series son las de **Taylor**  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ , de una  $f$  con infinitas derivadas en 0.

Muchas funciones elementales coinciden con su serie de Taylor donde converge. Por ejemplo:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad \text{sen } x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \text{cos } x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}, \quad \text{sh } x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \text{ch } x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad \ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}, \quad \arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}, \quad [1+x]^p = 1 + px + \frac{p(p-1)x^2}{2!} + \dots, \quad |x| < 1.$$

Son, pues, **analíticas**. [No lo son  $\ln x$  ó  $x^p$ ,  $p \neq 0, 1, \dots$  en  $x=0$ , cocientes con denominador nulo...].

### Puntos regulares

Sea [e]  $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ . Se dice que  $x=x_0$  es un **punto regular** de [e] si  $a$  y  $b$  son **analíticas** en  $x=x_0$ . En caso contrario se dice que  $x=x_0$  es **punto singular** de [e].

En 3.2 vimos las pocas lineales con coeficientes variables resolubles. Para el resto, si  $x=0$  es regular (si  $a$  y  $b$  se pueden escribir como series), parece adecuado suponer que también **la solución es una serie de potencias y llevarla a la ecuación para determinar sus coeficientes**. Empecemos con un ejemplo:

**Ej 1.** Resolvamos  $y'' + xy = 0$ .  $x=0$  es regular pues  $a(x)=0$  y  $b(x)=x$  son analíticas (con  $R=\infty$ ).

Llevamos una serie de potencias arbitraria y sus derivadas a la ecuación:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad y' = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}, \quad y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} \rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+1} = 0.$$

La solución deberá contener dos constantes arbitrarias. Intentamos **escribir los  $c_k$  en función de los dos primeros**  $c_0$  y  $c_1$ . Como han de ser 0 los coeficientes de cada potencia de  $x$ , deducimos:

$$x^0: 2c_2 = 0. \quad x^1: 6c_3 + c_0 = 0, \quad c_3 = -\frac{1}{6}c_0. \quad \dots \quad x^{k-2}: k(k-1)c_k + c_{k-3} = 0, \quad c_k = -\frac{1}{k(k-1)}c_{k-3}.$$

La última igualdad es la que se llama **regla de recurrencia** que expresa un coeficiente en función de los anteriores. De ella es fácil deducir los siguientes (siempre en función de  $c_0$  o  $c_1$ ):

$$c_5 = c_8 = \dots = 0; \quad c_4 = -\frac{1}{12}c_1; \quad c_6 = -\frac{1}{30}c_3 = \frac{1}{180}c_0; \quad c_7 = -\frac{1}{42}c_4 = \frac{1}{504}c_1; \quad \dots \rightarrow$$

$$y = c_0 \left[ 1 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^6 + \dots \right] + c_1 \left[ x - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{504}x^7 + \dots \right] \equiv c_0 y_1 + c_1 y_2, \quad c_0, c_1 \text{ indeterminados.}$$

Para que esto sea la solución general, las series deben converger y debe ser su wronskiano no nulo (lo segundo es fácil de comprobar y el teorema 1 nos asegurará que estas series convergen  $\forall x$ ).

Lo visto en el ejemplo anterior es lo que ocurre en general, como asegura este teorema:

Si  $x=0$  es regular y  $R$  es el menor de los radios de convergencia de  $a$  y  $b$ , la solución general de [e]  $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$  es  $y = c_0y_1 + c_1y_2 = c_0 \left[ 1 + \sum \right] + c_1 \left[ x + \sum \right]$ , con  $c_0, c_1$  arbitrarios, y las series, que tienen potencias  $x^k$  con  $k \geq 2$ , convergen, al menos, si  $|x| < R$ .

**Teor 1.** Los coeficientes las series se determinan de forma única probando una serie de potencias arbitraria en [e] [con  $a(x)$  y  $b(x)$  desarrolladas en serie, si no son polinomios] y expresando sus coeficientes  $c_k$ , para  $k \geq 2$ , en función de  $c_0$  y  $c_1$ .

La solución única de [e] con  $y(0) = y_0$ ,  $y'(0) = y'_0$  se obtiene haciendo  $c_0 = y_0$ ,  $c_1 = y'_0$ .

[Lo de los datos iniciales es inmediato a la vista de la forma de las soluciones].

En el siguiente ejemplo nos van a ir mejor las cosas, porque no sólo vamos a poder calcular unos términos sino que vamos a poder dar las expresiones generales de las series.

**Ej 2.**  $(1+x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$ , es decir,  $y'' + \frac{2x}{1+x^2}y' - \frac{2}{1+x^2}y = 0$  [ $a(x) = \frac{2x}{1+x^2}$  y  $b(x) = \frac{2}{1+x^2}$ ].

Que  $x=0$  es punto regular se deduce del hecho de que  $P/Q$ , con  $P$  y  $Q$  polinomios y  $Q(0) \neq 0$  es analítica siempre. Se tiene que además que **el radio  $R$  de su desarrollo**, simplificados los factores comunes de  $P$  y  $Q$ , **es la distancia al origen de la raíz (real o compleja) de  $Q$  más próxima**. En nuestro caso será, pues,  $R = 1$  ( $x = \pm i$  ceros del denominador).

Llevando la serie arbitraria a la ecuación inicial:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} [k(k-1)c_k x^{k-2} + k(k-1)c_k x^k] + \sum_{k=1}^{\infty} 2k c_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} 2c_k x^k = 0 \rightarrow$$

$$x^0: 2 \cdot 1 \cdot c_2 - 2 \cdot c_0 = 0 \rightarrow c_2 = c_0, \quad x^1: 3 \cdot 2 \cdot c_3 + [2-2]c_1 = 0 \rightarrow c_3 = 0, \dots$$

$$x^k: (k+2)(k+1)c_{k+2} + [k(k-1) + 2k - 2]c_k = 0.$$

La última igualdad nos da la regla de recurrencia, que, como en el anterior ejemplo, tiene sólo 2 términos (queda  $c_{k+2}$  en función de  $c_k$ ), pero otras veces pueden aparecer varios, lo que complica las cuentas. Para facilitar los cálculos, **factorizamos los polinomios que aparecen** hallando sus raíces:

$$c_{k+2} = -\frac{(k+2)(k-1)}{(k+2)(k+1)} c_k = -\frac{k-1}{k+1} c_k, \quad k=0, 1, \dots$$

Usando esta regla escribimos más  $c_k$  con el objetivo de hallar la expresión del **término general** de la serie (en muchos casos esto no será posible, pero ya dijimos que aquí sí):

$$c_4 = -\frac{1}{3}c_2 = -\frac{1}{3}c_0, \quad c_6 = -\frac{3}{5}c_4 = \frac{1}{5}c_0, \quad c_8 = -\frac{5}{7}c_6 = -\frac{1}{7}c_0, \dots$$

$$c_5 = 0 \text{ por estar en función de } c_3 \text{ que se anulaba. Análogamente } c_7 = c_9 = \dots = 0.$$

El numerador de  $c_{2k}$  es 1, el denominador es  $2k-1$  y el signo va alternando, así que:

$$c_{2k} = (-1)^{k+1} \frac{1}{2k-1} c_0, \quad k=2, 3, \dots$$

Agrupamos, como antes, los términos que acompañan a  $c_0$  y  $c_1$  (que quedan libres) y obtenemos:

$$y = c_0 \left[ 1 + x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{5}x^6 + \dots \right] + c_1 x = c_0 \left[ 1 + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k}}{2k-1} \right] + c_1 x = c_0 y_1 + c_1 y_2,$$

El teorema aseguraba que las series iban a converger al menos si  $|x| < 1$  y esto es lo que sucede: la serie de  $y_1$  (se ve fácilmente con el criterio del cociente) converge si  $|x| < 1$  y la 'serie' de  $y_2$  (truncada a partir de su segundo término) converge  $\forall x$ .

Que  $y_1$  e  $y_2$  son linealmente independientes se deduce (aquí y en general) del wronskiano en  $x=0$  de ambas, que es 1 (puesto que  $y_1(0)=1$ ,  $y'_1(0)=0$ ,  $y_2(0)=0$ ,  $y'_2(0)=1$ ).

Esta ecuación se podría resolver sin series. Como  $y_2 = x$  era una solución, según vimos en 3.2:

$$y_1 = y_2 \int y_2^{-2} e^{-\int a} dx = x \int x^{-2} e^{-\int \frac{2x}{1+x^2}} dx = x \int \frac{dx}{x^2(1+x^2)} = x \int \left[ \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right] dx = -1 - x \arctan x$$

[cuyo desarrollo, salvo el signo, coincide con el obtenido anteriormente].

Para resolver una [e] cerca de otro  $x_0$  regular, el **cambio de variable**  $s = x - x_0$  la llevaría a una ecuación en  $s$  para la que  $s=0$  es regular. Probaríamos entonces para hallar su solución la serie:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k s^k \quad \left[ \text{es decir, } y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k \right].$$

## Puntos singulares regulares

Si  $x = x_0$  es punto singular de  $[e] \ y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$  (si  $a$  o  $b$  o ambas no son analíticas en  $x = x_0$ ), no es aplicable el teorema 1. Pero también sabremos hallar las soluciones utilizando series si son ‘poco singulares’. Suponemos que nuestro **punto singular** es  $x = 0$ . Si queremos estudiar las soluciones cerca de otro  $x_0$ , el cambio  $s = x - x_0$  lleva el problema al estudio de las soluciones cerca de  $s = 0$ .

Escribamos  $[e]$  de otra forma. Multiplicando por  $x^2$  y llamando  $a^*(x) = xa(x)$  y  $b^*(x) = x^2b(x)$ :

$$[e^*] \quad \boxed{x^2 y'' + x a^*(x) y' + b^*(x) y = 0} \quad \boxed{x=0 \text{ es punto singular regular de } [e] - [e^*] \text{ si } a^* \text{ y } b^* \text{ son analíticas en } x=0.}$$

Se podrá escribir entonces para  $|x| < R$ , mínimo de los radios de convergencia de  $a^*(x)$  y  $b^*(x)$ :

$$a^*(x) = a_0^* + a_1^* x + \dots, \quad b^*(x) = b_0^* + b_1^* x + \dots \quad [\text{Normalmente será } a_0^* = a^*(0) \text{ y } b_0^* = b^*(0)].$$

La ecuación más sencilla como  $[e^*]$  es la de Euler (sus ‘series’  $a^*(x)$  y  $b^*(x)$  tienen un único término), que tiene soluciones  $x^r$  (a veces acompañadas de  $\ln x$ ). Es esperable que  $[e^*]$  tenga soluciones del tipo:

$$y = x^r \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 x^r + c_1 x^{r+1} + \dots \quad \text{para los } r \text{ que cumplan } \boxed{r(r-1) + a_0^* r + b_0^* = 0} \quad \text{polinomio indicial}$$

**Teorema de Frobenius**

Supongamos que el polinomio indicial tiene raíces reales  $r_1, r_2$  con  $r_1 \geq r_2$ .

Entonces siempre una primera solución  $y_1$  de  $[e^*]$  es de la forma  $y_1 = x^{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ ,  $c_0 \neq 0$ .

La segunda solución  $y_2$  linealmente independiente es, según los casos:

**a)** Si  $r_1 - r_2 \neq 0, 1, 2, \dots$ ,  $y_2 = x^{r_2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ ,  $b_0 \neq 0$ . **b)** Si  $r_1 = r_2$ ,  $y_2 = x^{r_1+1} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k + y_1 \ln x$ .

**c)** Si  $r_1 - r_2 = 1, 2, 3, \dots$ ,  $y_2 = x^{r_2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k + d y_1 \ln x$ ,  $b_0 \neq 0$ ,  $d \in \mathbf{R}$ .

Todas las series convergen al menos si  $|x| < R$  y los coeficientes  $c_k, b_k$  y la constante  $d$  de **c)** se hallan llevando cada una de las soluciones a la ecuación.

Podrían salir raíces complejas, pero nos limitamos a las reales. En Euler, si  $r_1$  y  $r_2$  eran distintas, las dos soluciones eran  $x^{r_1}$  y  $x^{r_2}$ . Si  $r$  era doble había una solución  $x^r$  y otra  $x^r \ln x$ . En el caso **c)** la constante  $d$  puede salir 0 y existir, pese a todo, dos soluciones de la forma  $x^r \sum$  (como en Euler).

**Ej 3.**  $\boxed{2xy'' + y' + xy = 0}$ , o sea,  $x^2 y'' + x \frac{1}{2} y' + \frac{x^2}{2} y = 0$ .  $a^*(x) = \frac{1}{2}$  y  $b^*(x) = \frac{x^2}{2}$  analíticas ( $R = \infty$ )  
 $x = 0$  singular regular.  $a_0^* = \frac{1}{2}$ ,  $b_0^* = 0 \rightarrow r(r-1) + \frac{1}{2}r + 0 \rightarrow r_1 = \frac{1}{2}$ ,  $r_2 = 0$ ,  $r_1 - r_2 \notin \mathbf{N}$ .

Las series solución son:  $y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+1/2}$ ,  $c_0 \neq 0$  e  $y_2 = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ ,  $b_0 \neq 0$  (convergen  $\forall x \in \mathbf{R}$ , según el teorema).

Llevando  $y_1$  a la ecuación (las series se derivan como las de potencias):

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[ 2(k + \frac{1}{2})(k - \frac{1}{2})c_k x^{k-1/2} + (k + \frac{1}{2})c_k x^{k-1/2} + c_k x^{k+3/2} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ k(2k+1)c_k x^{k-1/2} + c_k x^{k+3/2} \right] = 0 \rightarrow$$

(ahora las 3 series empiezan por  $k=0$ )

$$x^{-1/2}: 0 \cdot c_0 = 0 \text{ y } c_0 \text{ queda indeterminado como debía.} \quad x^{1/2}: 3c_1 = 0 \rightarrow c_1 = 0.$$

$$x^{k-1/2}: k(2k+1)c_k + c_{k-2} = 0, \quad c_k = -\frac{1}{k(2k+1)}c_{k-2}, \quad k=2, 3, \dots \Rightarrow c_3 = c_5 = \dots = 0 \text{ y además:}$$

$$c_2 = -\frac{1}{10}c_0, \quad c_4 = -\frac{1}{36}c_2 = \frac{1}{360}c_0, \dots \rightarrow y_1 = x^{1/2} \left[ 1 - \frac{1}{32}x^2 + \frac{1}{320}x^4 - \dots \right] \quad (\text{eligiendo, por ejemplo, } c_0 = 1).$$

Para la  $y_2$ :  $\sum_{k=2}^{\infty} 2k(k-1)b_k x^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} kb_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{k+1} = 0 \rightarrow x^0: b_1 = 0$ ;

$$x^1: [4+2]b_2 + b_0 = 0, \quad b_2 = -\frac{1}{6}b_0; \quad x^{k-1}: [2k(k-1)+k]b_k + b_{k-2} = 0, \quad b_k = -\frac{1}{k(2k-1)}b_{k-2}, \quad k=2, \dots$$

$$\rightarrow b_3 = b_5 = \dots = 0, \quad b_4 = -\frac{1}{28}b_2 = \frac{1}{168}b_0, \dots \rightarrow y_2 = 1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{168}x^4 - \dots$$

**Ej 4.**  $\boxed{x^2 y'' + (\frac{1}{4} - 4x^2)y = 0}$   $a^*(x) = 0$ ,  $b^*(x) = \frac{1}{4} - 4x^2$  analíticas en  $\mathbf{R}$ .  $x = 0$  singular regular.

$$r(r-1) - \frac{1}{4} = 0, \quad r = \frac{1}{2} \text{ doble} \rightarrow y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+1/2} \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} [k^2 c_k x^{k+1/2} - 4c_k x^{k+5/2}] = 0 \rightarrow$$

$$x^{1/2}: 0 \cdot c_0 = 0, \quad c_0 \text{ cualquiera}; \quad x^{3/2}: c_1 = 0; \quad x^{k+1/2}: k^2 c_k - 4c_{k-2} = 0; \quad c_k = \frac{4}{k^2} c_{k-2} \quad \text{regla de recurrencia}$$

$$\rightarrow c_2 = c_0, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = \frac{4}{16}c_2 = \frac{1}{4}c_0, \dots, \quad y_1 = x^{1/2} \left[ 1 + x^2 + \frac{1}{4}x^4 + \dots \right].$$

La otra solución tiene seguro logaritmo:  $y_2 = x^{3/2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k + y_1 \ln x$ . Es largo y no la calculamos.

### 5.3. Problemas más complicados por separación de variables

En los primeros (en **2 variables**) aparecen **EDOs desconocidas** que se suelen exigir usar las series de 5.2. [Tienen más variables, pero supondremos que son independientes de algunas]. También salen problemas de contorno en los que en vez de las condiciones habituales se usa la menos fuerte de la **acotación** (lo visto en 3.3 no es aplicable por ser  $p=0$  ó  $r=0$  en algún extremo del intervalo). Son **problemas singulares** como:

**Ej 1.** 
$$\begin{cases} xy'' + 2y' + \lambda xy = 0 \\ y \text{ acotada en } x=0, y(1)=0 \end{cases} \quad y'' + \frac{2}{x}y' + \lambda y = 0 \xrightarrow{e^{\int \frac{2}{x} dx} = x^2} [x^2 y']' + \lambda x^2 y = 0 \quad [\text{es } p(0)=r(0)=0].$$

Haciendo el cambio  $z = xy$  la ecuación pasa a ser la conocida  $z'' + \lambda z = 0$ . Se ve que no hay  $\lambda \leq 0$ .

Para  $\lambda > 0$ , la solución general será  $y = c_1 \frac{\cos wx}{x} + c_2 \frac{\sen wx}{x}$  (puesto que  $z = c_1 \cos wx + c_2 \sen wx$ ).

Imponemos los datos:  $y$  acotada  $\rightarrow c_1 = 0$  (ya que  $\frac{\cos wx}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \infty$ , mientras que  $\frac{\sen wx}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} w$ ).

Imponiendo el segundo:  $y(1)=0 \rightarrow \sen w = 0 \rightarrow \lambda_n = n^2 \pi^2, n = 1, 2, \dots, y_n = \left\{ \frac{\sen n\pi x}{x} \right\}$ .

Autofunciones ortogonales respecto al peso  $r(x) = x^2$ , pues  $\langle y_n, y_m \rangle = \int_0^1 x^2 \frac{\sen nx}{x} \frac{\sen mx}{x} dx = 0, n \neq m$ .

[Un dato típico como  $y(0) = y(1) = 0$  implicaría que  $c_1 = c_2 = 0$ , y la única solución sería  $y \equiv 0 \forall \lambda$ ].

