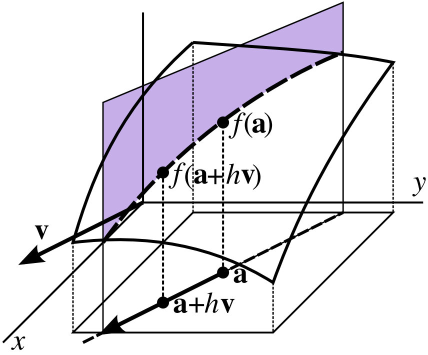
1. Cálculo diferencial en $\mathbf{R}^n$

1.1 Campos escalares y sus derivadas (este pdf b11)

1.2 Campos vectoriales. Regla de la cadena (el b12)

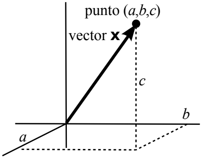


El espacio $\mathbf{R}^n$. Aquí hablamos de $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ (en general en apuntes).

$\mathbf{R}^2 \equiv \{\mathbf{x} = (a,b) : a,b \in \mathbf{R}\}$ es espacio vectorial de dimensión 2 con:
$\mathbf{x}+\mathbf{y} = (a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$ y $k\mathbf{x} = (ka, kb)$, $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{R}^2$, $k \in \mathbf{R}$.
Además es el **producto escalar** de dos vectores $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = ac+bd$,
la **norma** o **módulo** $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{a^2+b^2}$ y la **distancia** $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$.

En vez de $\mathbf{x}$ se escribe $\overline{x}$ o $\vec{x}$. Será $\mathbf{R}^3 \equiv \{\mathbf{x} = (a,b,c)\}$ (análogo).

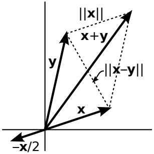
Diremos que $\mathbf{x}$ es **punto** o **vector** de $\mathbf{R}^n$. Un $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ se puede ver como el punto de coordenadas (a,b) o como el vector que une el origen $(0,0)$ con (a,b) $\left[\text{igual en } \mathbf{R}^3\right]$. $\mathbf{R}$ es caso particular y a los reales se les llama a veces **escalares**. Se prueba facil varias de estas propiedades:



$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \mathbf{y}\cdot\mathbf{x}, \quad (k\,\mathbf{x})\cdot\mathbf{y} = k\,(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}) = \mathbf{x}\cdot(k\,\mathbf{y}), \quad \mathbf{x}\cdot(\mathbf{y}+\mathbf{z}) = \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}+\mathbf{x}\cdot\mathbf{z},$$
$$\|k\,\mathbf{x}\| = |k|\,\|\mathbf{x}\|, \quad \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} \geq 0, \quad \|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0},$$
$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\| \ \text{(desigualdad triangular)}, \quad |\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\| \ \text{(desigualdad de Cauchy-Schwartz)}.$$

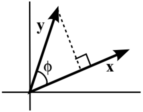
Seguimos con el **espacio $\mathbf{R}^n$.**

Mucho de lo visto tiene claro significado geométrico. Suma es el vector diagonal del paralelogramo de lados $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$. O el vector cuya punta es el final de $\mathbf{x}$ si llevamos paralelamente su base al final de $\mathbf{y}$. La desigualdad triangular dice que un lado mide menos que la suma de lo que miden los otros dos...



En $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ el producto escalar se puede escribir así:

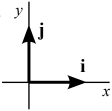
$\boxed{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\cos\phi}$, ϕ ángulo que forman $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

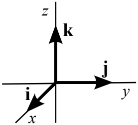


Por tanto $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=0$ cuando son perpendiculares.

Los vectores de la base de $\mathbf{R}^2$ se escriben $\mathbf{i}=(1,0)$ y $\mathbf{j}=(0,1)$, y todo $\mathbf{x}$ se puede dar como combinación lineal de ellos: $\mathbf{x}=(a,b)=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$.

En $\mathbf{R}^3$, $\mathbf{i}=(1,0,0)$, $\mathbf{j}=(0,1,0)$, $\mathbf{k}=(0,0,1)$.





Un vector es **unitario** cuando tiene norma 1. $\big[$ $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ lo son$\big]$. Si $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$, un $\mathbf{u}$ unitario con su misma dirección y sentido es $\mathbf{u}=\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$.