La **ecuación de ondas**  $u_{tt} - c^2 \Delta u = 0$  en **esféricas** tiene, en general, 4 variables (el tiempo  $t$  y las  $\rho, \theta, \phi$ ), cuyas soluciones quedan determinadas (como en la recta) fijando unos datos de contorno y dos condiciones iniciales. Buscando soluciones que no dependen de los ángulos aparece la **ecuación de ondas en el espacio con simetría radial** (en  $\rho$  y  $t$ ). Resolvemos para ella un problema homogéneo:

**Ej 2.** 
$$\begin{cases} u_{tt} - [u_{\rho\rho} + \frac{2}{\rho}u_{\rho}] = 0, 1 \leq \rho \leq 2, t \in \mathbf{R} \\ u(\rho, 0) = f(\rho), u_t(\rho, 0) = g(\rho), u(1, t) = u(2, t) = 0 \end{cases}$$
 Separando variables en esta nueva EDP y haciendo uso de los datos de contorno:

$$u = R(\rho)T(t) \rightarrow \frac{R'' + \frac{2R'}{\rho}}{R} = \frac{T''}{T} = -\lambda \rightarrow \begin{cases} \rho R'' + 2R' + \lambda \rho R = 0, R(1) = R(2) = 0 \\ T'' + \lambda T = 0 \end{cases}$$

Arriba vemos la ecuación de  $R$  (ahora asociada a un problema regular porque estamos en  $[1, 2]$ ).

$$S = \rho R \rightarrow \begin{cases} S'' + \lambda S = 0 & \rho = s+1 \\ S(1) = S(2) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} S'' + \lambda S = 0 \\ S(0) = S(1) = 0 \end{cases}, \lambda_n = n^2 \pi^2, S_n = \{\sen n\pi s\}, R_n = \left\{ \frac{\sen n\pi \rho}{\rho} \right\}.$$

Para esos  $\lambda_n$  son  $T_n = \{\cos n\pi t, \sen n\pi t\} \rightarrow u(\rho, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [k_n \cos n\pi t + c_n \sen n\pi t] \frac{\sen n\pi \rho}{\rho}$ .

Las condiciones iniciales imponen:  $\sum_{n=1}^{\infty} k_n \frac{\sen n\pi \rho}{\rho} = f(\rho)$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} n\pi c_n \frac{\sen n\pi \rho}{\rho} = g(\rho)$ . (•)

Para hallar estos coeficientes del desarrollo debemos utilizar aquí el **peso**  $r(\rho) = \rho^2$  del problema:

$\langle R_n, R_n \rangle = \int_1^2 \rho^2 \frac{\sen^2 n\pi \rho}{\rho^2} d\rho = \frac{1}{2} \int_1^2 [1 - \cos 2n\pi \rho] d\rho = \frac{1}{2}, \langle f, R_n \rangle = \int_1^2 \rho^2 f(\rho) \frac{\sen n\pi \rho}{\rho} d\rho$  (igual  $g$ ), nos conduce a que:  $k_n = 2 \int_1^2 \rho f(\rho) \sen n\pi \rho d\rho, c_n = \frac{2}{n\pi} \int_1^2 \rho g(\rho) \sen n\pi \rho d\rho, n = 1, 2, \dots$

Se llegaría a lo mismo (en otros problemas no habrá atajos) observando que (•) se pueden reescribir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} k_n \sen n\pi \rho = \rho f(\rho) \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n\pi c_n \sen n\pi \rho = \rho g(\rho),$$

con lo que estamos desarrollando  $\rho f$  y  $\rho g$  en  $\sen n\pi \rho$ , y esto nos lleva a las fórmulas de antes.

Hay una tercera forma de llegar a esta solución, que sirve para resolver también otros problemas para las ondas en el espacio con simetría radial, incluso utilizando D'Alembert: es fácil ver que **el cambio**  $v = \rho u$  **la lleva la ecuación a la de la cuerda vibrante**, que resolvimos separando variables en 4.4.

El problema en la variable  $v$  pasa a ser: 
$$\begin{cases} v_{tt} - v_{\rho\rho} = 0, 1 \leq \rho \leq 2, t \in \mathbf{R} \\ v(\rho, 0) = \rho f(\rho), v_t(\rho, 0) = \rho g(\rho), v(1, t) = v(2, t) = 0 \end{cases}$$

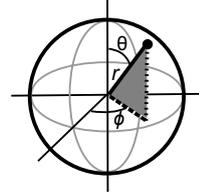
O también podríamos también aplicar **D'Alembert**, tras extender  $F(\rho) = \rho f$  y  $G(\rho) = \rho g$  de forma impar respecto a 1 y 2 (o impar respecto a 1 y 2-periódica). La solución sería entonces:

$$u(\rho, t) = \frac{1}{2\rho} [F^*(\rho+t) + F^*(\rho-t)] + \frac{1}{2\rho} \int_{\rho-t}^{\rho+t} G^*(s) ds,$$

que se puede poner en la forma  $u = \frac{1}{\rho} p(\rho+t) + \frac{1}{\rho} q(\rho-t)$  y ver como suma de ondas esféricas, cuyos radios disminuyen o crecen (la magnitud de la perturbación es inversamente proporcional al radio  $\rho$ ).

Un problema importante es el **problema de Dirichlet en una esfera** (bastante más complicado que el del círculo). Resolvemos únicamente el caso de **datos independientes de  $\phi$**  con dos variables. En los libros de cálculo se encuentra la expresión del laplaciano en esféricas. Sin el término en  $u_{\phi\phi}$ :

$$[\text{Pe}] \begin{cases} u_{\rho\rho} + \frac{2}{\rho}u_{\rho} + \frac{1}{\rho^2} \left[ u_{\theta\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}u_{\theta} \right] = 0, \quad \rho < R \\ u(R, \theta) = f(\theta), \quad \theta \in [0, \pi] \end{cases}$$



$$u = R(\rho)\Theta(\theta) \rightarrow \left[ R'' + \frac{2R'}{\rho} \right] \Theta + \frac{R}{\rho^2} \left[ \Theta'' + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \Theta' \right] = 0 \rightarrow \begin{cases} \Theta'' + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \Theta' + \lambda \Theta = 0 \\ \rho^2 R'' + 2\rho R' - \lambda R = 0 \end{cases}$$

Simplificamos la de  $\Theta$  con  $s = \cos\theta$  [ $\Theta' = -\sin\theta \frac{d\Theta}{ds}$ ,  $\Theta'' = \sin^2\theta \frac{d^2\Theta}{ds^2} - \cos\theta \frac{d\Theta}{ds}$ ]. Nos queda:

$$[\text{L}] \quad \left[ (1-s^2) \frac{d^2\Theta}{ds^2} - 2s \frac{d\Theta}{ds} + \lambda \Theta = 0 \right], \text{ llamada } \mathbf{ecuación de Legendre}.$$

Debe  $\Theta$  estar **acotada en**  $s = \pm 1$  [ $\theta = 0, \pi$  polos de la esfera]: (P)  $\begin{cases} (1-s^2)\Theta'' - 2s\Theta' + \lambda\Theta = 0 \\ \Theta \text{ acotada en } s = \pm 1 \end{cases}$ .

Para resolver [L] necesitamos series. Como  $a(s) = -\frac{2s}{1-s^2}$  y  $b(s) = \frac{\lambda}{1-s^2}$  son analíticas si  $|s| < 1$  probamos:

$$\Theta = \sum_{k=0}^{\infty} c_k s^k \rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} [k(k-1)c_k s^{k-2} - k(k-1)c_k s^k] - \sum_{k=1}^{\infty} 2k c_k s^k + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda c_k s^k = 0 \rightarrow$$

$$s^0: 2 \cdot 1 \cdot c_2 + \lambda c_0 = 0, \quad c_2 = -\frac{\lambda}{2 \cdot 1} c_0; \quad s^1: 3 \cdot 2 \cdot c_3 + (\lambda - 2)c_1 = 0, \quad c_3 = -\frac{\lambda - 2}{3 \cdot 2} c_1,$$

$$s^k: (k+2)(k+1)c_{k+2} + (\lambda - (k+1)k)c_k = 0, \quad c_k = -\frac{\lambda - (k-1)(k-2)}{k(k-1)} c_{k-2} \rightarrow c_4 = \frac{\lambda(\lambda-6)}{4!} c_0, \quad c_5 = \frac{(\lambda-2)(\lambda-12)}{5!} c_1, \dots$$

$$\Theta = c_0 \left[ 1 - \frac{\lambda}{2} s^2 + \frac{\lambda(\lambda-6)}{4!} s^4 + \dots \right] + c_1 \left[ s - \frac{\lambda-2}{6} s^3 + \frac{(\lambda-2)(\lambda-12)}{5!} s^5 + \dots \right] = c_0 \Theta_1 + c_1 \Theta_2$$

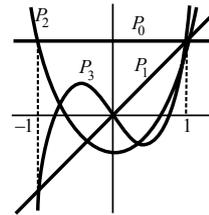
Si  $\lambda = n(n+1)$ , con  $n=0, 1, 2, \dots$ , o  $\Theta_1$  o  $\Theta_2$  se reduce a un polinomio de grado  $n$ :

$$\lambda=0 \rightarrow \Theta_1=1, \quad \lambda=6 \rightarrow \Theta_1=1-3s^2, \dots \quad \lambda=2 \rightarrow \Theta_2=s, \quad \lambda=12 \rightarrow \Theta_2=s-\frac{5}{3}s^3, \dots$$

El **polinomio de Legendre** de grado  $n$  es el polinomio solución que cumple  $P_n(1) = 1$ :

$$P_0=1, \quad P_1=s, \quad P_2=\frac{3}{2}s^2-\frac{1}{2}, \quad P_3=\frac{5}{2}s^3-\frac{3}{2}s, \dots$$

El resto de soluciones son series que se ve (es difícil) que no están acotadas a la vez en 1 y en -1. Por tanto los **autovalores** de (P) son  $\lambda_n = n(n+1)$ ,  $n=0, 1, 2, \dots$ , y sus **autofunciones** son los  $\{P_n(s)\}$ , con las propiedades habituales. Por ejemplo,  $P_n$  tiene  $n$  ceros en  $(-1, 1)$ . Y son **ortogonales**:  $\int_{-1}^1 P_n P_m ds = 0$ , si  $m \neq n$ ,  $\int_{-1}^1 P_n^2 ds = \frac{2}{2n+1}$ .



Sigamos con el [Pe]. En la variable inicial  $\theta$ , las autofunciones del problema de contorno (P) son:

$$\{P_n(s)\} = \{P_n(\cos\theta)\} \quad \left[ P_0=1, \quad P_1=\cos\theta, \quad P_2=\frac{3}{2}\cos^2\theta-\frac{1}{2}, \quad P_3=\frac{5}{2}\cos^3\theta-\frac{3}{2}\cos\theta, \dots \right]$$

Resolvemos la ecuación de Euler en  $R$  que apareció separando variables para los autovalores  $\lambda_n$ :

$$\rho^2 R'' + 2\rho R' - n(n+1)R = 0 \rightarrow \mu^2 + \mu - n(n+1) = 0, \quad \mu = n, -(n+1) \rightarrow R = c_1 \rho^n + c_2 \rho^{-(n+1)}$$

Deberá  $R$  estar **acotada** en  $\rho=0$  (centro de la esfera), con lo que:  $R_n = \{\rho^n\}$ ,  $n=0, 1, \dots$

La solución es del tipo:  $u(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n P_n(\cos\theta)$ . Sólo falta:  $u(R, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n P_n(\cos\theta) = f(\theta)$ .

Como la ecuación en forma autoadjunta pasa a ser  $(\sin\theta \Theta')' + \lambda \sin\theta \Theta = 0$ , el **peso** es  $r(\theta) = \sin\theta$ .

El denominador de los coeficientes es  $\langle P_n, P_n \rangle = \int_0^\pi [P_n(\cos\theta)]^2 \sin\theta d\theta \stackrel{s=\cos\theta}{=} \int_{-1}^1 [P_n(s)]^2 ds = \frac{2}{2n+1}$ .

Por tanto, los  $a_n$  de la serie de arriba vienen dados por  $a_n = \frac{2n+1}{2R^n} \int_0^\pi f(\theta) P_n(\cos\theta) \sin\theta d\theta$ ,  $n=0, 1, \dots$

[Estas integrales son difíciles (o imposibles) de calcular exactamente. salvo que  $f(\theta)$  sea un polinomio en  $\cos\theta$ ].

**Ej 3.** Si  $R=1$  y  $f(\theta) = \cos^2\theta$  se tiene (haciendo  $s = \cos\theta$ ):  $a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 s^2 P_n(s) ds$ .

Para escribir  $s^2$  en función de los  $P_n$  bastan  $P_0, P_1, P_2$ . Sólo hay que calcular 3 coeficientes:

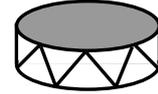
$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 s^2 ds = \int_0^1 s^2 ds = \frac{1}{3}. \quad a_1 = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 s^2 P_1 ds = 0 \text{ ya que } P_1 \text{ es impar (y también } s^2 P_1).$$

$$a_2 = \frac{5}{2} \int_{-1}^1 \left[ \frac{3}{2}s^4 - \frac{1}{2}s^2 \right] ds = \frac{5}{2} \int_0^1 [3s^4 - s^2] ds = \frac{5}{2} \left[ \frac{3}{5} - \frac{1}{3} \right] = \frac{2}{3} \rightarrow u(\rho, \theta) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\rho^2 + \rho^2 \cos^2\theta.$$

$$\text{O mejor, tanteando con los } P_n \text{ de arriba: } \cos^2\theta = \frac{2}{3} \left( \frac{3}{2} \cos^2\theta - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{3} \rightarrow a_2 = \frac{2}{3}, \quad a_0 = \frac{1}{3}.$$

[El problema en 3 variables necesita series dobles y EDOs más complicadas (la 'asociada de Legendre'). Sus soluciones contienen, además de los polinomios de Legendre, productos de ellos por cosenos y senos de  $\phi$  (los 'armónicos esféricos').]

Estudiamos la **vibración de una membrana circular** (de un tambor), suponiendo que hay simetría radial para simplificar (de nuevo será un problema en 2 variables). Y también suponemos que inicialmente es  $u_t = 0$ :



$$\begin{cases} u_{tt} - [u_{rr} + \frac{1}{r}u_r] = 0, & r \leq 1, t \in \mathbf{R} \\ u(r, 0) = f(r), & u_t(r, 0) = 0, u(1, t) = 0 \end{cases}$$

[Respecto de la ecuación en el espacio sólo cambia un 2 por un 1, pero es lo que complica los cálculos. Aquí no hay cambio que lleve a la cuerda vibrante].

$$u = RT \rightarrow \frac{T''}{T} = \frac{R'' + \frac{R'}{r}}{R} = -\lambda \rightarrow \begin{cases} rR'' + R' + \lambda rR = 0, & R \text{ acotada en } 0, R(1) = 0 \\ T'' + \lambda T = 0, & T'(0) = 0 \rightarrow \{\cos(\sqrt{\lambda}t)\} \end{cases}$$

De nuevo tenemos un **problema singular** para una EDO sólo resoluble con series. Empezamos quitando  $\lambda$  mediante un cambio de variable independiente (se prueba como en 3.3 que todos los  $\lambda > 0$ ):

$$s = \sqrt{\lambda}r = wr \text{ (regla de la cadena)} \rightarrow \frac{dR}{dr} = w \frac{dR}{ds}, \frac{d^2R}{dr^2} = w^2 \frac{d^2R}{ds^2} \rightarrow s \frac{d^2R}{ds^2} + \frac{dR}{ds} + sR = 0.$$

Esta ecuación es caso particular (con  $p=0$ ) de la llamada ecuación de **Bessel** de orden  $p$ :

$$[B] \quad s^2 R'' + sR' + [s^2 - p^2]R = 0, \quad p \geq 0,$$

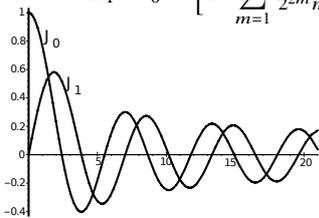
que resolvemos en general pues aparece en otros problemas (si no hay simetría radial, por ejemplo).

$s=0$  es **singular regular** con polinomio indicial  $r(r-1) + r - p^2$ ,  $r_1 = p$ ,  $r_2 = -p$ . Entonces

$$R_1 = s^p \sum_{k=0}^{\infty} c_k s^k \text{ (acotada en } s=0 \forall p, \text{ y convergente } \forall s) \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} [k(2p+k)c_k s^{p+k} + c_k s^{p+k+2}] = 0.$$

$$c_k = -\frac{c_{k-2}}{k(2p+k)}, \quad k=2,3,\dots, \quad c_1=0 \rightarrow c_3=\dots=0, \quad c_2 = -\frac{c_0}{2^2(p+1)}, \quad c_4 = \frac{c_0}{2^4 2(p+1)(p+2)}, \dots \rightarrow$$

$$R_1 = c_0 s^p \left[ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m} m!(p+1)\dots(p+m)} \right] \text{ A estas } R_1 \text{ (elegiendo un } c_0 \text{ concreto) se les llama}$$



**funciones de Bessel  $J_p$  de primera especie y orden  $p$ .**

$$\text{En particular son: } J_0(s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left[\frac{s}{2}\right]^{2m}, \quad J_1(s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+1)!} \left[\frac{s}{2}\right]^{2m+1},$$

cuyas gráficas están a la izquierda. Como  $J_0$  y  $J_1$ , todas las  $J_p$  oscilan y tienen infinitos ceros en  $(0, \infty)$ . Los de  $J_0$  son: 2.405, 5.520, 8.653, ...

Las soluciones  $R_2$  de Frobenius (**funciones de Bessel  $K_p$  de segunda especie**) **no están acotadas** en  $s=0$  (por el  $J_0 \ln s$ , o por aparecer  $s^{-p}$ ).

Si  $p = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ , aunque  $r_1 - r_2 \in \mathbf{N}$ , en la  $R_2$  no aparece el  $\ln s$  (caso **c**) de Frobenius, pero con  $d=0$ ).

No sólo esto, las  $J_{\frac{2n+1}{2}}$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ , son funciones elementales. En particular, si  $p = \frac{1}{2}$  es  $R = c_1 \frac{\sin s}{\sqrt{s}} + c_2 \frac{\cos s}{\sqrt{s}}$ .

Volvamos ya a nuestro problema de contorno singular en la variable inicial  $r$ :

$$[P] \quad \begin{cases} (rR')' + \lambda rR = 0 & \text{(el peso es } r) \\ R \text{ acotada en } r=0, R(1)=0 \end{cases}$$

La solución general de la ecuación, deshaciendo el cambio  $s = wr$ , es:  $R = c_1 J_0(wr) + c_2 K_0(wr)$ .

Por la primera condición es  $c_2 = 0$  ( $K_0$  no acotada). De la otra sale  $c_1 J_0(w) = 0$ . Por eso los autovalores son los  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$  cuyas raíces son los infinitos ceros de  $J_0$ . Y las autofunciones asociadas son  $R_n = \{J_0(w_n r)\}$ , que serán ortogonales respecto al peso  $r$ . Para esos  $\lambda_n$  las soluciones para la  $T$  son:  $T_n = \{\cos(w_n t)\}$ .

$$\text{Sólo falta imponer una condición: } u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(w_n t) J_0(w_n r) \rightarrow u(r, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0(w_n r) = f(r).$$

$$\text{Y entonces los } c_n \text{ vendrán dados por: } c_n = \frac{\langle f, R_n \rangle}{\langle R_n, R_n \rangle} = \frac{\int_0^1 r f(r) J_0(w_n r) dr}{\int_0^1 r J_0^2(w_n r) dr} = \frac{2}{J_1^2(w_n)} \int_0^1 r f(r) J_0(w_n r) dr.$$

Probemos la última igualdad (integremos el denominador). Para ello utilizaremos esta propiedad:

$$[s^n J_n]' = s^n J_{n-1} \rightarrow J_0' = -J_1, [s J_1]' = s J_0, \dots$$

Haciendo  $s = w_n r$  queda:  $\frac{1}{w_n^2} \int_0^{w_n} s J_0^2(s) ds = \frac{1}{2w_n^2} [s^2 (J_0^2(s) + J_1^2(s))]_0^{w_n} = \frac{1}{2} J_1^2(w_n) [ \text{era } J_0(w_n) = 0 ]$ .

$$\int s J_0^2 ds \stackrel{\uparrow}{=} \frac{s^2}{2} J_0^2 + \int s J_0 s J_1 ds = \frac{s^2}{2} J_0^2 + \frac{1}{2} [s J_1]^2$$

Pese a su aspecto complicado, la solución no lo es mucho más que la  $\sum k_n \cos(n\pi t) \sin(n\pi x)$  de la cuerda vibrante. En muchos libros y programas de ordenador se encuentran más ceros  $w_n$  de  $J_0$ , con los decimales que se precisen, y los valores de  $J_1(w_n)$ . Con un programa (tipo Maple o Sage) que reconozca la  $J_0$  y que sepa hacer integraciones aproximadas podemos obtener valores de los  $c_n$  para cualquier  $f$  que nos aparezca. Obsérvese que **las vibraciones de un tambor**, a diferencia de una cuerda, **no son periódicas** (los  $w_n$  no son múltiplos exactos unos de otros).

Resolvemos para acabar algún problema (homogéneo) en **tres variables** (sólo con las EDOs conocidas). Necesitaremos las **series de Fourier dobles**:

Sean  $X_n(x)$ ,  $x \in [a, b]$  e  $Y_m(y)$ ,  $y \in [c, d]$  las autofunciones de dos problemas de contorno con pesos  $r(x)$  y  $s(y)$ , y sea  $f(x, y) \in C^1([a, b] \times [c, d])$ . Entonces en  $(a, b) \times (c, d)$  se puede escribir  $f$  como la serie:

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{nm} X_n Y_m \quad \text{con} \quad c_{nm} = \frac{1}{\langle X_n, X_n \rangle} \frac{1}{\langle Y_m, Y_m \rangle} \int_a^b \int_c^d f(x, y) X_n Y_m r s \, dy \, dx,$$

donde  $\langle u, v \rangle$  es  $\int_a^b u v r \, dx$  ó  $\int_c^d u v s \, dy$ .

Pues  $f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m(x) Y_m$ ,  $C_m(x) = \frac{\langle f(x, y), Y_m \rangle}{\langle Y_m, Y_m \rangle}$ . Y ahora  $C_m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{nm} X_n$ ,  $c_{nm} = \frac{\langle C_m(x), X_n \rangle}{\langle X_n, X_n \rangle}$ .

Un caso particular son los desarrollos en **series trigonométricas dobles** de una  $f \in C^1([0, L] \times [0, M])$ :

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{nm} \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi y}{M} \quad \text{con} \quad b_{nm} = \frac{4}{LM} \int_0^L \int_0^M f(x, y) \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi y}{M} \, dy \, dx.$$

$$f(x, y) = \frac{1}{4} a_{00} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_{n0} \cos \frac{n\pi x}{L} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} a_{0m} \cos \frac{m\pi y}{M} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{nm} \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi y}{M}$$

$$\text{con} \quad a_{nm} = \frac{4}{LM} \int_0^L \int_0^M f(x, y) \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi y}{M} \, dy \, dx.$$

[O desarrollos parecidos en  $\sum \sin \cos$  o  $\sum \cos \sin$ , o impares, o con series en senos y cosenos].

**Ej 4.** Desarrollemos  $f(x, y) = x \cos y$ , en  $[0, \pi] \times [0, \pi]$  de dos formas distintas:

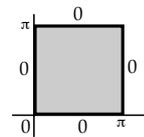
$$b_{nm} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} x \cos y \sin nx \sin my \, dy \, dx \rightarrow x \cos y = \frac{16}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[-1]^{n+1} m}{n[4m^2-1]} \sin nx \sin 2my.$$

$$a_{nm} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} x \cos y \cos nx \cos my \, dy \, dx \rightarrow x \cos y = \frac{\pi}{2} \cos y - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos[2n-1]x \cos y.$$

[ya estaba desarrollada en y]

Ya podemos resolver esta **ecuación del calor en un cuadrado**:

$$\begin{cases} u_t - k[u_{xx} + u_{yy}] = 0, & (x, y) \in (0, \pi) \times (0, \pi), t > 0 \\ u(x, y, 0) = f(x, y), & u(x, 0, t) = u(x, \pi, t) = u(0, y, t) = u(\pi, y, t) = 0 \end{cases}$$



[Evolución de las temperaturas de una placa, dadas las iniciales, si el borde se mantiene a 0°].

Buscamos soluciones:  $u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t) \rightarrow XYT' - k[X''Y + XY'']T = 0$

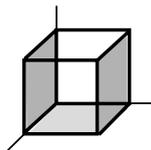
$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{k} \frac{T'}{T} - \frac{Y''}{Y} = -\lambda \rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ \frac{Y''}{Y} = \lambda + \frac{1}{k} \frac{T'}{T} = -\mu \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ Y'' + \mu Y = 0 \\ T' + k[\lambda + \mu]T = 0 \end{cases} \quad \text{[Una vez más dejamos para la T la expresión más complicada].}$$

Por las condiciones de contorno:  $X(0) = X(\pi) = Y(0) = Y(\pi) = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda = n^2, X_n = \{\sin nx\}, n = 1, 2, \dots \\ \mu = m^2, Y_m = \{\sin my\}, m = 1, 2, \dots \end{cases}$

$\rightarrow T_{nm} = \{e^{-(n^2+m^2)kt}\} \rightarrow u_{nm}(x, y, t) = \{e^{-(n^2+m^2)kt} \sin nx \sin my\}$  cumple la EDP y todas las condiciones de contorno, como cualquier combinación lineal de ellas. Esto nos lleva a la serie:

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{nm} e^{-(n^2+m^2)kt} \sin nx \sin my. \quad \text{Además: } u(x, y, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{nm} \sin nx \sin my = f(x, y)$$

$$\rightarrow b_{nm} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} f(x, y) \sin nx \sin my \, dx \, dy, \quad n, m \geq 1. \quad \text{[Como en la varilla, } u \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \text{].}$$



Ahora uno de **Laplace en un cubo** con condiciones de mixtas (de solución única):

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } (0, \pi) \times (0, \pi) \times (0, \pi) \\ u(x, y, 0) = f(x, y), & u = 0 & \text{en } x=0, x=\pi, z=\pi, & u_y = 0 & \text{en } y=0, y=\pi \end{cases} \quad u = XYZ \rightarrow$$

$$\frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = -\frac{X''}{X} = \lambda, \quad \frac{Z''}{Z} - \lambda = -\frac{Y''}{Y} = \mu \rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda X = 0, X(0) = X(\pi) = 0 \\ Y'' + \mu Y = 0, Y'(0) = Y'(\pi) = 0 \\ Z'' - [\lambda + \mu]Z = 0, Z(\pi) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = n^2, X_n = \{\sin nx\}, n = 1, 2, \dots \\ \mu = m^2, Y_m = \{\cos my\}, m = 0, 1, \dots \\ Z_{nm} = \{\text{sh}(\sqrt{n^2+m^2}[\pi-z])\} \end{cases}$$

$$u(x, y, z) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_{n0} \text{sh}(n[\pi-z]) \sin nx + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{nm} \text{sh}(\sqrt{n^2+m^2}[\pi-z]) \sin nx \cos my$$

Como  $u(x, y, 0) = f(x, y)$ , serán:  $c_{nm} = \frac{4}{\pi^2 \text{sh}(\pi \sqrt{n^2+m^2})} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} f(x, y) \sin nx \cos my \, dy \, dx \quad \begin{matrix} n = 1, 2, \dots \\ m = 0, 1, \dots \end{matrix}$

## 5.4. La transformada de Fourier

Sea  $f(x)$  definida en  $\mathbf{R}$  y absolutamente integrable  $[\int_{-\infty}^{\infty} |f| < \infty]$ .  
 La **transformada de Fourier** de  $f$  es la función  $\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx$ .

Si  $f$  es además  $C^1$  se puede recuperar a partir de  $\hat{f}$  usando la fórmula de inversión:

**Teor 1.**  $f \in C^1(\mathbf{R})$  y absolutamente integrable  $\Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{-ikx} dk \quad \forall x \in \mathbf{R}$ .

[Algunos libros no ponen  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  en la definición de  $\hat{f}$  y ponen  $\frac{1}{2\pi}$  en la fórmula de inversión; también se puede ver en la primera fórmula  $e^{-ikx}$  y en la segunda  $e^{ikx}$ ].

Se llama a  $f$  **transformada inversa** de Fourier de  $\hat{f}$ . Vamos a denotar también  $\mathcal{F}[f] = \hat{f}$  y  $\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}] = f$ . Es evidente que  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{F}^{-1}$  son lineales.

Veamos otras propiedades. La  $\mathcal{F}$  hace desaparecer derivadas:

**Teor 2.**  $f, f', f'' \in C(\mathbf{R})$  y absolutamente integrables  $\Rightarrow \begin{cases} \mathcal{F}[f'] = -ik \mathcal{F}[f] \\ \mathcal{F}[f''] = -k^2 \mathcal{F}[f] \end{cases}$

$$\mathcal{F}[f'(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [f(x) e^{ikx}]_{-\infty}^{\infty} - \frac{ik}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx = -ik \mathcal{F}[f(x)],$$

pues  $f \rightarrow 0$  si  $\int_{-\infty}^{\infty} |f|$  converge.  $\mathcal{F}[f''(x)] = -ik \mathcal{F}[f'(x)] = -k^2 \mathcal{F}[f(x)]$ .

Estas transformadas nos aparecerán resolviendo EDPs (probamos las 2 primeras):

**Teor 3.**  $\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(k) e^{iak}] = f(x-a)$ . Si  $h(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a, b] \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$ ,  $\mathcal{F}[h] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ikb} - e^{ika}}{ik}$ .  
 $\mathcal{F}(e^{-ax^2}) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-k^2/4a}$ .  $\mathcal{F}^{-1}(e^{-ak^2}) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-x^2/4a}$ .

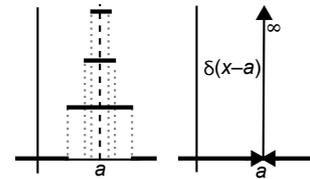
$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f} e^{-ika}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{-ik(x-a)} dk = f(x-a). \quad \mathcal{F}(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ikb} - e^{ika}}{ik}$$

Es totalmente falso que transformadas de productos sean productos (no lo es la integral de un producto). Pero a veces necesitaremos hallar transformadas inversas de productos. Necesitaremos entonces:

**Teor 4.** La **convolución** de  $f$  y  $g$  es la función:  $(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-s) g(s) ds$ .  
 Se tiene  $f * g = g * f$ , y  $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \mathcal{F}(g)$ , si las transformadas existen.

Hallemos la transformada de la ‘función’ **delta de Dirac**, cuya definición sería exige la llamada ‘teoría de las distribuciones’, pero que es fácil de manejar formalmente. La  $\delta(x-a)$  se puede ‘definir’ intuitivamente como el ‘límite’ cuando  $n \rightarrow \infty$  de

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } x \in [a - \frac{1}{2n}, a + \frac{1}{2n}] \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

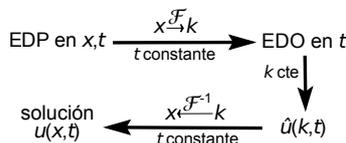


Esta  $\delta(x-a)$  tiene las siguientes propiedades (que nos bastarán para trabajar con ella):

$$\delta(x-a) = 0 \text{ si } x \neq a; \quad \int_b^c f(x) \delta(x-a) dx = \begin{cases} f(a) & \text{si } a \in [b, c] \\ 0 & \text{si } a \notin [b, c] \end{cases}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) dx = 1.$$

Su transformada es muy fácil de hallar:  $\mathcal{F}[\delta(x-a)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) e^{ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ika}$ .

Aplicar a una EDP en dos variables la  $\mathcal{F}$  en una de ellas lleva a una EDO (en la otra variable) para  $\hat{u}$ . Resolviendo la EDO se halla  $\hat{u}$ . Identificando la  $u$  de la que proviene o con el teorema 1 se puede a veces dar la solución, pero en muchos casos hay que dejar  $u$  en términos de integrales no calculables.



En cada uno de los pasos anteriores, hay que tener claro cuáles son las variables y cuales las constantes. En lo que sigue, haremos lo esquematizado a la izquierda, pues nuestras ecuaciones serán en  $(x, t)$  y siempre haremos transformadas en  $x$ .

**Ej 1.**  $\begin{cases} u_t + u_x = g(x) \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$  Aplicamos la  $\mathcal{F}$  en la variable  $x$  (se supone que  $u$ ,  $g$  y  $f$  son ‘buenas’, para que se pueden usar los teoremas). Utilizando la linealidad, el teorema 2 y el hecho de que:

$$\mathcal{F}[u_t] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} e^{ikx} dx = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{ikx} dx = \hat{u}_t \rightarrow \begin{cases} \hat{u}_t - ik \hat{u} = \hat{g}(k) \\ \hat{u}(k, 0) = \hat{f}(k) \end{cases}.$$

Esta lineal de primer orden en  $t$  tendrá solución con una constante para cada  $k$ :

$$\hat{u}(k, t) = p(k) e^{ikt} - \frac{\hat{g}(k)}{ik}, \text{ con } p \text{ arbitraria} \xrightarrow{\text{d.i.}} \hat{u} = \hat{f}(k) e^{ikt} + \hat{g}(k) \left[ \frac{e^{ikt} - 1}{ik} \right]$$

$$\xrightarrow{\text{Teor 3 y 4}} u(x, t) = f(x-t) + \sqrt{2\pi} g(x) * h(x) \text{ siendo } h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, t] \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}.$$

Como  $\int_0^t g(x-u) du = - \int_x^{x-t} g(s) ds$ , concluimos que  $u = f(x-t) + \int_{x-t}^x g(s) ds$ .

Obsérvese que la expresión anterior nos da la solución del problema si  $f \in C^1$  y  $g$  continua, aunque no sean absolutamente integrables, que era necesario para aplicar la transformada. Esta situación es típica utilizando la  $\mathcal{F}$ : se es riguroso sólo justificando el resultado final.

[Se puede resolver siguiendo 4.1:  $\frac{dt}{dx} = 1 \rightarrow \begin{cases} \xi = x-t \\ \eta = x \end{cases} \rightarrow u_\eta = g(\eta) \rightarrow u = p(x-t) + \int_0^x g(s) ds$ ,  
 $p(x) + \int_0^x g(s) ds = f(x) \rightarrow u = f(x-t) - \int_0^{x-t} g(s) ds + \int_0^x g(s) ds$ , como antes].

**Ej 2.**  $\begin{cases} u_{tt} + u_{tx} - 2u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$  Aplicando  $\mathcal{F}$ :  $\begin{cases} \hat{u}_{tt} - ik \hat{u}_t + 2k^2 \hat{u} = 0 \\ \hat{u}(k, 0) = \hat{f}(k), \hat{u}_t(k, 0) = 0 \end{cases}$ .

Resolviendo esta lineal con coeficientes constantes de coeficientes complejos:

$$\mu^2 - ik\mu + 2k^2 = 0 \rightarrow \mu = 2ik, -ik \rightarrow \hat{u}(k, t) = p(k) e^{2ikt} + q(k) e^{-ikt}$$

Imponiendo datos iniciales:  $p(k) = \frac{1}{3} \hat{f}(k)$ ,  $q(k) = \frac{2}{3} \hat{f}(k) \rightarrow \hat{u}(k, t) = \frac{2}{3} \hat{f}(k) e^{-ikt} + \frac{1}{3} \hat{f}(k) e^{2ikt}$ .

Y como  $\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(k) e^{ika}] = f(x-a)$ , será  $u = \frac{2}{3} f(x+t) + \frac{1}{3} f(x-2t)$  [solución válida  $\forall f \in C^2$ , tenga o no transformada].

De nuevo el ejemplo es resoluble también a través de las características:

$$B^2 - 4AC = 9 \text{ hipérbolica} \rightarrow \begin{cases} \xi = x+t \\ \eta = x-2t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \\ u_{xt} = u_{\xi\xi} - u_{\xi\eta} - 2u_{\eta\eta} \\ u_{tt} = u_{\xi\xi} - 4u_{\xi\eta} + 4u_{\eta\eta} \end{cases} \rightarrow u_{\xi\eta} = 0$$

$$\rightarrow u = p(\xi) + q(\eta) = p(x+t) + q(x-2t), \text{ solución general.}$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = p(x) + q(x) = f(x) & q(x) = \frac{1}{3} f(x) - \frac{C}{3} \\ u_t(x, 0) = p'(x) - 2q'(x) = 0, p(x) = 2q(x) + C \uparrow & p(x) = \frac{2}{3} f(x) + \frac{C}{3} \end{cases} \rightarrow u(x, t) = \frac{2}{3} f(x+t) + \frac{1}{3} f(x-2t).$$

Más interés que estos ejemplos, pues no tenemos ningún otro método para resolverlo, tiene:

Problema para el **calor en una varilla infinita**:  $(P) \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, x \in \mathbf{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), u \text{ acotada} \end{cases}$

Suponemos que  $u$  y  $f$  son buenas y tienden rápidamente a 0 en  $\pm\infty$  para poder utilizar los teoremas.

Aplicando la  $\mathcal{F}$  en la variable  $x$ :  $\begin{cases} \hat{u}_t + k^2 \hat{u} = 0 \\ \hat{u}(k, 0) = \hat{f}(k) \end{cases}$  cuya solución es  $\hat{u}(k, t) = \hat{f}(k) e^{-k^2 t}$ .

La solución será la convolución de las transformadas inversas de cada uno de los factores:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-(x-s)^2/4t} ds \equiv \int_{-\infty}^{\infty} G(x, s, t) f(s) ds \quad [1]$$

$G(x, s, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-(x-s)^2/4t}$  es la llamada **solución fundamental** de la ecuación del calor

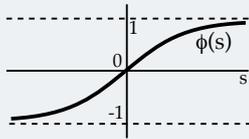
[es la temperatura del punto  $x$  en el tiempo  $t$  debida a una  $f$  inicial de la forma  $\delta(x-s)$ ].

Se prueba que [1] da realmente la solución de (P) con hipótesis más amplias de las que permiten aplicar  $\mathcal{F}$ . En concreto, para toda  $f$  acotada y continua a trozos [1] da la solución única de (P) que es continua para  $t > 0$ , menos en los puntos de  $t=0$  en que  $f$  es discontinua. [1] dice también que, según este modelo matemático, el calor viaja a **velocidad infinita**: si  $f > 0$  en un entorno de un  $x_0$  y nula en el resto, está claro que  $u(x, t) > 0$  por pequeño que sea  $t$  y grande que sea  $|x - x_0|$ . También se ve que  $u$  es  $C^\infty$  para  $t > 0$  aunque  $f$  sea discontinua (¡aunque sea  $f(x) = \delta(x-s)$ !). Son propiedades claramente diferentes de la ecuación de ondas.

**Ej 3.** Apliquemos [1] para resolver un par de problemas particulares.

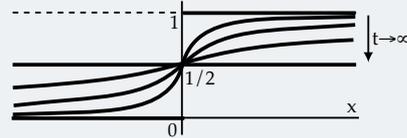
Sea primero  $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases} \rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-(x-s)^2/4t} ds$ . Haciendo el cambio  $v = \frac{s-x}{2\sqrt{t}}$ :

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x/2\sqrt{t}}^\infty e^{-v^2} dv = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2\sqrt{t}} e^{-v^2} dv + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-v^2} dv = \frac{1}{2} \left[ 1 + \phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) \right],$$



donde  $\phi(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^s e^{-v^2} dv$  es la llamada función error que aparece a menudo en la teoría de las probabilidades.