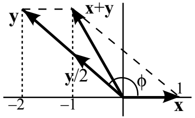
Sólo para $n=3$, se define el **producto vectorial** de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ como el **vector** (perpendicular a $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$):

$$\boxed{\mathbf{x}\times\mathbf{y}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix}}\ .$$

Ej 1. Sean $\mathbf{x}=(1,0)=\mathbf{i}$ e $\mathbf{y}=(-2,2)$. Entonces es:

$\mathbf{x}+\mathbf{y}=(-1,2)$. $\frac{1}{2}\,\mathbf{y}=(-1,1)$. $\|\mathbf{x}\|=1$, $\|\mathbf{y}\|=2\sqrt{2}$.

$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=-2$. $\Big[$Debía ser $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|\cos\phi<0$, pues $\phi>\frac{\pi}{2}$. De hecho es $\phi=\arccos\frac{-1}{\sqrt{2}}=\frac{3\pi}{4}\ \Big]$.



Ej 2. Si $\mathbf{x}=(1,0,2)$, $\mathbf{y}=(-2,1,3)$, su producto escalar es $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=4$.

$\|\mathbf{x}\|=\sqrt{5}$, $\|\mathbf{y}\|=\sqrt{14}$. (Se cumple Cauchy-Schwartz: $4\leq\sqrt{70}$).

$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|=\|(3,-1,-1)\|=\sqrt{11}$ (la distancia entre los dos puntos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$).

$$\mathbf{x}\times\mathbf{y}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\1&0&2\\-2&1&3\end{vmatrix}=(0-2)\,\mathbf{i}-(3+4)\,\mathbf{j}+(1-0)\,\mathbf{k}=(-2,-7,1)\,.$$

Comprobamos que es perpendicular a ambos: $\begin{array}{c}(1,0,2)\cdot(-2,-7,1)=0\\(-2,1,3)\cdot(-2,-7,1)=0\end{array}$

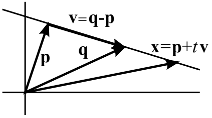
$\|\mathbf{x}\times\mathbf{y}\|=3\sqrt{6}$ nos da el área del parelogramo cuyos lados son los vectores (ese es el significado que tiene la longitud de un producto vectorial).

En cálculo en $\mathbf{R}$, una **recta del plano** se suele escribir $y=y_0+m(x-x_0)$ ó $y=mx+b$, fijándonos en la pendiente m, el punto (x_0,y_0) por el que pasa o la ordenada en el origen b. Demos otras expresiones ahora usando vectores.

La recta que pasa por $\mathbf{p}=(p_1,p_2)$ y $\mathbf{q}=(q_1,q_2)$ se puede escribir:

$\mathbf{x}=\mathbf{p}+t(\mathbf{q}-\mathbf{p})$ o $\mathbf{x}=(1-t)\mathbf{p}+t\mathbf{q}$, $t\in\mathbf{R}$.

$\big[$Si $t\in[0,1]$, $\mathbf{p}+t(\mathbf{q}-\mathbf{p})$ da el segmento que los une$\big]$.



O dado $\mathbf{p}$ y el vector dirección $\mathbf{v}=(v_1,v_2)$ la recta viene dada por $\mathbf{x}=\mathbf{p}+t\mathbf{v}$, que en coordenadas pasa a ser $\begin{cases} x=p_1+tv_1 \\ y=p_2+tv_2 \end{cases}$.

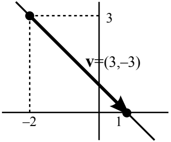
Ej 3. Varias formas de escribir el segmento que une $\mathbf{p}=(-2,3)$ y $\mathbf{q}=(1,0)$.

Como la recta es $y=1-x$, tenemos: $(t,1-t)$, $t\in[-2,1]$.

Deducimos otra parametrización de arriba:

$\mathbf{v}=\mathbf{q}-\mathbf{p}=(3,-3)$, $\mathbf{p}+t\mathbf{v}=(-2+3t,3-3t)$, $t\in[0,1]$.

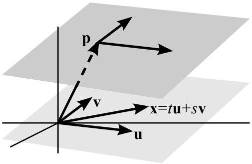
O cambiando papeles: $\mathbf{q}+t(\mathbf{p}-\mathbf{q})=(1-3t,3t)$, $t\in[0,1]$.