Como se observa, la solución, suave si  $t > 0$ , tiende hacia  $\frac{1}{2}$  para todo  $x$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .



Sea ahora  $f(x) = e^{-x^2}$ . Completamos cuadrados y hacemos un cambio de variable:

$$u = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^\infty e^{-s^2} e^{-\frac{(x-s)^2}{4t}} ds = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t+1}} \int_{-\infty}^\infty e^{-(\bullet)^2} ds \quad \text{con } \bullet = \frac{s\sqrt{4t+1} - \frac{x}{\sqrt{4t+1}}}{2\sqrt{t}}.$$

$$\text{Haciendo } z = \bullet \text{ se obtiene: } u = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{4t+1}} e^{-\frac{x^2}{4t+1}} \int_{-\infty}^\infty e^{-z^2} dz = \frac{1}{\sqrt{1+4t}} e^{-\frac{x^2}{1+4t}}.$$

Pero sale mucho más corto aplicando directamente  $\mathcal{F}$ :

$$\begin{cases} \hat{u}_t = -k^2 \hat{u} \\ \hat{u}(k,0) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-k^2/4} \end{cases} \rightarrow \hat{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{k^2(1+4t)}{4}} \rightarrow u = \frac{1}{\sqrt{1+4t}} e^{-\frac{x^2}{1+4t}}.$$

**Ej 4.**

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + 2tu = 0, & x \in \mathbf{R}, t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & u \text{ acotada} \end{cases}$$

Hallemos la solución para una  $f(x)$  general y deduzcamos la solución para  $f(x) \equiv 1$ .

[Como  $\mathcal{F}(1)$  no existe, no se puede resolver directamente el problema con  $u(x,0) = 1$ ].

$$\begin{cases} \hat{u}_t + (k^2 + 2t)\hat{u} = 0 \\ \hat{u}(k,0) = \hat{f}(k) \end{cases} \rightarrow u(\hat{k},t) = p(k) e^{-k^2 t - t^2} \xrightarrow{d.i.} u(\hat{k},t) = \hat{f}(k) e^{-t^2} e^{-k^2 t} \rightarrow$$

$$u(x,t) = e^{-t^2} f(x) * \mathcal{F}^{-1}(e^{-k^2 t}) = \frac{e^{-t^2}}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^\infty f(s) e^{-(x-s)^2/4t} ds.$$

$$\text{En particular, si } f(x) \equiv 1, \quad u = \frac{e^{-t^2}}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^\infty e^{-(x-s)^2/4t} ds = \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-u^2} du = e^{-t^2}.$$

$(s-x)/(2\sqrt{t}) = u$

$$\left[ \text{Parece que sería adecuado hacer un cambio de la forma } u = w e^{-t^2} \rightarrow \begin{cases} w_t - w_{xx} = 0 \\ w(x,0) = f(x) \end{cases}; \right.$$

de [1] se deduce nuestra fórmula y  $w \equiv 1$  es solución clara si  $f(x) \equiv 1$  (la varilla sigue a  $1^0$ ).

**Ej 5.**

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = \delta(x) \\ u(x,0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{u}_t + k^2 \hat{u} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ \hat{u}(k,0) = 0 \end{cases} \rightarrow \hat{u} = \frac{1 - e^{-k^2 t}}{k^2 \sqrt{2\pi}} \rightarrow u = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{1 - e^{-k^2 t}}{k^2} e^{-ikx} dk.$$

No sabemos hallar esta integral en general, pero sí podemos calcular, por ejemplo:

$$u(0,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{1 - e^{-k^2 t}}{k^2} dk = -\frac{1 - e^{-k^2 t}}{2\pi k} \Big|_{-\infty}^\infty + \frac{t}{\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-k^2 t} dk = \frac{t}{\pi} \sqrt{\frac{\pi}{t}} = \sqrt{\frac{t}{\pi}}$$

$$\left[ \int_{-\infty}^\infty e^{-k^2 t} dk = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^\infty e^{-s^2} ds \right] \nearrow$$

- Sean  $\mathbf{x} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{y} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ . Hallar y dibujar  $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ ,  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$  y  $\mathbf{x} + 3\mathbf{y}$ , y hallar el módulo de estos 3 vectores. Comprobar la desigualdad triangular y la de Cauchy-Schwartz para  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ . ¿Forman  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  un ángulo agudo u obtuso entre ellos? Hallar la distancia de  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{y}$  y el ángulo formado por  $\mathbf{y}$  y  $\mathbf{x} + 3\mathbf{y}$ .
- Sean  $\mathbf{a} = (1, 0, -1)$ ,  $\mathbf{b} = (1, 1, 0)$ . Hallar  $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ ,  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  y  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ . Hallar la distancia de  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$  y el ángulo que forman. Comprobar la desigualdad triangular para  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ . Escribir una expresión del plano que contiene esos vectores. Dar ecuaciones paramétricas del segmento que une  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  que lo recorran en sentidos opuestos.
- Con las curvas de nivel y algunas secciones dibujar las superficies definidas por:
  - $z = 4 - 2x - y$
  - $z = |y|$
  - $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$
  - $z^2 = x^2 + y^2 - 1$
- Sean: a)  $f(x, y) = xy$ , b)  $g(x, y) = y^2$ , c)  $h(x, y) = 2x - y$ , d)  $k(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1}$ . Dibujar algunas curvas de nivel. Hallar y dibujar su gradiente en algunos puntos. Hallar la ecuación del plano tangente en el punto  $(1, 1)$ .
- Calcular las derivadas parciales de segundo orden de:
 
$$f(x, y) = x^5y - 4x - xy^3 \quad g(x, y) = x e^{x+y} \quad h(x, y) = \frac{\cos(xy)}{x} \quad k(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$$
- Sea  $f(x, y) = e^{x-2y}$ . Dibujar la curva de nivel  $f = 1$  y  $\nabla f(2, 1)$ . Hallar  $\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$ . Precisar el vector unitario  $\bar{u}$  para el que es máxima la derivada direccional  $D_{\bar{u}}f(2, 1)$  y dar el valor de esa derivada máxima.
- Sea  $F(x, y, z) = x^3 - 2yz + e^x z^2$ . Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie  $F = 0$  en el punto  $(0, 1, 2)$ . Encontrar un  $\mathbf{u}$  unitario que sea perpendicular al vector  $(1, 0, 1)$  y tal que  $D_{\mathbf{u}}F(0, 1, 2) = 0$ .
- Sea  $F(x, y, z) = \frac{z-x}{y^2}$ . Hallar el plano tangente a  $F = 1$  en el punto  $(0, -1, 1)$ . Calcular  $\Delta F = F_{xx} + F_{yy} + F_{zz}$ .
- Sean  $f(x, y) = (x^3 - y)^2$  y  $\mathbf{c}(t) = (t, \ln t)$ . Dibujar las curvas de nivel  $f(x, y) = 0$  y  $1$ . Hallar la derivada de  $f$  en el punto  $(1, 0)$  en la dirección del vector unitario tangente la curva dada por  $\mathbf{c}$ .
- Sea la curva dada por  $\mathbf{c}(t) = (e^t, t^2)$ ,  $t \in [-2, 2]$ . Dibujarla y hallar: i) la recta tangente en el punto  $(e, 1)$  y un vector unitario normal a la curva en ese punto, ii) su punto de corte con la curva  $\mathbf{r}(s) = (s, s-1)$ ,  $s \in [0, 5]$ .
- Sean  $g(x, y) = \sqrt{20 - x^2 - y^2}$  y la curva  $\mathbf{c}(t) = (t, t^2)$ ,  $t \in [-2, 2]$ . a) Dibujar en el plano  $xy$  las curvas de nivel  $g(x, y) = 2\sqrt{5}, 4, 0$  y la curva  $C$  descrita por  $\mathbf{c}(t)$ . b) Hallar de dos formas la ecuación del plano tangente a la gráfica de  $g$  en  $(-1, 1)$ . c) Hallar la derivada de  $h(t) = g(\mathbf{c}(t))$  en  $t = -1$  utilizando la regla de la cadena.
- Sea  $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  de  $C^2$  y sea  $h(t) = f(t, -t, t^2)$ . Hallar, mediante la regla de la cadena,  $h''(t)$  en función de las derivadas de  $f$  y comprobar la fórmula obtenida en el caso de que sea  $f(x, y, z) = x + y + z^2$ .
- Sean  $\mathbf{f}(u, v) = (e^{u+2v}, 2u+v)$  y  $\mathbf{g}(x, y, z) = (2x^2 - y + 3z^3, 2y - x^2)$ . Calcular la matriz de la diferencial de  $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$  en  $(2, -1, 1)$ , i) utilizando la regla de la cadena, ii) componiendo y diferenciando.
- Sea  $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ . Dibujar las curvas de nivel  $f(x, y) = 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}$ , y  $\nabla f(2, 1)$ . Hallar algún vector  $\mathbf{u}$  unitario tal que la derivada  $D_{\mathbf{u}}f(2, 1)$  valga: i)  $0$ , ii)  $-\frac{3}{25}$ . Hallar  $\text{div}(\nabla f)$  en cartesianas y polares.
- Sea  $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2 + x^2 + y^2}$ . a) Dibujar las curvas de nivel  $f = C$  con  $C = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ , el corte con  $x = 0$  y su gráfica. b) En el punto  $(1, -1)$  hallar la ecuación de su plano tangente y la derivada de  $f$  según el vector  $\mathbf{u} = (2, 2)$ . ¿En la dirección de qué vector unitario  $\mathbf{v}$  es máxima la derivada direccional en ese punto? c) Hallar  $\Delta f$ .
- Sean  $\mathbf{f}(x, y) = (x^2, 1, y^2)$ ,  $g(x, y, z) = z$ . a) Hallar  $\text{div } \mathbf{f}$ ,  $\text{rot } \mathbf{f}$ ,  $\nabla g$ ,  $\Delta g$ ,  $\text{rot}(\nabla g)$ ,  $\text{div}(\text{rot } \mathbf{f})$ ,  $\nabla(\mathbf{f} \cdot \nabla g)$ ,  $\text{rot}(\mathbf{f} \times \nabla g)$ ,  $\text{rot}(\nabla(\mathbf{f} \cdot \nabla g))$ ,  $\text{div}(\text{rot}(\mathbf{f} \times \nabla g))$ . b) Probar que en general es:  $\text{rot}(g \mathbf{f}) = g \text{rot } \mathbf{f} + \nabla g \times \mathbf{f}$ ,  $\text{div}(g \mathbf{f}) = g \text{div } \mathbf{f} + \nabla g \cdot \mathbf{f}$ , y comprobarlo con los campos anteriores.
- Si  $\mathbf{F}(x, y, z) = xy \mathbf{i} + y^2 \mathbf{j} + xz \mathbf{k}$ , hallar:  $\text{div } \mathbf{F}$ ,  $\text{rot } \mathbf{F}$ ,  $\nabla(\text{div } \mathbf{F})$ ,  $\text{div}(\text{rot } \mathbf{F})$ ,  $\text{rot}(\text{rot } \mathbf{F})$ ,  $\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{F})$ .

- Hallar las integrales dobles  $\iint_D f \, dx \, dy$  de las  $f$  que se dan en los recintos  $D \subset \mathbb{R}^2$  que se indican:
  - $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $D = [0, 1] \times [0, 1]$
  - $f(x, y) = xy$ ,  $D$  región limitada por las curvas  $y = x$ ,  $y = x^2$
  - $f(x, y) = y e^{xy}$ ,  $D = [0, 1] \times [0, 1]$
  - $f(x, y) = y/x^2$ ,  $D$  triángulo de vértices  $(1, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(1, 1)$
  - $f(x, y) = x$ ,  $D$  círculo unidad
  - $f(x, y) = \sin x$ ,  $D$  triángulo acotado por  $y = 0$ ,  $y = x$ ,  $y = \pi - x$
- Sea  $f(x, y) = y^2 - x$ . **a]** Dibujar las curvas de nivel  $f = 0$  y  $f = -1$ . Hallar el plano tangente en  $(1, -1)$ . Hallar el  $\mathbf{u}$  unitario para el que la derivada  $D_{\mathbf{u}}f(1, -1)$  es mínima y el valor de esa derivada. Calcular  $\Delta f$  en cartesianas y también utilizando polares. **b]** Hallar  $\iint_D f \, dx \, dy$ , con  $D$  triángulo de vértices  $(0, 0)$ ,  $(-2, 2)$  y  $(1, 2)$ .
- Sea  $f(x, y) = \frac{y}{x+1}$ . **a]** Dibujar las curvas de nivel  $f(x, y) = 0, 1, -1$ , hallar  $\nabla f(0, 1)$ ,  $\Delta f(x, y)$  y la derivada de  $f$  en  $(0, 1)$  en la dirección del vector  $\mathbf{v} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ . **b]** Calcular  $\iint_D f$ , con  $D$  acotada por  $x = 0$ ,  $y = 1$  y  $x = y^2$ .
- Sea  $g(x, y) = y\sqrt{x^2 + y^2}$ . **a)** Hallar la ecuación del plano tangente en el punto  $(0, -2)$ . Hallar  $\Delta g$  (mejor polares). **b)** Calcular la integral doble  $\iint_D g$ , siendo  $D$  la parte del círculo  $x^2 + y^2 \leq 4$  y con  $x \leq 0$ ,  $y \geq 0$ .
- Sea  $f(x, y) = \frac{2y^2}{x^2 + y^2}$ . **a)** Dibujar las curvas de nivel  $f = 0$  y  $f = 1$ . Dar un  $\mathbf{u}$  unitario para el que  $D_{\mathbf{u}}f(1, 1) = 0$ . Calcular  $\Delta f(1, 1)$ . **b)** Hallar  $\iint_D f$  en polares, siendo  $D$  parte del círculo  $x^2 + y^2 \leq 2$  con  $y \geq 1$ .
- Calcular, trabajando en cartesianas y polares,  $\iint_D x \, dx \, dy$ , con  $D$  región dada por  $x^2 + y^2 \leq 2$ ,  $x \geq 1$ ,  $y \geq 0$ .
- Calcular el volumen del sólido acotado por la superficie:
  - $z = x^2 + y$  sobre el rectángulo  $[0, 1] \times [1, 2]$ .
  - $z = x^2$  sobre el semicírculo  $x^2 + y^2 \leq 1$ ,  $x \geq 0$ .
- Sea  $R$  una lámina que ocupa la región  $r \leq \cos \theta$ . Si  $\rho(r, \theta) = \cos \theta$  es su densidad, hallar su centro de masas.
- Calcular  $\iiint_V f$ , siendo:
  - $f(x, y, z) = e^y$  y  $V$  el sólido limitado por  $x = 0$ ,  $x = 2$ ,  $y = 1$ ,  $z = 0$ ,  $y + z = 0$ .
  - $f(x, y, z) = xy^2z^3$  y  $V$  el sólido limitado en  $x, y, z \geq 0$  por la superficie  $z = xy$  y los planos  $y = x$  y  $x = 1$ .
- Dibujar la gráfica de  $g(x, y) = 2e^{-\sqrt{x^2 + y^2}}$  y calcular el volumen del recinto que encierra con el plano  $z = 1$ .
- Sea  $F(x, y, z) = y + 2xz$ . **a)** Hallar un  $\mathbf{u}$  unitario para el que  $D_{\mathbf{u}}F(1, 2, -1) = 0$  y que además sea perpendicular al vector  $(1, -1, 0)$ . **b)** Calcular  $\iiint_V F$ , si  $V$  es el medio cilindro descrito por  $x^2 + y^2 \leq 1$ ,  $y \geq 0$ ,  $0 \leq z \leq 3$ .
- Calcular  $\iiint_V z \, dx \, dy \, dz$ , siendo  $V$  el sólido limitado por las superficies  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  y  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ , trabajando en coordenadas cilíndricas y esféricas.
- a)** Probar que la longitud de una curva dada en polares por  $r = f(\theta)$ ,  $\theta \in [\alpha, \beta]$  es  $L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2} \, d\theta$ . **b)** Si  $R$  es la región del primer cuadrante acotada por los ejes y la circunferencia  $r = 2(\cos \theta + \sin \theta)$ , calcular mediante integrales: i) el área de  $R$ , ii) la longitud del perímetro de  $R$ .
- Hallar  $\int_C f \, ds$  para la  $f$  y las curvas que se indican:
  - $f(x, y, z) = yz$ ,  $\mathbf{c}(t) = (t, 3t, 2t)$ ,  $t \in [1, 3]$ .
  - $f(x, y, z) = x + z$ ,  $\mathbf{c}(t) = (t, t^2, \frac{2}{3}t^3)$ ,  $t \in [0, 1]$ .
- Sea  $f(x, y) = \cos(y - 2x)$ . **a]** Hallar  $\nabla f(0, \frac{\pi}{2})$  y dibujarlo junto con la curva de nivel que pasa por  $(0, \frac{\pi}{2})$ . Escribir la ecuación del plano tangente a la gráfica de  $f$  en  $(0, \frac{\pi}{2})$ . **b]** Si  $D$  es el triángulo de vértices  $(0, 0)$ ,  $(0, -\pi)$  y  $(\frac{\pi}{2}, 0)$ , calcular  $\iint_D f \, dx \, dy$ . **c]** Calcular  $\int_C f \, ds$  siendo  $C$  el segmento que une  $(0, 0)$  y  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ .
- Si  $F(x, y, z) = \frac{y+2z}{x}$ , hallar: **a)**  $\nabla F$ ,  $\Delta F$ , el  $\mathbf{u}$  unitario que hace máxima  $D_{\mathbf{u}}F(1, 0, 1)$  y la ecuación del plano tangente a la superficie  $F = 2$  en el punto  $(1, 0, 1)$ . **b)**  $\iiint_V F$ ,  $V$  sólido acotado por  $x = 1$ ,  $x = 2$ ,  $y = 0$ ,  $y = 2$ ,  $z = 0$ ,  $y + 2z = 0$ . **c)** La integral de línea de  $F$  sobre el segmento que une los puntos  $(1, 0, 0)$  y  $(1, 2, 2)$ .
- Sea el campo vectorial  $\mathbf{f}(x, y, z) = (xy, x, -yz)$ . Hallar  $\operatorname{div} \mathbf{f}$  y  $\operatorname{rot} \mathbf{f}$ . Calcular la integral de línea de  $\mathbf{f}$  a lo largo del camino  $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t, 1)$ ,  $t \in [0, \pi]$  y la longitud de la curva descrita por  $\mathbf{c}(t)$ .

18. Hallar la integral de  $\mathbf{f}(x, y) = (xy, 0)$  entre  $(-1, 0)$  y  $(1, 0)$  a lo largo de: a) el eje  $x$ , b) la parábola  $y = 1 - x^2$ , c) la línea quebrada  $y = |x| - 1$ , d) la parte inferior de la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$ . ¿Es  $\mathbf{f}$  conservativo?
19. Sea  $\mathbf{f}(x, y) = (y, x)$ . a) Hallar  $\text{div } \mathbf{f}$ . Probar que  $\mathbf{f}$  deriva de un potencial y calcularlo. b) Hallar el valor de la integral de línea de  $\mathbf{f}$  desde  $(-1, 1)$  hasta  $(2, 4)$  a lo largo del segmento que une los puntos: i) directamente, encontrando una parametrización, ii) utilizando el potencial hallado en a).
20. Sea  $\bar{\mathbf{f}}(x, y) = (y + 3x^2, x)$ . a) Calcular  $\text{div } \bar{\mathbf{f}}$ . ¿Deriva  $\bar{\mathbf{f}}$  de un potencial? b) Determinar el valor de la integral de línea de  $\bar{\mathbf{f}}$  desde  $(1, 0)$  hasta  $(-1, 0)$  a lo largo de la semicircunferencia  $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$ . c) Si  $D$  es el semicírculo dado por  $x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0$ , hallar el valor de la integral doble  $\iint_D \text{div } \bar{\mathbf{f}}$ .
21. Sea  $f(x, y) = x^2 y$ . a) Dibujar las curvas de nivel  $f(x, y) = 0$  y  $1$ . Hallar  $\nabla f(-1, 1)$  y un  $\mathbf{u}$  unitario tal que  $D_{\mathbf{u}} f(-1, 1) = 1$ . b) Si  $D$  es la parte del círculo  $x^2 + y^2 \leq 1$  con  $x, y \geq 0$ , calcular  $\iint_D f$  en cartesianas y polares. c) Hallar la integral de línea de  $\mathbf{g}(x, y) = (2xy, x^2)$  entre  $(-1, 0)$  y  $(1, 1)$  siguiendo el segmento que los une.
22. Sea  $g(x, y, z) = y e^{2x-z}$ . a) Hallar  $\nabla g(1, -1, 2)$  y escribir un vector unitario  $\mathbf{u}$  para el que sea  $D_{\mathbf{u}} g(1, -1, 2) = 0$ . b) Calcular  $\iiint_V g$ , con  $V$  sólido limitado por los planos  $x=0, x=1, y=0, y=2, z=0$  y  $z=2-x$ . c) Hallar el valor de la integral de línea de i)  $g$ , ii)  $\nabla g$  desde  $(0, 0, 0)$  hasta  $(1, 2, 2)$  sobre el segmento que une los puntos.
23. Sea  $\mathbf{g}(x, y, z) = (3x^2 - y^2, -2xy, -xz)$ . a) Hallar  $\text{div } \mathbf{g}$  y  $\text{rot } \mathbf{g}$ . b) Dibujar el sólido  $V$  acotado por  $x=0, x=1, z=0, z=1-y^2$ , y calcular  $\iiint_V \text{div } \mathbf{g}$ . c) Calcular la integral de línea  $\int_C \bar{\mathbf{g}} \cdot d\bar{\mathbf{s}}$ , para  $\bar{\mathbf{c}}(t) = (1, t, 1-t^2), t \in [0, 1]$ .
24. Sea el campo vectorial  $\bar{\mathbf{g}}(x, y, z) = (z, y^2, x)$ . a) Calcular  $\text{div } \bar{\mathbf{g}}, \nabla(\text{div } \bar{\mathbf{g}})$  y  $\text{rot } \bar{\mathbf{g}}$ . b) Determinar el valor de la integral de línea  $\int_C \bar{\mathbf{g}} \cdot d\bar{\mathbf{s}}$ , siendo  $\bar{\mathbf{c}}(t) = (\cos t, \sin t, -\sin t)$ , con  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .
25. Sea  $\mathbf{f}(x, y, z) = (z^2, 2y, cxz)$ ,  $c$  constante. Hallar  $\text{div } \mathbf{f}$  y  $\text{rot } \mathbf{f}$ , precisar para qué valor de  $c$  deriva  $\mathbf{f}$  de un potencial  $U$  y calcularlo. Para este  $c$ , ¿cuánto vale la integral de línea de  $\mathbf{f}$  entre  $(0, 0, 0)$  y  $(1, 0, 1)$  a lo largo del segmento que une los puntos?
26. Sea  $\mathbf{f}(x, y, z) = 2xz \mathbf{i} + y \mathbf{j} + x^2 \mathbf{k}$ . a) Hallar  $\text{div } \mathbf{f}, \text{rot } \mathbf{f}, \nabla(\text{div } \mathbf{f})$  y  $\Delta(\mathbf{f} \cdot \mathbf{f})$ . b) Hallar  $\iiint_V \text{div } \mathbf{f} \, dx \, dy \, dz$ , siendo  $V$  el sólido limitado por los planos  $y=0, y=3, x=0, z=0, x+z=2$ . c) Hallar la integral de línea de  $\mathbf{f}$  desde  $(2, 3, 0)$  hasta  $(1, 3, 1)$  a lo largo del segmento que une los puntos.
27. Comprobar el teorema de Green  $\iint_D [g_x - f_y] \, dx \, dy = \oint_{\partial D} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$  para:
- $\mathbf{f}(x, y) = (y^2, 2x)$  y  $D$  la región del plano encerrada entre la parábola  $x = 4 - y^2$  y la recta  $y = x - 2$ .
  - $\mathbf{f}(x, y) = (0, xy^2)$  y  $D$  círculo  $x^2 + y^2 \leq 4$ .
  - $\mathbf{f}(x, y) = (y^2, xy)$  y  $D$  semicírculo girado dado por  $x^2 + y^2 \leq 2$  e  $y \geq x$ .
28. Sea  $D$  la región del plano limitada por las gráficas de  $y = e^{-x}, y = e^{x-2}$  y el eje  $y$ . a) Hallar  $\iint_D x e^x \, dx \, dy$ . b) ¿Cuánto vale la integral de línea de  $\mathbf{f}(x, y) = (xy e^x, 1)$  a lo largo de  $\partial D$ , en el sentido de las agujas del reloj?
29. Sea  $D$  el semicírculo dado por  $x^2 + y^2 \leq 9, x \geq 0$ . a) Calcular  $\iint_D x \, dx \, dy$  usando i) polares, ii) cartesianas. b) Si  $\mathbf{f}(x, y) = (-xy, y)$ : i) ¿Es  $\mathbf{f}$  conservativo? ii) Hallar  $\text{div } \mathbf{f}$ . iii) Hallar el valor de  $\oint_{\partial D} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$ .
30. Sea  $f(x, y) = y - 2xy$ . a) Dibujar las curvas de nivel  $f(x, y) = C$  con  $C = 0$  y  $1$ , y  $\nabla f(0, 1)$ . Hallar un vector unitario  $\mathbf{u}$  tal que la derivada de  $f$  en el punto  $(0, 1)$  en la dirección de  $\mathbf{u}$  sea  $0$ . Hallar  $\text{div}(\nabla f)$ . b) Calcular la integral doble  $\iint_D f \, dx \, dy$ , siendo  $D$  el triángulo de vértices  $(0, 0), (2, 0)$  y  $(0, 2)$ . c) Sea el campo vectorial  $\mathbf{g}(x, y) = (xy^2, xy)$ . ¿Deriva de un potencial? Hallar el valor de la integral de línea de  $\mathbf{g}$  entre  $(2, 0)$  y  $(0, 2)$  a lo largo del segmento que une estos puntos.

1. Hallar la solución general de estas EDOs de primer orden:

a)  $y' = -\frac{2y}{x}$       b)  $y' = -\frac{y}{x^2}$       c)  $y' = y+5$       d)  $y' = x + \frac{x}{y}$       e)  $y' = x + \frac{y}{x}$

2. Hallar la solución general  $T(t)$  y la que cumple el dato inicial  $T(0)=0$  de las ecuaciones lineales:

a)  $T' = 4 - 4T$       b)  $T' + 9T = t$       c)  $T' + (1+2t)T = 0$       d)  $T' = T + 2 \operatorname{sen} t$

3. Hallar la solución general y la que cumple el dato inicial  $y(1) = 1$ :

a)  $\frac{dy}{dx} = 2xy^2$       b)  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{3x} + 2$       c)  $\frac{dy}{dx} = e^{x-y}$

4. Resolver  $\frac{dy}{dx} = -\frac{12x+5y}{5x+2y}$ : i) como exacta, tras comprobar que lo es, ii) haciendo  $z = \frac{y}{x}$ .

5. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden:

a)  $y'' + 2y' + 5y = 0$       b)  $x^2y'' - 3xy' + 3y = 0$       c)  $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0$

6. Hallar la solución general de  $y'' + 2y' - 3y = f(x)$  para a)  $f(x) = e^{-x}$ , b)  $f(x) = e^x$ , c)  $f(x) = \operatorname{sen} x$ .

7. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones no homogéneas con coeficientes constantes:

a)  $y'' - 3y = e^{2x}$       b)  $y'' + y = x \cos x$       c)  $y'' + y = 6 \cos^2 x$       d)  $y'' + 4y' + 5y = x$       e)  $y'' - 2y' + y = x^2$

8. Hallar su solución general y la que cumple los datos iniciales  $y(0) = y'(0) = 0$ :

a)  $y'' + 2y' + 2y = 2$       b)  $y'' + 2y' + y = x + 2$       c)  $y'' + y = x^2$       d)  $y'' + y = 2xe^x$       e)  $y'' + y = \frac{2}{\cos^3 x}$

9. Hallar la solución general de estas ecuaciones de Euler no homogéneas:

a)  $xy'' + 2y' = x$       b)  $x^2y'' - 2y = 2$       c)  $x^2y'' + 4xy' + 2y = e^x$

10. Sea (e)  $x^2y'' - 3xy' = 4$ . Hallar la solución general de (e) viéndola como ecuación de Euler y haciendo  $y' = v$ . Hallar la solución particular de (e) que satisface  $y(1) = y'(1) = 3$ .

11. a) Resolver  $\frac{dy}{dx} = -\frac{y-2}{x}$  tratándola como: i) lineal, ii) separable, iii) exacta.

b) Hallar la solución general de  $x^2y'' + xy' = 2x$ : i) haciendo  $y' = v$ , ii) mirándola como ecuación de Euler.

12. Hallar la solución general de  $(x+1)y'' - y' = (x+1)^2$ : i) haciendo  $y' = v$ , ii) haciendo  $x+1 = s$ .

13. a) Hallar la solución general de  $y'' + y' = 2x - 1$ , i) como lineal de segundo orden, ii) haciendo  $y' = v$ .

b) Calcular la única solución que satisface los datos iniciales  $y(0) = y'(0) = 0$ .

c) Precisar cuántas soluciones de la ecuación cumplen los datos de contorno  $y'(0) = y'(1) = 0$ .

14. Precisar si i)  $\lambda = -2$  ii)  $\lambda = \frac{1}{4}$  son o no autovalores de  $\begin{cases} y'' - y' + \lambda y = 0 \\ y'(-2) = y(0) = 0 \end{cases}$ , dando la autofunción cuando lo sea.

15. a) Hallar la solución de  $y'' + \frac{1}{4}y = e^{x/2}$  que cumple los datos iniciales  $y(0) = y'(0) = 2$ .

b) Estudiar si  $\lambda = 0$  y  $\lambda = \frac{1}{4}$  son o no autovalores de  $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(-\pi) = y(\pi) = 0 \end{cases}$ , dando la autofunción cuando lo sea.

16. a) Hallar la solución de  $y'' + y' = 2e^x$  que cumple los datos iniciales  $y(0) = 0, y'(0) = 2$ .

b) Precisar si  $\lambda = 0$  y  $\lambda = -2$  son o no autovalores de  $\begin{cases} y'' + y' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = y'(1) = 0 \end{cases}$ , dando la autofunción cuando lo sea.

17. a) Hallar la solución de  $y'' + 2y' + y = 4e^x$  que cumple los datos iniciales  $y(0) = 0, y'(0) = 2$ .

b) Sea  $\begin{cases} y'' + 2y' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y'(1) = 0 \end{cases}$ . Precisar si  $\lambda = 1$  y  $\lambda = 2$  son autovalores dando la autofunción cuando lo sea.

18. Sea  $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) - 2y'(0) = y(1) - 2y'(1) = 0 \end{cases}$  Hallar sus  $\lambda_n$  y autofunciones  $\{y_n\}$ , y calcular  $\langle y_n, y_n \rangle \forall n$ . [Son calculables exactamente todos los  $\lambda_n$ , y hay uno negativo].
19. Sea  $\begin{cases} x^2 y'' + 3xy' + y + \lambda y = 0 \\ y(1) = y(e) = 0 \end{cases}$  a) Escribirla en forma autoadjunta y hallar el peso. b) Precisar si  $\lambda = 0$  es o no autovalor. c) Probar que  $\lambda = \pi^2$  lo es, dar su  $\{y_1\}$  y calcular  $\langle y_1, y_1 \rangle$ .
20. Sea  $\begin{cases} y'' + y' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = y'(1) = 0 \end{cases}$  Escribir la ecuación en forma autoadjunta. Precisar si  $\lambda = -2$  y  $\lambda = 0$  son o no autovalores. ¿Cuántas soluciones de  $y'' + y' - 2y = 4x$  cumplen esos datos?
21. a) Estudiar si  $\lambda = 0$  y  $\lambda = -2$  son o no autovalores de  $\begin{cases} x^2 y'' + \lambda y = 0 \\ y'(1) = y'(2) = 0 \end{cases}$ , dando la autofunción cuando lo sea.  
b) Precisar si hay o no una única solución de  $x^2 y'' - 2y = 2$  cumpliendo esos datos de contorno.
22. Hallar, si existe, un valor de  $a$  para el que  $\begin{cases} x y'' - y' = x^2 - a \\ y'(2) = y'(4) = 0 \end{cases}$  tenga infinitas soluciones.
23. Sea  $\begin{cases} y'' + \lambda y = \sin x \\ y(0) = y'(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$  Precisar, si lo hay, algún  $\lambda$  para el que: i) tenga solución única, ii) tenga infinitas soluciones, iii) no tenga solución.
24. Sea  $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y'(\frac{1}{2}) = 0 \end{cases}$  a) Hallar sin mirar apuntes sus autovalores  $\lambda_n$ , autofunciones  $\{y_n\}$  e  $\langle y_n, y_n \rangle$ .  
b) Calcular el desarrollo  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x)$  de  $f(x) = x$  en serie de autofunciones.
25. Hallar los desarrollos de a)  $f(x) = 1$  y b)  $f(x) = x^2$ ,  $x \in [0, 1]$ , en serie de i)  $\{\sin n\pi x\}$ , ii)  $\{\cos n\pi x\}$ . Dibujar con algún programa de ordenador algunas sumas parciales de las series obtenidas.
26. Sea  $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$ . Hallar su desarrollo en serie de Fourier  $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{2}$ .  
¿Cuánto debe sumar la serie para i)  $x = 1$ , ii)  $x = 2$ ? Comprobarlo sustituyendo en la serie.
27. Desarrollar en senos y cosenos en  $[-\pi, \pi]$ , dibujando las funciones hacia las que tienden las series:  
a)  $f(x) = \sin^2 x$                       b)  $f(x) = \sin \frac{x}{2}$ .
28. Sea (P)  $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(1) - y'(1) = 0 \end{cases}$  a) Probar que  $\lambda_0 = 0$  es autovalor y hallar la  $\{y_0\}$  asociada. Justificar gráficamente que hay infinitos  $\lambda_n > 0$  y que no hay  $\lambda_n < 0$ .  
b) Hallar el coeficiente que acompaña a  $y_0$  en el desarrollo de  $f(x) = 1$  en serie de autofunciones de (P).
29. Desarrollar  $f(x) = 1$  en serie de autofunciones del problema  $\begin{cases} y'' + 2y' + \lambda y = 0 \\ y(0) + y'(0) = y(\frac{1}{2}) = 0 \end{cases}$ .
30. Sea  $\begin{cases} y'' + \lambda y = \cos 3x \\ y'(0) = y'(\frac{\pi}{4}) + y(\frac{\pi}{4}) = 0 \end{cases}$  Calcular el primer término del desarrollo de  $f(x) = \cos 3x$  en serie de autofunciones del problema homogéneo.  
Precisar para i)  $\lambda = 0$ , ii)  $\lambda = 1$  cuántas soluciones tiene el problema no homogéneo.

- Hallar la solución general [  $y(x)$  y  $u(x, y)$  respectivamente ] de: i)  $x^2y'' = 2y$ , ii)  $x^2u_x = 2u$ .
- Para las siguientes EDPs de primer orden, hallar sus características y, con la regla de la cadena, escribirla en las variables  $(\xi, \eta)$ , calcular su solución general y la única que satisface el dato que se indica:
  - $y u_y - x u_x = x y^2$   
 $u(x, 2) = 0$
  - $u_y - u_x = 2(x+y)u$   
 $u(x, x) = 1$
  - $u_y + u_x = u + x$   
 $u(x, 0) = -x$
  - $2xy u_y - u_x = 2xy$   
 $u(1, y) = 0$
- Sea [E]  $2y u_y + x u_x = 4x^2y$ . a) Hallar sus características y, con la regla de la cadena, dar la ecuación para  $u_\eta$ . Calcular su solución general. b) Encontrar la única solución de [E] que satisface el dato inicial  $u(-2, y) = 3y$ . c) Precisar cuántas soluciones cumplen los datos: i)  $u(x, x^2) = 0$ , ii)  $u(x, x^2) = x^4$ .
- Sea  $(2x-y)u_y + x u_x = yu$ . a] Resolver  $\frac{dy}{dx} = \frac{2x-y}{x}$  (lineal, exacta o haciendo  $z = \frac{y}{x}$ ). b] Hallar su solución general y la única que satisface  $u(1, y) = 1$ . c] Escribir 2 soluciones distintas que cumplan el dato  $u(x, x) = e^x$ .
- Hallar la solución de los siguientes problemas:
  - $(2y-x)u_y + x u_x = 2y$   
 $u(1, y) = 0$
  - $2u_y + u_x = -u + e^{y-2x}$   
 $u(0, y) = 0$
  - $2y u_y - x u_x = 2u$   
 $u(-1, y) = y^3$
  - $u_y + 3y^2 u_x = \frac{2u}{y} + 6y^4 x$   
 $u(x, 1) = x^2$
- Reducir a forma canónica, si es necesario, y, si es posible, encontrar la solución general:
  - $u_{xx} + 4u_{xy} - 5u_{yy} + 6u_x + 3u_y = 9u$
  - $u_{yy} + 2u_{xy} + 2u_{xx} = 0$
  - $u_{xx} - 3u_x + 2u = y$
- a] Hallar la solución general  $y(x)$  de la EDO  $y'' + y = 3$ . b] Escribir la EDP  $u_{yy} - 2u_{xy} + u_{xx} + u = x + y$  en forma canónica y calcular su solución general.
- Escribir en forma canónica y dar la solución general de la ecuación de ondas  $u_{tt} - 4u_{xx} = 4$ ,  $x, t \in \mathbf{R}$ . Hallar, a partir de ella y usando algún otro camino, la solución que cumple  $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$ .
- Resolver:
  - $\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} + 2u_t + 4u_x = 0 \\ u(x, 0) = x, u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$
  - $\begin{cases} u_{tt} + 2u_{xt} = 2 \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$
  - $\begin{cases} u_{yy} + 2u_{xy} + u_{xx} - u = y \\ u(x, 0) = 1, u_y(x, 0) = 0 \end{cases}$
 [Escribir las ecuaciones en forma canónica, hallar su solución general e imponer los datos].
- Sea  $\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = 0, u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 1 \end{cases}$ . [La  $v$  del cambio salta a la vista].
- a] Escribir  $f(x) = 1$  en serie de autofunciones de  $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X'(\pi) = 0 \end{cases}$ . ¿Cuánto suma la serie si  $x = \frac{\pi}{2}$ ?  
b] Resolver por separación de variables  $\begin{cases} u_t - 4(1+2t)u_{xx} = 0, x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = 1, u(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 \end{cases}$
- Sea  $\begin{cases} u_t - 8t u_{xx} = 0, x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 \end{cases}$ , con a]  $f(x) = \cos \frac{x}{2}$ , b]  $f(x) = \frac{\pi}{4}$ .  
Hallar la solución en el caso a] y los 2 primeros términos no nulos de la serie solución en el caso b].
- a] Hallar la solución de  $T' = -4tT + e^{-2t^2}$  que cumple  $T(0) = 0$ .  
b] Resolver por separación de variables el problema no homogéneo  $\begin{cases} u_t - t u_{xx} = e^{-2t^2} \sin 2x, x \in (0, \frac{\pi}{2}), t > 0 \\ u(x, 0) = 0, u(0, t) = u(\frac{\pi}{2}, t) = 0 \end{cases}$ .
- a] Escribir el desarrollo de la función  $f(x) = \frac{\pi}{2} - x$  en serie de autofunciones del problema  $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}$ .  
b] Resolver  $\begin{cases} u_t - u_{xx} = \sin x, x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = \frac{\pi}{2} - x, u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$  [Llevar serie con autofunciones del homogéneo a la EDP y al dato inicial y calcular las infinitas  $T_n(t)$  no nulas].
- Resolver:
  - $\begin{cases} u_t - u_{xx} = 4 \sin 2x, x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = 2 \sin x, u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$
  - $\begin{cases} u_t - u_{xx} + u = e^{-2t}, x \in (0, \pi), t > 1 \\ u(x, 0) = \cos x, u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 \end{cases}$

16. Escribir la forma canónica de las ecuaciones y resolver los problemas utilizando diferentes caminos:

$$a) \begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = e^{-t}, & x, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = x^2, & u_t(x, 0) = -1 \end{cases} \quad b) \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 2x, & x, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

17. Sea  $\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, & x \in [0, \pi], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = 0, & u_t(x, 0) = \sin 3x \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$  . a) Resolverlo por separación de variables. b) Resolverlo utilizando, razonadamente, la fórmula de D'Alembert.