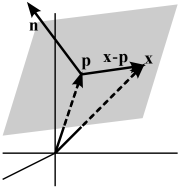
[Las 2 primeras lo recorren, al crecer t, en el mismo sentido y la otra al revés].

Las ecuaciones vectoriales de las **rectas y segmentos en el espacio** son las mismas.

La ecuación general de un **plano en el espacio** es $\boxed{ax+by+cz=d}$.
[Con a,b,c no todas cero. Si $d=0$ pasa por el origen].



Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son dos vectores (no múltiplo uno de otro), $\mathbf{x}=t\mathbf{u}+s\mathbf{v}$, $t,s\in\mathbf{R}$ describe el plano que contiene esos vectores y pasa por el origen. $\mathbf{x}=\mathbf{p}+t\mathbf{u}+s\mathbf{v}$ es otro plano, paralelo al otro y que pasa por $\mathbf{p}$.



Un plano quedará también determinado conocidos un punto $\mathbf{p}$ suyo y un vector $\mathbf{n}$ normal (perpendicular) al plano, pues será entonces: $\boxed{(\mathbf{x}-\mathbf{p})\cdot\mathbf{n}=0}$.

Si $\mathbf{n}=(a,b,c)$, $a(x-p_1)+b(y-p_2)+c(z-p_3)=0$,
se puede poner $ax+by+cz=-ap_1-bp_2-cp_3$. Comparando con la ecuación escrita arriba, concluimos que un **vector normal** al plano $ax+by+cz=d$ es el vector (a,b,c) .

Ej 4. Varias expresiones de la recta que pasa por $\mathbf{p}=(1,2,-8)$ y $\mathbf{q}=(7,5,1)$.

El vector dirección $\mathbf{v}=\mathbf{q}-\mathbf{p}=(6,3,9)$ da $\mathbf{p}+t\mathbf{v}=(1+6t,2+3t,-8+9t)$, $t\in\mathbf{R}$.

O con el más bonito $\mathbf{u}=(2,1,3)$ y $\mathbf{q}$ por $\mathbf{p}$: $\mathbf{q}+t\mathbf{u}=(7+2t,5+t,1+3t)$ $\forall t$.

Eliminando t, por ejemplo, de la segunda: $\begin{cases} x=7+2t \\ y=5+t \\ z=1+3t \end{cases} \longrightarrow \frac{x-7}{2}=y-5=\frac{z-1}{3}$.

Y eligiendo dos pares de términos (primero = tercero y segundo = tercero aquí) obtenemos la recta como intersección de dos planos:

$$3x-21=2z-2\,,\ 3y-15=z-1\text{, es decir, } \begin{cases} 3x-2z=19 \\ 3y-z=14 \end{cases} .$$

Ej 5. Ecuación del plano que fijan $\mathbf{p}=(3,2,-1)$, $\mathbf{q}=(1,-1,3)$, $\mathbf{r}=(3,-2,4)$.

Es normal a él el vector $(\mathbf{q}-\mathbf{p})\times(\mathbf{r}-\mathbf{p})=(-2,-3,4)\times(0,-4,5)=(1,10,8)$.

El plano es, pues: $1(x-3)+10(y-2)+8(z+1)=0$, o sea, $x+10y+8z=15$.

Más largo es eliminar t y s de

$$\mathbf{x}=t(\mathbf{q}-\mathbf{p})+s(\mathbf{r}-\mathbf{p})=\begin{cases} x=3-2t \ \longrightarrow \ t=\frac{3}{2}-\frac{x}{2} \searrow \\ y=2-3t-4s \qquad\qquad s=\frac{3x}{8}-\frac{y}{8}-\frac{5}{8} \searrow \cdots \\ z=-1+4t+5s \end{cases}$$

O, aún peor, resolver $\begin{cases} 3a+2b-c=d \\ a-2b+3c=d \\ 3a-2b+4c=d \end{cases}$ [imponiendo que pase por los puntos] $\xrightarrow{\cdots}$ $a=\frac{d}{5}$, $b=\frac{10d}{5}$, $c=\frac{8d}{5}$.

$\boxed{\begin{array}{l} f:\ \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} \\ \quad (x,y) \to f(x,y) \end{array}}$ Funciones reales de 2 variables reales en un dominio D.
Su gráfica es el conjunto de puntos $\big(x,y,f(x,y)\big)$, $(x,y)\in D$.