18. a) Hallar la solución de la ecuación  $y'' + y = 2$  que satisface el dato inicial  $y(0) = y'(0) = 0$  .

b) Hallar la solución del problema no homogéneo  $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 2 \sin x, & x \in [0, \pi], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$  .

19. Sea  $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = 0, & u_t(x, 0) = \begin{cases} 2x - x^2, & x \in [0, 2] \\ 0, & x \in [2, \infty) \end{cases}, & u(0, t) = 0 \end{cases}$  . Hallar: i)  $u(5, 2)$  , ii)  $u(3, 2)$  , iii)  $u(1, 2)$  .

20. Sea  $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in [0, 2\pi], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = \begin{cases} 2 \sin x, & x \in [0, \pi] \\ 0, & x \in [\pi, 2\pi] \end{cases}, & u_t(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = u(2\pi, t) = 0 \end{cases}$  . Dibujar  $u(x, \pi)$  y hallar su expresión con D'Alembert. Resolver por separación de variables y comprobar.

21. Resolver  $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in [0, \pi], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = 0, & u_t(x, 0) = x \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 \end{cases}$  . [Separar variables  $u = XT$  , hallar las  $X_n$  y las  $T_n$  , usando todos los datos  $= 0$  , y calcular los coeficientes de una serie imponiendo el dato inicial no nulo].

22. Resolver  $\begin{cases} u_{tt} + 4u_t - u_{xx} = 0, & x \in [0, \pi], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = \sin 2x, & u_t(x, 0) = u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$  .

23. Resolver por separación de variables estos problemas planos en cartesianas:

$$a) \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } (0, \pi) \times (0, \pi) \\ u(\pi, y) = 5 + \cos y \\ u(0, y) = u_y(x, 0) = u_y(x, \pi) = 0 \end{cases} \quad b) \begin{cases} \Delta u = y \cos x & \text{en } (0, \pi) \times (0, 1) \\ u_x(0, y) = u_x(\pi, y) = 0 \\ u_y(x, 0) = u_y(x, 1) = 0 \end{cases} \quad c) \begin{cases} \Delta u + 6u_x = 0 & \text{en } (0, \pi) \times (0, \pi) \\ u_y(x, 0) = 0, & u_y(x, \pi) = 0 \\ u_x(0, y) = 0, & u(\pi, y) = 2 \cos^2 2y \end{cases}$$

24. Resolver por separación de variables estos problemas planos y comprobar el resultado:

$$a) \begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, & r < 2, 0 < \theta < \pi \\ u_r(2, \theta) = \sin 3\theta, & u(r, 0) = u(r, \pi) = 0 \end{cases} \quad b) \begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, & r < 1, 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ u(1, \theta) = \cos 2\theta, & u_\theta(r, 0) = u_\theta(r, \frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

25. Sea  $\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, & r < 1, 0 < \theta < \pi \\ u_r(1, \theta) = \frac{\theta}{2}, & u(r, 0) = u(r, \pi) = 0 \end{cases}$  . Resolverlo por separación de variables y escribir los dos primeros términos no nulos de la serie solución.

26. Hallar los dos primeros términos no nulos de la serie solución de  $\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, & r < 1, 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ u(2, \theta) = \pi, & u(r, 0) = u_\theta(r, \frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$  .

27. Resolver por separación de variables estos problemas planos:

$$a) \begin{cases} \Delta u = 0, & 1 < r < 2 \\ u(1, \theta) = 0, & u(2, \theta) = 1 + \sin \theta \end{cases} \quad b) \begin{cases} \Delta u = \cos \theta, & r < 2 \\ u(2, \theta) = \sin 2\theta \end{cases} \quad c) \begin{cases} \Delta u = 0, & r < 4, 0 < \theta < \pi \\ u(4, \theta) = 2 \sin \frac{\theta}{2}, & u(r, 0) = u_\theta(r, \pi) = 0 \end{cases}$$

28. Resolver el problema plano  $\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 2, \theta \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ u_r(2, \theta) + ku(2, \theta) = 8 \cos 2\theta, & \text{para: i) } k=1, \text{ ii) } k=0. \\ u_\theta(r, 0) = u_\theta(r, \frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$

29. Resolver: a)  $r^2 R'' + rR' - \frac{1}{4}R = 7r^3$  y b)  $\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 7r \cos \frac{\theta}{2}, & r < 1, 0 < \theta < \pi \\ u(1, \theta) = u_\theta(r, 0) = u(r, \pi) = 0 \end{cases}$  .

30. Resolver: a)  $r^2 R'' + rR' - R = 5$  y b)  $\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = \frac{5}{r^2} \sin \theta, & 1 < r < 2, 0 < \theta < \pi \\ u_r(1, \theta) = u(2, \theta) = u(r, 0) = u(r, \pi) = 0 \end{cases}$  .

**Problemas adicionales de Métodos Matemáticos (temas 1 y 2)**  
[son de temas no centrales del curso o más complicados o demasiado parecidos a otros del 21/22]

### Cálculo diferencial en $\mathbf{R}^n$

- 1.1.** Sean  $\mathbf{x} = (2, 0, -3)$ ,  $\mathbf{y} = (0, 1, 3)$ . Hallar  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ ,  $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$  e  $\mathbf{y} \times \mathbf{x}$ . Encontrar dos vectores unitarios  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  que no sean múltiplo uno del otro y que ambos sean ortogonales a  $\mathbf{x}$ .
- 1.2.** a) Hallar la ecuación de la recta que pasa por  $(-2, 7)$  y es perpendicular al vector  $4\mathbf{i} + \mathbf{j}$ .  
b) Dar tres expresiones paramétricas distintas del segmento que une los puntos  $(-1, 0)$  y  $(1, 1)$ .
- 1.3.** Con las curvas de nivel y alguna sección dibujar la superficie definida por  $z^2 = 1 + x^2 + y^2$ .
- 1.4.** Probar que el campo escalar  $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}$  para  $(x, y) \neq (0, 0)$ , con  $f(0, 0) = 0$ , tiene derivadas parciales en  $(0, 0)$ , pero que no es diferenciable en dicho punto.
- 1.5.** Sea  $f(x, y) = \frac{x^2}{y}$ ,  $f(x, 0) = 0$ . Dibujar sus curvas de nivel. Precisar los puntos en los que  $f$  es continua. Hallar, si existen, el  $\nabla f$  y la derivada según el vector  $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$  en i)  $(0, 0)$  y en ii)  $(1, 1)$ .
- 1.6.** Sea  $f(x, y) = x \sin 2y$ . Hallar un vector unitario  $\mathbf{v}$  tal que  $D_{\mathbf{v}} f(1, 0)$  sea: i) máxima, ii) mínima, iii) 0, iv) 1.
- 1.7.** Sea  $f(x, y) = (y - 2x)^3$ . Dibujar las curvas de nivel  $f(x, y) = C$  con  $C = 0, 1$  y  $-1$ . Hallar  $\nabla f(0, 1)$  y  $\Delta f$ . Hallar el vector unitario  $\mathbf{u}$  para el que es máxima la derivada de  $f$  en el punto  $(0, 1)$  en la dirección de  $\mathbf{u}$ .
- 1.8.** Sea  $f(x, y) = (x + y)^2$ . a) Dibujar las curvas de nivel  $f = 0$  y  $f = 4$ . Hallar  $\nabla f(1, 1)$  y  $\Delta f$ . Precisar el vector unitario  $\mathbf{u}$  para el que la derivada direccional  $D_{\mathbf{u}} f(1, 1)$  es mínima y hallar el valor de esa derivada mínima.
- 1.9.** Sea  $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$ . a) Dibujar las curvas de nivel  $f = 8, 5, 0, -7$ , el corte con  $x = 0$  y su gráfica.  
b) Hallar un vector unitario  $\mathbf{u}$  tal que la derivada de  $f$  en el punto  $(2, 1)$  en la dirección de  $\mathbf{u}$  sea 0.  
c) Hallar la ecuación del plano tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $(2, 1)$ .  
d) Si  $\mathbf{c}(t) = (2t, t^3)$ , hallar la derivada de la función  $h(t) = f(\mathbf{c}(t))$  en  $t = 1$  utilizando la regla de la cadena.
- 1.10.** Una chinche camina sobre el plano  $xy$ . La temperatura en  $(x, y)$  es de  $e^{-x-2y}$  grados. Cuando la chinche está en  $(0, 0)$  se mueve hacia el este a una velocidad de 2 m/minuto y hacia el norte a una velocidad de 3 m/minuto. Desde el punto de vista de la chinche, ¿Con qué rapidez está cambiando la temperatura del suelo?
- 1.11.** Escribir la ecuación en derivadas parciales  $y^2 u_{yy} - x^2 u_{xx} = 0$  en las nuevas variables  $s = xy$ ,  $t = \frac{x}{y}$ , utilizando la regla de la cadena. Comprobar que la función  $u(x, y) = f(xy) + x g(\frac{x}{y})$ , con  $f, g \in C^2(\mathbf{R})$  satisface la ecuación.
- 1.12.** Si  $\mathbf{R} \xrightarrow{\mathbf{c}} \mathbf{R}^2 \xrightarrow{\mathbf{g}} \mathbf{R}^2$ , escribir, con la regla de la cadena,  $\frac{du}{dt}$  y  $\frac{dv}{dt}$  en función de las derivadas de  $u, v, x$  e  $y$ . Comprobar las fórmulas obtenidas en el caso particular en que  $\mathbf{c}(t) = (t, e^t)$  y  $\mathbf{g}(x, y) = (xy, y - x^2)$ .
- 1.13.** Sea  $f(x, y) = \frac{x+y}{1+xy}$ . a) Hallar el plano tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $(0, 2)$  y la recta tangente a la curva de nivel de  $f$  que pasa por dicho punto. b) Si  $h(u, v) = f(u^3 + v^2 - 1, e^v + 1)$ , calcular, mediante la regla de la cadena, la derivada direccional de  $h$  según el vector  $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$  en el punto  $(u, v) = (1, 0)$ .
- 1.14.** Sea  $f(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)^{1/4}$ . Dibujar aproximadamente su gráfica. Calcular  $\nabla f$  en cartesianas y polares. Estudiar en qué puntos es  $f$  diferenciable. Calcular  $\Delta f(0, 1)$ . Determinar en qué punto del segmento que une  $(0, 1)$  y  $(-2, 0)$  y en la dirección de qué vector el campo  $f$  crece más rápidamente.
- 1.15.** Sean  $\bar{r}(x, y) = (x, y)$ ,  $r = \|\bar{r}\|$ . Probar que:  $\nabla(\frac{1}{r}) = -\frac{\bar{r}}{r^3}$ ,  $\nabla(\log r) = \frac{\bar{r}}{r^2}$ ,  $\Delta(\frac{1}{r}) = \frac{1}{r^3}$ ,  $\Delta(\log r) = 0$ .

## Cálculo integral en $\mathbb{R}^n$

- 2.1.** Calcular  $\iint_R f$  para: a)  $f(x, y) = (xy)^2 \cos x^3 dx dy$ ,  $R = [0, 1] \times [0, 1]$ , b)  $f(x, y) = \log(xy)$ ,  $R = [1, 2] \times [1, 2]$ .
- 2.2.** Hallar  $\iint_D f dx dy$  para  $f(x, y) = e^{x-y}$  y  $D$  cuadrilátero de vértices  $(0, 0)$ ,  $(2, 2)$ ,  $(0, 2)$ ,  $(-1, 0)$ .
- 2.3.** Calcular  $\iint_D (2x-y) dx dy$ , siendo  $D$  semicírculo dado por  $x^2 + y^2 \leq 4$ ,  $x \geq 0$ , trabajando en cartesianas y polares.
- 2.4.** Sea  $f(x, y) = (y-2x+1)^2$ . a) Dibujar las curvas de nivel  $f(x, y) = 0$  y  $1$ . b) Hallar  $\Delta f$ . c) Precisar para qué  $\bar{u}$  unitario es mínima  $D_{\bar{u}} f(1, 2)$ . d) Hallar la integral  $\iint_D f$ , con  $D$  triángulo de vértices  $(0, -1)$ ,  $(0, 1)$  y  $(1, 1)$ .
- 2.5.** Sea  $f(x, y) = \frac{x}{y}$ . a) Dibujar las curvas de nivel  $f(x, y) = C$  con  $C = 0$  y  $1$ . Hallar el vector unitario  $\mathbf{u}$  con la dirección y sentido de  $\nabla f(1, 1)$  y el valor de la derivada  $D_{\mathbf{u}} f(1, 1)$ . Hallar  $\Delta f(x, y)$ . b) Si  $D$  es la parte del círculo  $x^2 + y^2 \leq 2$  con  $x \geq 0$  e  $y \geq 1$ : i) calcular  $\iint_D f dx dy$  (en ese orden), ii) expresar la integral en polares.
- 2.6.** Sea  $f(x, y) = x^2 y^2$ . a) Dibujar las curvas de nivel  $f(x, y) = 0$  y  $4$ . b) Hallar  $\nabla f(2, -1)$  y  $\Delta f$ . c) Hallar la ecuación del plano tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $(2, -1)$ . d) Calcular  $\iint_D f$ , siendo  $D$  la región del primer cuadrante limitada por la recta  $y = x$  y la curva  $y = x^3$ .
- 2.7.** Sea  $f(x, y) = x(x^2 + y^2)^{-1/2}$ . a) Dibujar las curvas de nivel  $f(x, y) = C$  con  $C = 0, 1$ . Hallar y dibujar  $\nabla f(0, 2)$ . Hallar la ecuación del plano tangente en el punto  $(0, 2)$ . b) Calcular la integral doble  $\iint_D f dx dy$ , siendo  $D$  la región del primer cuadrante limitada por las circunferencias  $x^2 + y^2 = 1$  y  $x^2 + y^2 = 4$ .
- 2.8.** Sea  $f(x, y) = x^2 + xy$ . a) Dibujar las curvas de nivel  $f = 0$  y el vector  $\nabla f(1, -1)$ . Hallar  $\text{div}(\nabla f)$ . Encontrar dos  $\mathbf{u}$  unitarios para los que sea  $D_{\mathbf{u}} f(1, -1) = 0$ . b) Si  $D$  es el círculo  $x^2 + y^2 \leq 4$ , hallar  $\iint_D f$  en polares y plantear y dar un paso del cálculo en cartesianas.
- 2.9.** Calcular el área  $A$  de una elipse de semiejes  $a$  y  $b$ :  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  con el cambio  $x = ar \cos \theta$ ,  $y = br \sin \theta$ .
- 2.10.** Hallar con un cambio de variable  $\iint_B (x^2 + y^2) dx dy$ , si  $B$  acotada por  $\begin{cases} xy = 1, & x^2 - y^2 = 1 \\ xy = 2, & x^2 - y^2 = 4 \end{cases}$  en el primer cuadrante.
- 2.11.** Calcular  $\iiint_B (2x + 3y + z) dx dy dz$ , donde  $B = [1, 2] \times [-1, 1] \times [0, 1]$ .
- 2.12.** Calcular  $\iiint_V x^2 \cos z dx dy dz$ , con  $V$  región acotada por los planos  $z = 0$ ,  $z = \pi$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x + y = 1$ .
- 2.13.** Sea  $F(x, y, z) = ye^{2x+z}$ . a) Hallar  $\|\nabla F(1, \frac{1}{2}, -2)\|$ , el  $\bar{u}$  unitario para el que es máxima  $D_{\bar{u}} F(1, \frac{1}{2}, -2)$  y el valor de la derivada direccional. b) Calcular  $\iiint_V F$ , con  $V$  sólido limitado por los planos  $y = 0$ ,  $y = 2$ ,  $x = 1$ ,  $z = 0$ ,  $2x + z = 0$ .
- 2.14.** Para  $F(x, y, z) = ze^{x-y}$  calcular: a)  $\nabla F$ ,  $\text{rot}(\nabla F)$ ,  $\text{div}(\nabla F)$ . b) El vector unitario  $\mathbf{u}$  para el que es máxima la derivada  $D_{\mathbf{u}} F(1, 1, 2)$ . c)  $\iiint_V F$ , con  $V$  sólido acotado por  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x + y = 1$ ,  $z = 0$ ,  $z = 2$ .
- 2.15.** Sea  $g(x, y, z) = z^2 - x - 2y$ . a) Escribir la ecuación del plano tangente a  $g = 0$  en el punto  $(4, 0, 2)$ . b) Calcular  $\iiint_V g$ , si  $V$  es el sólido dado por  $x^2 + y^2 \leq 4$ ,  $0 \leq z \leq 3$ .
- 2.16.** Calcular el volumen de la región acotada por el cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ , el plano  $z = 0$  y la superficie  $z + x^2 = 1$ .
- 2.17.** Hallar el volumen encerrado entre las superficies  $z = x^2 + y^2$  y  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$  en cilíndricas y en esféricas.
- 2.18.** Hallar la longitud de las curvas:
- a)  $(|t|, |t - \frac{1}{2}|)$ ,  $t \in [-1, 1]$       b)  $\begin{cases} x = 2 \cos t - \cos 2t \\ y = 2 \sin t - \sin 2t \end{cases}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  (cardioide)      c)  $y = \ln x$ ,  $x \in [1, e]$
- 2.19.** Un alambre está sobre un tramo de espiral  $r = e^\theta$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ . En cada punto  $(r, \theta)$  la temperatura es  $r$ . Calcular la temperatura media del alambre.
- 2.20.** Sea  $F(x, y, z) = ze^{2x+y}$ . a) Hallar la ecuación del plano tangente a  $F = 1$  en el punto  $(-1, 2, 1)$  y un vector unitario  $\mathbf{u}$  para el que la derivada direccional  $D_{\mathbf{u}} F(-1, 2, 1) = 0$ . b) Calcular  $\iiint_V F$ , con  $V$  sólido acotado por  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $2x + y = 2$ ,  $z = 0$ ,  $z = 2$ , y la integral de línea de  $F$  sobre el segmento que une  $(1, 0, 0)$  y  $(0, 2, 2)$ .

- 2.21.** Sean  $\mathbf{f}(x, y) = (y^2, 2xy)$  y la curva  $\mathbf{c}(t) = (\sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \sin t)$ ,  $t \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ . Dibujar la curva y precisar el punto en el que su recta tangente en  $(1, 1)$  corta el eje  $y$ . Hallar  $\text{div } \mathbf{f}$ . ¿Es  $\mathbf{f}$  conservativo? Calcular: i)  $\int_C \text{div } \mathbf{f} \, ds$ , ii)  $\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$ .
- 2.22.** Sean  $\bar{\mathbf{f}}(x, y) = (2xy, x^2 - 3)$  y  $\bar{\mathbf{c}}(t) = (2 - t^2, t)$ ,  $t \in [-2, 2]$ . **a)** Hallar  $\text{div } \bar{\mathbf{f}}$  y precisar si  $\bar{\mathbf{f}}$  es conservativo. **b)** Determinar el punto en el que la recta tangente en  $(1, -1)$  a la curva descrita por  $\bar{\mathbf{c}}(t)$  corta el eje  $x$ . **c)** Hallar el valor de  $\int_{\bar{\mathbf{c}}} \bar{\mathbf{f}} \cdot d\bar{\mathbf{s}}$  de dos formas diferentes.
- 2.23.** **a)** Sea  $f(x, y) = x^2 - y^2$ . Dibujar las curvas de nivel  $f(x, y) = 0$  y el vector  $\nabla f(1, 1)$ . Hallar la derivada de  $f$  en el punto  $(1, 1)$  en la dirección del vector  $\mathbf{v} = (-1, -1)$ . Hallar  $\Delta f(x, y)$ . **b)** Hallar la integral de línea de  $\mathbf{g}(x, y) = (2x, -2y)$  desde  $(1, 0)$  hasta  $(0, 1)$  a lo largo del tramo de circunferencia dado por  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $x, y \geq 0$ .
- 2.24.** Sea  $D$  el cuadrilátero cuyos vértices son  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(4, -1)$  y  $(2, -1)$ . **a)** Calcular  $\iint_D (x+2y) \, dx \, dy$ . **b)** Hallar la integral de línea de  $\mathbf{f}(x, y) = (1, \cos y)$  a lo largo de la frontera de  $D$ , en el sentido horario.
- 2.25.** Sean  $\bar{\mathbf{f}}(x, y) = (5x - y, 2x)$  y  $\bar{\mathbf{c}}(t) = (2 \cos t, 2 \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . **a)** Dibujar la curva descrita por  $\bar{\mathbf{c}}$  y precisar el punto en el que la recta tangente a esa curva en el punto  $(1, \sqrt{3})$  corta el eje  $x$ . **b)** Hallar: i)  $\int_{\bar{\mathbf{c}}} \text{div } \bar{\mathbf{f}} \, ds$ , ii)  $\int_{\bar{\mathbf{c}}} \bar{\mathbf{f}} \cdot d\bar{\mathbf{s}}$ . ¿Deriva  $\bar{\mathbf{f}}$  de un potencial?
- 2.26.** Calcular  $\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$  para  $\mathbf{f}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$ , en estos dos casos: **a)**  $\mathbf{c}(t) = (t, t, t)$ ,  $t \in [0, 1]$ . **b)**  $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .
- 2.27.** ¿Qué trabajo realiza la fuerza  $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  al mover una partícula a lo largo de la parábola  $y = x^2$ ,  $z = 0$ , desde  $x = -1$  hasta  $x = 2$ ?
- 2.28.** Sea  $\bar{\mathbf{g}}(x, y, z) = (z, x, y)$ . Calcular  $\text{div } \bar{\mathbf{g}}$  y  $\text{rot } \bar{\mathbf{g}}$ . Si  $\bar{\mathbf{c}}(t) = (2, \cos t, \sin t)$ ,  $t \in [-\pi, \pi]$ , hallar el valor de  $\int_{\bar{\mathbf{c}}} \bar{\mathbf{g}} \cdot d\bar{\mathbf{s}}$ .
- 2.29.** Sea el campo vectorial  $\mathbf{g}(x, y, z) = (2ye^{2x}, e^{2x}, 2z)$ . Calcular  $\text{div } \mathbf{g}$ ,  $\nabla(\text{div } \mathbf{g})$  y  $\text{rot } \mathbf{g}$ . Hallar el valor de la integral de línea  $\int_C \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s}$ , siendo  $\mathbf{c}(t)$  el segmento que une  $(0, 0, 1)$  y  $(1, 2, 1)$  en ese sentido.
- 2.30.** Hallar la integral de línea del campo vectorial  $\mathbf{f}(x, y, z) = \mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$  entre  $(1, 0, 2)$  y  $(0, 3, 0)$  a lo largo del segmento que une esos puntos. ¿Existe alguna curva que una los dos puntos para la que la integral sea 0?
- 2.31.** Sea  $\mathbf{g}(x, y, z) = (2e^{2x-y}, -e^{2x-y}, z)$ . **a)** Hallar  $\text{div } \mathbf{g}$  y  $\text{rot } \mathbf{g}$ . ¿Deriva  $\mathbf{g}$  de un potencial? **b)** Hallar el valor de la integral de línea  $\int_C \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s}$ , siendo  $\mathbf{c}(t) = (t^2, 4t, t)$ , con  $t \in [0, 2]$ .
- 2.32.** Sea  $\mathbf{f}(x, y, z) = e^{-z}\mathbf{i} + \mathbf{j} - xe^{-z}\mathbf{k}$ . **a)** Hallar  $\text{div } \mathbf{f}$  y  $\text{rot } \mathbf{f}$ . **b)** Hallar el valor de la integral de línea de  $\mathbf{f}$  desde  $(1, -1, 0)$  hasta  $(1, 0, 2)$  a lo largo del segmento que une los puntos.
- 2.33.** Sea  $\mathbf{g}(x, y, z) = (x^2, z, y)$ . **a)** Hallar  $\text{div } \mathbf{g}$  y  $\text{rot } \mathbf{g}$ . **b)** Calcular  $\iiint_V \text{div } \mathbf{g}$ , siendo  $V$  el sólido limitado por los planos  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $x+y=2$ ,  $z=0$  y  $z=1$ . **c)** Si  $\mathbf{c}(t) = (t, \cos t, \sin t)$ ,  $t \in [0, \pi]$ , hallar la longitud de la curva dada por  $\mathbf{c}$  y la integral de línea  $\int_C \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s}$ .
- 2.34.** Sea el semicírculo  $D$  dado por  $x^2 + y^2 \leq 1$  e  $y \geq 0$  y sea  $\mathbf{f}(x, y) = (x^2, 3xy)$ . Calcular la integral doble  $\iint_D 3y$  y la integral de línea de  $\mathbf{f}$  sobre la  $\partial D$  recorrida en el sentido opuesto a las agujas del reloj. ¿Debian tener el mismo valor? ¿Existe alguna  $U(x, y)$  tal que  $\nabla U = \mathbf{f}$ ?
- 2.35.** Comprobar el teorema de Green para  $\mathbf{f}(x, y) = (y^2, xy)$  y  $D$  el semicírculo definido por  $x^2 + y^2 \leq 1$ ,  $x + y \geq 0$ .
- 2.36.** Verificar el teorema de la divergencia para **a)**  $\mathbf{f}(x, y) = (x, y)$  y  $D$  el disco unidad  $x^2 + y^2 \leq 1$ . **b)**  $\mathbf{f}(x, y) = (2xy, -y^2)$  y  $D$  el cuadrado unidad  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

## Problemas adicionales de Métodos Matemáticos (temas 3 y 4)

[son de temas no centrales del curso o más complicados o demasiado parecidos a otros del 21/22]

### Ecuaciones diferenciales ordinarias

- 3.1.** Hallar la solución de: a)  $\begin{cases} y''+4y=8x^2 \\ y(0)=y'(0)=0 \end{cases}$ , b)  $\begin{cases} y''+y'-2y=1-2x \\ y(0)=1, y'(0)=-1 \end{cases}$ , c)  $\begin{cases} y''+2xy'=2x \\ y(1)=y'(1)=1 \end{cases}$ .
- 3.2.** Hallar la solución general de  $x^2y''+xy'-n^2y=0$ , para  $n=0, 1, 2, \dots$ .
- 3.3.** Hallar la solución general de las ecuaciones de Euler: a)  $x^2y''+xy'-y=4x^2$ , b)  $x^2y''+xy'-4y=4$ .
- 3.4.** Hallar la solución de  $xy''+y'=4x$  que cumple  $y(1)=y'(1)=0$ .
- 3.5.** Sea  $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y'(0)=y'(1)-2y(1)=0 \end{cases}$ . Probar gráficamente que tiene un autovalor negativo e infinitos positivos, indicando la autofunción. ¿Es  $\lambda=0$  autovalor?
- 3.6.** Sea  $\begin{cases} y''-2y'+y+\lambda y=0 \\ y(0)=y(1)=0 \end{cases}$ . Escribir la ecuación en forma autoadjunta. Hallar sus autovalores  $\lambda_n$  y sus autofunciones  $\{y_n\}$ , y calcular  $\langle y_n, y_n \rangle$ .
- 3.7.** Sea  $\begin{cases} y''+2y'+\lambda y=0 \\ y(0)=y(1)=0 \end{cases}$ . Escribir la ecuación en forma autoadjunta. Precisar si  $\lambda=-3$  es o no autovalor, dando la autofunción en el caso que lo sea.
- 3.8.** Estudiar si i)  $\lambda=-3$  ii)  $\lambda=2$  son autovalores de  $\begin{cases} y''-2y'+\lambda y=0 \\ y(0)=y(\pi)=0 \end{cases}$ , dando la autofunción cuando lo sea.
- 3.9.** Precisar si i)  $\lambda=0$  ii)  $\lambda=\frac{1}{4}$  son o no autovalores de  $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y(0)=y(\frac{\pi}{2})-2y'(\frac{\pi}{2})=0 \end{cases}$ , dando la autofunción cuando lo sea.
- 3.10.** Sea  $y''-y=3e^{-2x}$ . i) Hallar su solución general y la que satisface los datos iniciales  $y(0)=1, y'(0)=0$ . ii) ¿Cuántas soluciones de la ecuación cumplen los datos de contorno  $y'(0)=y'(1)=0$ ?
- 3.11.** Hallar la solución general de  $y''+4y'+3y=2xe^{-2x}$  y la que cumple los datos iniciales  $y(0)=y'(0)=-1$ . ¿Cuántas soluciones de esta ecuación cumplen las condiciones de contorno  $y(0)+y'(0)=y(1)=0$ ?
- 3.12.** ¿Hay o no una única solución de  $y''+y=2xe^x$  cumpliendo los datos de contorno  $y(0)=y(\pi)=0$ ?
- 3.13.** Sea  $y''+y'=x$ . a) Hallar la solución general y la única que cumple los datos iniciales  $y(0)=y'(0)=-1$ . b) Estudiar si hay o no una única solución cumpliendo los datos de contorno  $y'(0)=y'(1)=0$ .
- 3.14.** a) Precisar si  $\lambda=-3$  y  $\lambda=2$  son o no autovalores de  $\begin{cases} y''+2y'+\lambda y=0 \\ y(0)=y(\pi)=0 \end{cases}$  y dar la autofunción cuando lo sea. b) ¿Para alguno de esos dos  $\lambda$  hay sólo una solución de  $y''+2y'+\lambda y=e^{-x}$  que cumpla  $y(0)=y(\pi)=0$ ?
- 3.15.** Sea [C]  $y''+4y'+5y=e^{-2x}(2x-\pi)$ . Hallar su solución general y la que cumple  $y(0)=0, y'(0)=2$ . Escribir [C] en forma autoadjunta y precisar cuántas soluciones de la homogénea y de la no homogénea cumplen  $y(0)=y(\pi)=0$ .
- 3.16.** Sea  $\begin{cases} x^2y''+xy'+\lambda y=0 \\ 3y(1)+5y'(1)=y'(2)=0 \end{cases}$ . Precisar si  $\lambda=-1$  y  $\lambda=0$  son o no autovalores dando la autofunción si lo es. ¿Cuántas soluciones de  $x^2y''+xy'=x$  cumplen esos datos de contorno?
- 3.17.** a) Sea  $\begin{cases} y''-y'+\lambda y=0 \\ y(0)=y(\pi)=0 \end{cases}$ . Precisar si  $\lambda=0$  y  $\lambda=\frac{5}{4}$  son o no autovalores dando la autofunción cuando lo sea. [Imponer los datos a la solución general en cada caso]. b) i) Hallar la solución general de  $y''-y'=1$  y la única que cumple los datos iniciales  $y(0)=1, y'(0)=0$ . ii) ¿Cuántas soluciones de esta misma ecuación cumplen las condiciones de contorno  $y(0)=y(\pi)=0$ ?
- 3.18.** Desarrollar  $f(x)=\cos^3x, x \in [0, \pi]$ , en serie de i)  $\{\cos nx\}$ , ii)  $\{\sin nx\}$ , dibujando las funciones hacia las que tienden las series.
- 3.19.** Hallar los autovalores y las autofunciones, y desarrollar  $f(x)=x$  en las autofunciones de los problemas:
- a)  $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y(-1)=y(1)=0 \end{cases}$       b)  $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y(0)=y(1)+y'(1)=0 \end{cases}$
- 3.20.** Sea  $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y(0)=y'(\frac{3}{4})+\pi y(\frac{3}{4})=0 \end{cases}$ . a) Probar que  $\lambda=\pi^2$  es autovalor y dar su autofunción  $\{y_1\}$ . Estudiar si  $\lambda=0$  lo es. Probar gráficamente que hay infinitos  $\lambda_n > 0$ , dar sus  $\{y_n\}$  y hallar  $\langle y_n, y_n \rangle$ . b) Hallar el valor de  $c_1$  en el desarrollo en serie  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x)$  de  $f(x)=x$ . ¿Cuánto suma la serie si  $x=\frac{1}{2}$ ?

## Ecuaciones en derivadas parciales

4.1. Sea  $yu_y - xu_x = u + 2x$  y los datos iniciales: i)  $u(x, 0) = -x$ , ii)  $u(x, 2) = 7x$ . Hallar la única solución que satisfice uno de ellos y dos soluciones distintas que cumplan el otro.

4.2. Sean  $2yu_y + xu_x = 4yx^2u$  y los datos i)  $u(-2, y) = 1$ , ii)  $u(x, x^2) = 0$ . Hallar la solución para el que proporciona solución única.

4.3. Resolver: a)  $\frac{yu_y - 2u_x}{u(x, 1)} = \frac{2}{y}u$ , b)  $\frac{u_y + \frac{3}{2}u_x}{u(x, x)} = x - y$ , c)  $\frac{2yu_y - xu_x}{u(2, y)} = 2u + 4y^2$ , d)  $\frac{yu_y + (2y - x)u_x}{u(x, 1)} = x$ .

4.4. Resolver [hallar sus características y, con la regla de la cadena, la ecuación para  $u_\eta$ , dar su solución general e imponer el dato]:

a)  $\begin{cases} yu_y + xu_x = 0 \\ u(x, 1) = x \end{cases}$ , b)  $\begin{cases} u_y + 2u_x = 2yu \\ u(x, 1) = e^x \end{cases}$ , c)  $\begin{cases} yu_y + xu_x = 2u \\ u(x, 2) = 4x \end{cases}$ , d)  $\begin{cases} yu_y - xu_x = y \\ u(-1, y) = 3y \end{cases}$ ,  
 e)  $\begin{cases} u_y + u_x = -u \\ u(x, 0) = e^x \end{cases}$ , f)  $\begin{cases} u_y - 2u_x = (x + 2y)u \\ u(x, 1) = 2 \end{cases}$ , g)  $\begin{cases} 2xu_y + u_x = 4xy \\ u(1, y) = 1 \end{cases}$ , h)  $\begin{cases} u_y + 2yu_x = 3xu \\ u(x, 0) = 2x \end{cases}$ .

4.5. Sea  $u_{yy} - 4u_{xy} + 4u_{xx} = 2x + 4y$ . Escribirla en forma canónica y hallar su solución general.

4.6. Dar su forma canónica y hallar la solución pedida: a)  $\begin{cases} u_{yy} - 2u_{xy} + u_{xx} + u_y - u_x = 0 \\ u(x, 0) = 0, u_y(x, 0) = 1 \end{cases}$ , b)  $\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 2, x, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = x^2, u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$ .

4.7. Resolver  $\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 2, x, t \in \mathbf{R} \\ u(x, x) = x^2, u_t(x, x) = x \end{cases}$  a) Hallando su solución general e imponiendo los datos. b) Haciendo antes el cambio  $w = u - t^2$ .

4.8. a) Escribir el desarrollo de  $f(x) = 1$  en serie de autofunciones de  $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}$ .

b) Resolver  $\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = 0, x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 \end{cases}$  para: i)  $f(x) = 1$ , ii)  $f(x) = \cos \frac{x}{2}$ .

4.9. a) Calcular el desarrollo de  $f(x) = \pi x$  en las autofunciones del problema  $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X'(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$ .

b) Para  $\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, x \in (0, \frac{\pi}{2}), t > 0 \\ u(x, 0) = \pi x, u_x(0, t) = u_x(\frac{\pi}{2}, t) = 0 \end{cases}$ , hallar los 2 primeros términos no nulos de su serie solución.

4.10. a) Hallar el desarrollo de  $f(x) = 2x$  en serie de autofunciones de  $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X'(\pi) = 0 \end{cases}$ .

b) Sea  $\begin{cases} u_t - 2u_{xx} + u = 0, x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = 2x, u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 \end{cases}$ . Escribir los 3 primeros términos no nulos de su serie solución.

4.11. a) Desarrollar  $f(x) = \begin{cases} x, 0 \leq x \leq 1/2 \\ 0, 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$  en serie de  $\{\sin n\pi x\}$  y precisar cuánto suma de la serie si i)  $x = \frac{1}{4}$ , ii)  $x = \frac{1}{2}$ .

b) Resolver mediante separación de variables  $\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), u(0, t) = u(1, t) = 0 \end{cases}$ .

4.12. Sea  $\begin{cases} u_t - u_{xx} + 2tu = 0, x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 \end{cases}$ . Hallar la solución para a)  $f(x) = \cos 2x$  y el primer término no nulo de la serie solución si b)  $f(x) = 2x$ .

4.13. Resolver: a)  $\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = 0, x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) = x, u(0, t) = u_x(1, t) = 0 \end{cases}$ , b)  $\begin{cases} u_t - (2 + \cos t)u_{xx} = 0, x \in (0, \frac{\pi}{2}), t > 0 \\ u(x, 0) = 1, u_x(0, t) = u(\frac{\pi}{2}, t) = 0 \end{cases}$ .