Si $n=2$ (el que tratamos aquí) describe una **superficie** en el espacio, que se puede tratar de dibujar en perspectiva. [Para $n=1$ la gráfica es una curva en el plano y si $n\geq 3$ estamos ya en un espacio de dimensión ≥ 4].

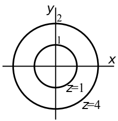
Para esquematizar su **gráfica** (sin ordenador) buscaremos secciones (curvas en el espacio) que obtendremos cortando la superficie con diferentes planos. Las más interesantes son los cortes con $z=\text{cte}$, las **curvas de nivel** (curvas del plano xy en las que f vale lo mismo). Fáciles de hallar son las obtenidas al hacer $x=\text{cte}$ o $y=\text{cte}$ (en particular los cortes con los planos yz o xz).

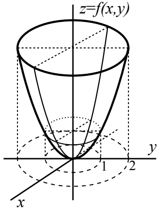
Ej 6. $\boxed{f(x,y)=x^2+y^2}$. Las curvas de nivel $x^2+y^2=C$ son circunferencias de radio $\sqrt{C}$.

Los cortes con $\begin{array}{l} x=0 \to z=y^2 \\ y=0 \to z=x^2 \end{array}$ son parábolas.

Con esto es fácil (en este caso sencillo) dibujar la gráfica de este '**paraboloide de revolución**'.

[Si las curvas de nivel son circunferencias centradas, la superficie siempre será de revolución].





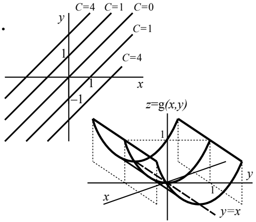
Más dibujos de campos escalares

Ej 7. $\boxed{g(x,y)=(x-y)^2}=C \to x-y=\pm\sqrt{C}$ (rectas paralelas).

Para $C=0,1,4$ son $y=x$, $y=x\pm 1$, $y=x\pm 2$.

El corte con $x=0$ es una parábola: $z=y^2$. También lo son los cortes con $y=0$ $\left(z=x^2\right)$ o $y=-x$ $\left(z=4x^2\right)$.

Viene a ser la gáfica de la parábola $z=y^2$ trasladada a lo largo de la recta $y=x$ (que es donde se anula la g).



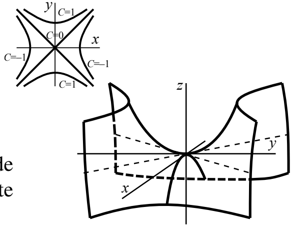
Ej 8. Sea $\boxed{z=y^2-x^2}$. Dibujemos este 'paraboloide hiperbólico' (silla de montar).

Las curvas de nivel son en general las hipérbolas $y^2-x^2=C$ [menos para $C=0$ en que se reducen a las rectas $y=\pm x$].

Los cortes con $y=0$ y $x=0$ son $z=-x^2$ y $z=y^2$

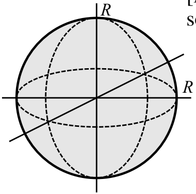
[y son parábolas todos los cortes con $y=C$ y $x=C$].

No es fácil hacer el dibujo en 3 dimensiones, pero las curvas de nivel y los cortes nos bastan para hacernos una idea bastante aproximada de la gráfica.

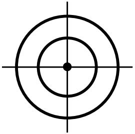


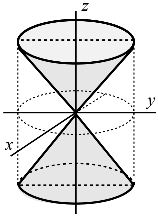
Ej 9. $\boxed{x^2+y^2+z^2=R^2}$ (superficie esférica) , $\boxed{z^2=x^2+y^2}$ (cono), $\boxed{x^2+y^2=1}$ (cilindro).

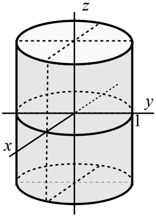
Las primeras son 2 campos escalares $z=\pm\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, $z=\pm\sqrt{y^2+x^2}$ y la otra 0.



[las curvas de nivel son circunferencias]







Para $x=0$ aparece la circunferencia $y^2+z^2=R^2$ (esfera) y las rectas $z=\pm y$ (cono).

El cilindro es la circunferencia unidad llevada verticalmente (pues no depende de z).