4.14. Sea  $\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, x \in (0, 3\pi), t > 0 \\ u(x, 0) = 1, u(0, t) - 4u_x(0, t) = u(3\pi, t) = 0 \end{cases}$ . Resolverlo y escribir de forma exacta el primer término de la serie solución.

4.15. Resolver  $\begin{cases} u_t - u_{xx} + 2u = 0, x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) = x, u(0, t) = u(1, t) - u_x(1, t) = 0 \end{cases}$  (la solución tiene sólo un término).

4.16. a) Escribir el desarrollo de la función  $f(x) = \frac{\pi}{4}$  en serie de autofunciones del problema  $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X'(\pi) = 0 \end{cases}$ .

b) Resolver  $\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = \frac{\pi}{4}, x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = u(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 \end{cases}$  [Llevar una serie con autofunciones del homogéneo a la EDP y al dato inicial y calcular las infinitas  $T_n(t)$ ].

- 4.17. a) Resolver  $\begin{cases} T' = -(1+2t)T + e^{-t^2} \\ T(0) = 1 \end{cases}$ . b) Desarrollar  $f(x) = \frac{\pi}{4}$  en serie de autofunciones de  $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}$ .  
 c) Hallar 2 términos no nulos de la serie solución de  $\begin{cases} u_t - u_{xx} + 2tu = e^{-t^2} \sin x, x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = \frac{\pi}{4}, u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$ .

4.18. Resolver por separación de variables:

a)  $\begin{cases} u_t - 2u_{xx} = e^{-t} \sin x, x \in (0, \frac{\pi}{2}), t > 0 \\ u(x, 0) = \sin 3x, u(0, t) = u_x(\frac{\pi}{2}, t) = 0 \end{cases}$       b)  $\begin{cases} u_t - u_{xx} = \sin t, x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = \sin^2 x, u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 \end{cases}$   
 c)  $\begin{cases} u_t - u_{xx} = e^{-2t} \cos x, x \in (0, \frac{\pi}{2}), t > 0 \\ u(x, 0) = 1, u_x(0, t) = 0, u(\frac{\pi}{2}, t) = 1 \end{cases}$       d)  $\begin{cases} u_t - u_{xx} = e^{-2t}, x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$   
 e)  $\begin{cases} u_t - \frac{1}{\pi} u_{xx} = \pi \sin \pi x, x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) = \frac{\pi}{4}, u(0, t) = u(1, t) = 0 \end{cases}$       f)  $\begin{cases} u_t - \frac{1}{t} u_{xx} = 1, x \in (0, \pi), t > 1 \\ u(x, 1) = \cos 2x, u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 \end{cases}$

- 4.19. Sea el problema no homogéneo  $\begin{cases} u_t - u_{xx} + 3u = F(x), x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$ , con a)  $F(x) = 4 \sin x$ , b)  $F(x) = \pi$ .

Hallar la solución en el caso a) y los 2 primeros términos no nulos de la serie solución en el caso b).

- 4.20. Resolver: a)  $\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = 0, u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = t \end{cases}$ , b)  $\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = \cos \frac{\pi x}{2}, x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) = 2, u_x(0, t) = 1, u(1, t) = 2 \end{cases}$ .

Determinar en cada caso el límite de la solución  $u(x, t)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

- 4.21. Escribir en forma canónica y resolver por diferentes vías: a)  $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 6t, x, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$ , b)  $\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 16, x, t \in \mathbf{R} \\ u(0, t) = t, u_x(0, t) = 0 \end{cases}$ .

- 4.22. Sea  $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = \cos^2 x, u(0, t) = t \end{cases}$ . a) Hallar  $u(\pi, 2\pi)$ . b) Hallar  $u(x, 2\pi)$  para  $x \geq 2\pi$ .

- 4.23. Sea  $\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = \begin{cases} 2x - x^2, x \in [0, 2] \\ 0, x \in [2, \infty) \end{cases}, u_t(x, 0) = u(0, t) = 0 \end{cases}$ . Dibujar la extensión  $f^*$  y dar su expresión. Hallar  $u(1, 1)$ . Dibujar  $u(x, 1)$ .

- 4.24. Sea  $\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, x \in [0, 2], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = 4x - x^3, u_t(x, 0) = u(0, t) = u(2, t) = 0 \end{cases}$ . Hallar  $u(\frac{3}{2}, \frac{3}{4})$ . Dibujar  $u(x, 2)$ .

- 4.25. Sea  $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, x \in [0, 2], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = x^2, u_t(x, 0) = u(0, t) = 0, u(2, t) = 4 \end{cases}$ . Hallar  $u(1, 2)$  y  $u(x, 1)$ , con D'Alembert y separando variables.

- 4.26. Sea  $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, x \in [0, 3], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 3x - x^2 \\ u(0, t) = u(3, t) = 0 \end{cases}$ . Hallar  $u(1, 2)$  utilizando la fórmula de D'Alembert. Resolver separando variables y aproximar  $u(1, 2)$  con el primer término de la serie solución.

- 4.27. a) Calcular la solución de  $\begin{cases} T'' + T = 2e^{-t} \\ T(0) = 1, T'(0) = 0 \end{cases}$ . b) Resolver  $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 2e^{-t} \sin x, x \in [0, \pi], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = \sin x, u_t(x, 0) = 0, u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$ .

- 4.28. Resolver  $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 4 \sin 6x \cos 3x, x \in [0, \frac{\pi}{2}], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = u(0, t) = u_x(\frac{\pi}{2}, t) = 0 \end{cases}$  (no es necesario hacer integrales).

- 4.29. Sea  $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, x \in [0, \pi], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, u(0, t) = \sin wt, u(\pi, t) = 0 \end{cases}$ . Dar valores de  $w$  para los que la solución no esté acotada.

- 4.30. Resolver  $\begin{cases} u_{tt} + 2u_t - 5u_{xx} = 0, x \in [0, \pi], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = g(x), u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$  i) para cualquier  $g(x)$ , ii) para  $g(x) = 2 \sin x$ .

- 4.31. a) Desarrollar  $f(\theta) = \cos \theta$  en  $\{\sin n\theta\}$  simplificando el resultado. ¿Converge la serie hacia  $f$  en todo  $[0, \pi]$ ?

b) Resolver por separación de variables  $\begin{cases} \Delta u = 0, r < 1, 0 < \theta < \pi \\ u_r(1, \theta) = \cos \theta, u(r, 0) = u(r, \pi) = 0 \end{cases}$ .

- 4.32. Resolver  $\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0, r < 1, 0 < \theta < \frac{\pi}{3} \\ u(1, \theta) = \sin 3\theta, u(r, 0) = u(r, \frac{\pi}{3}) = 0 \end{cases}$  por separación de variables.

4.33. Resolver por separación de variables estos problemas planos homogéneos:

$$\text{a) } \begin{cases} \Delta u = 0, & r < 1, 0 < \theta < \pi \\ u_r(1, \theta) = \theta, & u(r, 0) = u_\theta(r, \pi) = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } r < 1 \\ u_r(1, \theta) = \sin^3 \theta \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} \Delta u = 0, & r < 1, 0 < \theta < \pi \\ u(1, \theta) = \sin \theta - \sin 2\theta \\ u(r, 0) = u(r, \pi) = 0 \end{cases}$$

4.34. Sea  $\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 1, \theta \in (0, \pi) \\ u(1, \theta) + 2u_r(1, \theta) = 4 \sin \frac{3\theta}{2} \\ u(r, 0) = u_\theta(r, \pi) = 0 \end{cases}$ . Hallar su única solución y comprobar que cambiando  $+2u_r$  por  $-2u_r$  el problema físicamente imposible que resulta pasa a tener infinitas soluciones.

4.35. Resolver  $\begin{cases} \Delta u = 0, & 1 < r < 2, 0 < \theta < \frac{\pi}{4} \\ u(1, \theta) = 0, & u_r(2, \theta) = \sin \theta \\ u(r, 0) = u(r, \frac{\pi}{4}) - u_\theta(r, \frac{\pi}{4}) = 0 \end{cases}$  [El problema de contorno tiene autovalor sencillo y en la solución sólo aparece una autofunción].

4.36. Sean: a)  $\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, & r < 2, 0 < \theta < \pi \\ u(2, \theta) = \pi, & u(r, 0) = u(r, \pi) = 0 \end{cases}$ , b)  $\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = \pi, & r < 1, 0 < \theta < \pi \\ u(1, \theta) = u(r, 0) = u(r, \pi) = 0 \end{cases}$ .

Resolverlos por separación de variables y escribir los dos primeros términos no nulos de la serie solución.

4.37. Resolver: a)  $\begin{cases} \Delta u = 3 \sin \theta, & r < 1, 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ u_r(1, \theta) = u(r, 0) = u_\theta(r, \frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$ , b)  $\begin{cases} \Delta u = \sin \theta, & 1 < r < 2 \\ u_r(1, \theta) = u(2, \theta) = 0 \end{cases}$ .

4.38. Resolver: e1]  $rR'' + R' = 4r$ , e2]  $rR'' + R' = -1$  (haciendo  $R' = v$  o viéndolas como ecuaciones de Euler) y los problemas:

$$\text{a) } \begin{cases} \Delta u = 4, & r < 1, 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ u(1, \theta) = 3 \\ u_\theta(r, 0) = u_\theta(r, \frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \Delta u = 4, & r < 1, 0 < \theta < \pi \\ u(1, \theta) = 1 - \cos 2\theta \\ u_\theta(r, 0) = u_\theta(r, \pi) = 0 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} \Delta u = -\frac{1}{r}, & 1 < r < 3, 0 < \theta < \pi \\ u(1, \theta) = 2 + \cos \theta \\ u(3, \theta) = u_\theta(r, 0) = u_\theta(r, \pi) = 0 \end{cases}$$

## Problemas adicionales de Métodos Matemáticos (otros temas más allá del curso)

### Integrales de superficie

- 5.1.** Sea  $S$  la superficie cilíndrica  $x^2 + y^2 = 4$  comprendida entre los planos  $z=0$  y  $z=3$ . Hallar el área de  $S$  utilizando integrales de superficie y calcular la integral de superficie de  $\mathbf{f}(x, y, z) = (xz, yz, 2)$  sobre  $S$ .
- 5.2.** Sean las superficies  $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$  y  $B = \{x^2 + y^2 \leq R^2, z = 0\}$ . Comprobar que se verifica el teorema de la divergencia sobre  $S \cup B$  para el campo vectorial  $\mathbf{f}(x, y, z) = (y, -x, 1)$ .
- 5.3.** Sea  $S$  el triángulo determinado por los puntos  $(0, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  y  $(-1, 1, 1)$  y  $\mathbf{f}(x, y, z) = (yz, e^y, 1)$ . Calcular la integral de superficie de  $\text{rot } \mathbf{f}$  sobre  $S$  directamente y utilizando el teorema de Stokes.
- 5.4.** Sea  $S$  la parte del paraboloido elíptico  $z = 4 - 4x^2 - y^2$  con  $z \geq 0$  y  $x \geq 0$ , y sea el campo  $\mathbf{f}(x, y, z) = (3, x^2, y)$ . Comprobar el teorema de Stokes calculando la integral de superficie de  $\text{rot } \mathbf{f}$  sobre  $S$  y la integral de línea de  $\mathbf{f}$  a lo largo del contorno cerrado que limita dicha superficie.
- 5.5.** Sea  $S$  la parte de la superficie cónica  $z^2 = x^2 + y^2$ , con  $1 \leq z \leq 2$ , y sea el campo vectorial  $\mathbf{f}(x, y, z) = (x, y, 1)$ . i) Calcular la integral de superficie  $\mathbf{f}$  sobre  $S$  respecto de la normal exterior al cono. ii) Hallar el  $\text{rot } \mathbf{f}$ . Sin calcularla: ¿cuánto vale la integral de línea de  $\mathbf{f}$  a lo largo de la circunferencia que limita superiormente  $S$ ?

### Soluciones de EDOs por medio de series

- 5.6.** Sea  $(a+bx^2)y'' - 2y = g(x)$ . a) Para  $a=0, b=1, g(x)=0$ , hallar la solución general de la ecuación.  
b) Para  $a=2, b=0, g(x)=e^x$ , hallar la solución general tanteando (coeficientes indeterminados) y con la **fv**.  
c) Para  $a=2, b=0, g(x)=2x^2$ , hallar la solución que satisface los datos iniciales  $y(0)=1, y'(0)=3$ .  
d) Para  $a=b=1, g(x)=0$ , probando una serie de potencias en la ecuación, hallar el desarrollo hasta  $x^5$  de la solución que cumple  $y(0)=0, y'(0)=3$ .
- 5.7.** Hallar los 3 primeros términos no nulos de una solución de  $y'' + xy' + y = 0$  que se anule en  $x=0$ , escribiendo la regla de recurrencia.
- 5.8.** Sea  $y'' + [2-2x]y' + [1-2x]y = 0$ . a) Hallar el desarrollo hasta  $x^4$  de la solución en forma de serie de potencias que cumple  $y(0)=0, y'(0)=1$ . b) Sabiendo que  $y = e^{-x}$  es otra solución, escribir la solución de a) en términos de una integral, desarrollar la integral y comparar.
- 5.9.** Sea  $4x^2y'' - 3y = x^2$ . a) Hallar la solución general de la no homogénea. b) Hallar el desarrollo hasta orden 4 en torno a  $x=1$  de la solución de la homogénea con  $y(1)=0, y'(1)=1$ .
- 5.10.** Sea  $3xy'' + (2-6x)y' + 2y = 0$ . Hallar una solución que no sea analítica en  $x=0$ . Hallar 4 términos del desarrollo de una solución no trivial que sea analítica en  $x=0$ .
- 5.11.** Sea  $4xy'' + 2y' + y = 0$ . Comprobar que  $x=0$  es punto singular regular y encontrar las raíces de su polinomio indicial. Hallar el desarrollo en serie de la solución que es analítica en el punto y deducir la solución general en términos de funciones elementales. Comprobarlo haciendo el cambio de variable  $s = x^{1/2}$ .
- 5.12.** Sea  $2\sqrt{x}y'' - y' = 0$ . Precisar si  $x=0$  es punto singular regular. Calcular, hasta tercer orden, el desarrollo en serie en torno a  $x=1$  de la solución que cumple  $y(1) = y'(1) = 1$ .
- 5.13.** Sea  $(1-x^2)y'' - 2xy' + y = 0$ . Hallar 3 términos no nulos del desarrollo de la solución con  $y(0)=0, y'(0)=1$ . Estudiar si hay soluciones no triviales que se anulen en  $x=-1$ .
- 5.14.** Hallar la solución general de  $x^2y'' + x(4-x)y' + 2(1-x)y = 0$ , desarrollando en torno a  $x=0$  e identificar las series solución con funciones elementales.
- 5.15.** Sea  $xy'' - 2y' + 4e^xy = 0$ . Hallar los 3 primeros términos no nulos del desarrollo en serie de potencias de una solución que se anule en  $x=0$ .
- 5.16.** Sea  $xy'' + (1-x^2)y' + pxy = 0$ . Precisar, resolviendo por series en torno a  $x=0$ , los valores de  $p$  para los que hay soluciones que son polinomios y escribir uno de estos polinomios para  $p=4$ .

### Problemas más complicados por separación de variables

5.17. Resolver  $\begin{cases} u_{tt} - u_{\rho\rho} - \frac{2}{r}u_{\rho} = 0, & \rho \leq 1, t \geq 0 \\ u(\rho, 0) = 0, u_t(\rho, 0) = \frac{1}{\rho} \sin \pi\rho, & u(1, t) = 0 \end{cases}$  i) por separación de variables, ii) haciendo  $v = u\rho$  y usando las técnicas de 4.4.

5.18. Resolver la ecuación de Legendre  $(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0$  en torno a  $x=1$ , estudiar la acotación de las soluciones en ese punto y volver a obtener los polinomios  $P_0, P_1$  y  $P_2$ .

5.19. Sea  $\begin{cases} ([1-x^2]y')' + \lambda y = 0 \\ y(0) = 0, y \text{ acotada en } 1 \end{cases}$  Hallar los 3 primeros términos del desarrollo de  $f(x)=1$  en serie de autofunciones de este problema singular [los  $P_{2n-1}$  de Legendre].

5.20. Resolver el problema para la ecuación de Laplace en el espacio:  $\begin{cases} \Delta u = 0, & 1 < \rho < 2 \\ u(1, \theta) = \cos \theta, & u(2, \theta) = 0 \end{cases}$

5.21. Resolver  $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$ , i) mediante un cambio de la forma  $y = x^r u$ , ii) por series.

5.22. Hallar los autovalores y autofunciones de  $\begin{cases} x^2y'' + xy' + [\lambda x^2 - \frac{1}{4}]y = 0 \\ y(1) = y(4) = 0 \end{cases}$ , a) haciendo  $s = \sqrt{\lambda}x$ , b) haciendo  $u = \sqrt{x}y$ .

5.23. Hallar (en términos de funciones elementales) una solución acotada de:

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + 4u = 0, & r < 1, 0 < \theta < \pi \\ u(1, \theta) = \sin \frac{\theta}{2}, & u(r, 0) = u_{\theta}(r, \pi) = 0 \end{cases} \quad \text{[Separando variables y haciendo } s=2r \text{ aparece una ecuación conocida].}$$

5.24. Sea una placa circular homogénea de 1 cm de radio, inicialmente a  $0^\circ$ . Supongamos que en  $t=0$  todo su borde se calienta hasta  $1^\circ$  y luego se mantiene a esa temperatura. Hallar las temperaturas en la placa para  $t > 0$  y la distribución estacionaria hacia la que tienden cuando  $t \rightarrow \infty$ .

5.25. Resolver los problemas en 3 variables:

$$\text{a) } \begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & (x, y) \in (0, \pi) \times (0, \pi), t > 0 \\ u(x, y, 0) = 1 + \cos x \cos 2y \\ u_x(0, y, t) = u_x(\pi, y, t) = u_y(x, 0, t) = u_y(x, \pi, t) = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & (x, y) \in (0, \pi) \times (0, \pi), t \in \mathbf{R} \\ u(x, y, 0) = 0, u_t(x, y, 0) = \sin 3x \sin^2 2y \\ u(0, y, t) = u(\pi, y, t) = u_y(x, 0, t) = u_y(x, \pi, t) = 0 \end{cases}$$

### Transformada de Fourier

5.26. Resolver  $\begin{cases} u_{tt} - 3u_{xt} + 2u_{xx} = 0, & x, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$  con transformadas de Fourier y deducir la solución para  $f(x) = x^2$ .

5.27. Obtener la fórmula de D'Alembert utilizando transformadas de Fourier.

5.28. Resolver a)  $\begin{cases} 2u_t + u_x = tu \\ u(x, 0) = e^{-x^2} \end{cases}$ , b)  $\begin{cases} u_t + e^t u_x + 2tu = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$ , c)  $\begin{cases} u_{tt} - 6u_{tx} + 9u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$  i) con las características, ii) utilizando la  $\mathcal{F}$ .

5.29. Dar su solución sin incluir integrales: a)  $\begin{cases} u_t - u_{xx} + u_x = 0, & x \in \mathbf{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = e^{-x^2/2} \end{cases}$ , b)  $\begin{cases} u_t - 2tu_{xx} = 0, & x \in \mathbf{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = \delta(x), u \text{ acotada} \end{cases}$ .