Todos estos ejemplos son '**cuádricas**': $Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+ax+by+cz=d$ (que generalizan las cónicas a $\mathbf{R}^3$). Hay más tipos de ellas: elipsoides, hiperboloides de una y dos hojas, parejas de planos...

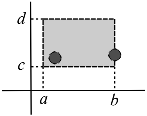
Definimos estos términos que aparecerán varias veces en el curso:

Entorno de centro $\mathbf{a}\in\mathbf{R}^n$ y radio r es $B_r(\mathbf{a})\equiv\{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n : \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|<r\}$
[círculo en el plano, esfera en el espacio, sin bordes].

Un punto $\mathbf{a}\in A$ es **interior** al conjunto $A\subset\mathbf{R}^n$ si hay algún r tal que el entorno $B_r(\mathbf{a})\subset A$. A es **abierto** si todos sus puntos son interiores, es decir, si $A=\mathit{int}\,A\equiv\{\mathbf{x}$ interiores a $A\}$.

Frontera de A es $\partial A\equiv\{\mathbf{x}:$ todo $B_r(\mathbf{x})$ tiene puntos de A y de $\mathbf{R}^n\!-\!A\}$.

Ej 10. Es un conjunto abierto en $\mathbf{R}^2$ el producto cartesiano de intervalos abiertos $A=(a,b)\times(c,d)$ [rectángulo sin borde], pues para cualquier **a** del conjunto existe un $B_r(\mathbf{a})$ contenido en él (por ejemplo, cuando r es el mínimo de las distancias a los 4 lados). Su frontera ∂A son los 4 lados. El producto de cerrados $\bar{A}=[a,b]\times[c,d]$ no es abierto pues los puntos de ∂A no son interiores (ningún B_r está contenido en A).



La definición de continuidad es (aparentemente) muy parecida a la de $\mathbf{R}$:

f continua en $\mathbf{a}\in\mathit{int}\,D$ si $\forall\varepsilon\ \exists\delta$ tal que $\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|<\delta \Rightarrow |f(\mathbf{x})-f(\mathbf{a})|<\varepsilon$.

[En algún entorno de **a** los valores de $f(\mathbf{x})$ deben estar lo cerca que nos pidan de $f(\mathbf{a})$].

[Con la definición se ve fácil que una f constante o $f(x,y)=x$ son continuas en $\mathbf{R}^2$].

Ideas sencillas sobre continuidad (las complicadas no se tratan en este curso)

Teoremas (como en $\mathbf{R}$) aseguran que suma, producto y cociente con denominador no nulo de f , g continuas son continuas. Y la composición de campos y funciones:

$$\boxed{f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R} \text{ continua en } \mathbf{a},\ g:\mathbf{R}\to\mathbf{R} \text{ continua en } f(\mathbf{a}) \ \Rightarrow\ g\circ f \text{ continua en } \mathbf{a}.}$$

Con ellos, muchísimos campos lo son en todos o casi todos los puntos **a simple vista**. Son continuos en todo $\mathbf{R}^2$ los campos dibujados (sumas, productos... de continuas).

También lo son claramente: $f(x,y)=\frac{x^2-1}{y^2+3}$ (lo son numerador y denominador mayor que 0).

$h(x,y)=e^{xy}$ (composición de la continua $f(x,y)=xy$ y $g(z)=e^z$ función continua en $\mathbf{R}$).

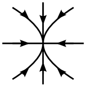
$g(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$ es claramente continua si $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ y discontinua ahí ('tiende a ∞ ').

Sólo hay que pararse a mirar la continuidad en puntos patológicos (como pasaba en $\mathbf{R}$).
Vemos un par de ejemplos finales sólo para mostrar que aquí las cosas son complicadas:

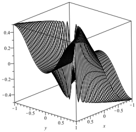
Ej 11. $f(x,y)=(x^2+y^2)\,\operatorname{sen}\frac{1}{x^2+y^2}$, con $f(0,0)=0$, es obviamente continua si $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$.

Ver que lo es también en el origen no es trivial (en los apuntes está justificado).

Ej 12. $f(x,y)=\frac{xy^2}{x^2+y^4}$, $f(0,0)=0$ vuelve a ser continua claramente si $(x,y)\neq(0,0)$. ¿Y en $\mathbf{0}$?



El valor de f sobre las parábolas $x=py^2$ es $f(py^2,y)=\frac{p}{p^2+1}$.
Tan cerca como se quiera del origen hay puntos en los que el campo vale, por ejemplo, $\frac{1}{2}$ ($p=1$). **Discontinua** en $(0,0)$.



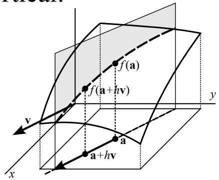
[Dibujada con un ordenador, tiene el aspecto feo del dibujo de la derecha].

Sean $f: D\subset\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ y $\mathbf{a}\in int\,D$ para que f esté definida cerca de $\mathbf{a}$. Para hallar la derivada en $\mathbf{R}$ se usa el valor de f en a y en puntos cercanos $a+h$. En $\mathbf{R}^n$ hay puntos en cualquier dirección. Miremos cómo varía f sobre una recta que pase por un punto $\mathbf{a}$ (dada por un vector $\mathbf{v}$), es decir, la variación de la curva obtenida cortando la gráfica con un plano vertical:

La **derivada de f según el vector v** en $\mathbf{a}$ es:

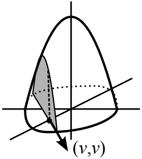
$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) \equiv f_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \lim_{h\to 0}\frac{f(\mathbf{a}+h\mathbf{v})-f(\mathbf{a})}{h} \quad \text{(si existe).}$$

Si **v** es **unitario** se llama **derivada direccional** (de f en la dirección del vector **v** en el punto **a**).



Veremos formas sencillas de hallarlas, pero por ahora sólo con la definición:

Ej 13. Hallemos la derivada de $\boxed{f(x,y)=4-x^2-4y^2}$ en el punto (1,0) según el vector $\mathbf{v}=(v,v)$:



$$D_{\mathbf{v}}f(1{,}0)=\lim_{h\to 0}\frac{4-(1+hv)^2-4(hv)^2-3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2hv-5h^2v^2}{h}=-2v \;\to$$

$$D_{(1,1)}f(1{,}0)=-2\,,\; D_{(2,2)}f(1{,}0)=-4\,,\; D_{(-1,-1)}f(1{,}0)=2\,, \dots$$

Las direccionales son $D_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}f(1{,}0)=-\sqrt{2}$ y $D_{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}f(1{,}0)=\sqrt{2}$.

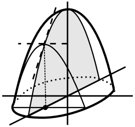
El caso más importante es cuando **v** es un vector de la base canónica:

A la derivada de f en la dirección de $\mathbf{i}$ se le llama **derivada parcial** de f respecto a x. En un punto $\mathbf{a}=(a,b)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a}) \equiv f_x(\mathbf{a}) \equiv D_{\mathbf{i}} f(\mathbf{a}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} \, ,$$

es decir, $\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a})$ **es la derivada en** $x=a$ **de** $g(x)=f(x,b)$, **función de la variable** x **obtenida viendo la** y **constante.**

Análogamente se define $\frac{\partial f}{\partial y} \equiv f_y$ (derivada en la dirección de **j**) que se calcula simplemente mirando la x como constante. Y los significados geométricos son claros: las **pendientes de las tangentes a las curvas corte de la gráfica con planos** $y=b$ **o** $x=a$.



Ej 13b. Si $f(x,y)=4-x^2-4y^2$ son $f_x(1,0)=-2x\big|_{(1,0)}=-2$ y $f_y(1,0)=-8y\big|_{(1,0)}=0$, pendientes de las tangentes a las parábolas que se obtienen cortando con $y=0$ y $x=1$ $\big[\, g(x)=4-x^2 \, , \; g(y)=3-4y^2 \,\big]$, respectivamente en $x=1$ e $y=0$.

[La primera es negativa por decrecer f al crecer x y la segunda 0 por el máximo].

Si $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ existen para cada $\mathbf{x}\in D$ estos nuevos campos escalares se pueden volver a derivar consiguiendo las **derivadas parciales de orden** $2, 3, \ldots$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big[\frac{\partial f}{\partial x}\Big]\equiv\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\equiv f_{xx}\ ,\quad \frac{\partial}{\partial y}\Big[\frac{\partial f}{\partial x}\Big]\equiv\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\equiv f_{xy}\ ,\ \ldots$$

Ej 14. Si $f(x,y)=x^2\,\mathrm{e}^{-2y}$, sus parciales $f_x=\frac{\partial f}{\partial x}=2x\,\mathrm{e}^{-2y}$, $f_y=\frac{\partial f}{\partial y}=-2x^2\mathrm{e}^{-2y}$ vuelven a tener derivadas parciales $\forall(x,y)$, con lo que tiene sentido calcular:

$$f_{xx}=2\,\mathrm{e}^{-2y},\ f_{xy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=-4x\,\mathrm{e}^{-2y},\ f_{yx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-4x\,\mathrm{e}^{-2y},\ f_{yy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=4x^2\mathrm{e}^{-2y}.$$

Y podríamos seguir: $f_{xxx}=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=0$, ... , $f_{yyy}=-8x^2\mathrm{e}^{-2y}$, ...

No es casual que hayan coincidido las derivadas cruzadas $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$.

Se dice que $f\in C^n$ si sus derivadas parciales hasta orden n son continuas.

$$\boxed{\text{Si } f\in C^2 \text{ en un entorno de } \mathbf{a}\ \Rightarrow\ f_{xy}(\mathbf{a})=f_{yx}(\mathbf{a})\,.}$$

[Sólo no coinciden en funciones raras].

Para $\mathbf{R}^3$ todo es similar, apareciendo además $\frac{\partial f}{\partial z}\equiv f_z$ (derivada respecto a **k**).

Ej 15. Si $f(x,y,z)=x^2y-\cos(yz)$ son $f_x=2xy$, $f_y=x^2+z\,\mathrm{sen}(yz)$, $f_z=y\,\mathrm{sen}(yz)$.

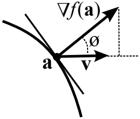
$f_{xx}=2y$, $f_{xy}=2x$, $f_{xz}=0$; $f_{yx}=2x$, $f_{yy}=z^2\cos(yz)$, $f_{yz}=\mathrm{sen}(yz)+yz\cos(yz)$;

$f_{zx}=0$, $f_{zy}=\mathrm{sen}(yz)+yz\cos(yz)$, $f_{zz}=y^2\cos(yz)$. (También coinciden las cruzadas).

$\boxed{\textbf{Gradiente de } f \textbf{ es el vector } \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)}$ y es $\nabla f(\mathbf{a}) = \big(f_x(\mathbf{a}), f_y(\mathbf{a})\big)$.

Teniendo ∇f (las parciales) es muy fácil dar la derivada según el vector **v** :

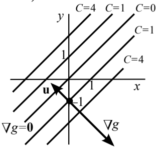
$\boxed{\text{Si } f \in C^1 \text{ en un entorno de } \mathbf{a}, \text{ es la derivada } D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v} .}$



Significado del gradiente $\nabla f(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$. Sea **v** unitario. Como $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = \|\nabla f(\mathbf{a})\| \cos\phi$, la derivada direccional es la componente del gradiente en la dirección de **v** . La $D_{\mathbf{v}}$ será máxima si $\cos\phi = 1$ (si ambos tienen la misma dirección y sentido).

Por tanto, la **dirección y sentido de** ∇f son aquellos en los que **más crece** f . Si $\cos\phi = 0$, será $D_{\mathbf{v}} f = 0$: **en dirección perpendicular a** ∇f **el campo no varía**. Será ∇f **perpendicular a las curvas de nivel de** f (a sus tangentes).

Ej 7*. Para $g(x,y) = (x-y)^2$ es $\nabla g(x,y) = \big(2x-2y\,,\, 2y-2x\big) = 2(x-y)(1,-1)$.



Vector perpenticular a las rectas de nivel que apunta hacia donde crece g con módulo $2\sqrt{2}\,|x-y|$ mayor según nos alejemos de la recta $y=x$.

Es $\nabla g(0,-1) = (2,-2)$. El unitario **u** que da, por ejemplo, la mínima $D_{\mathbf{u}} g$ en el punto es $\mathbf{u} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $\big[\,(-1,1)$ es opuesto al gradiente$\big]$.

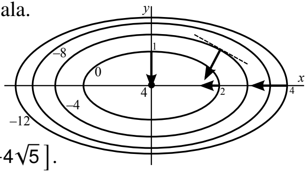
Su valor: $D_{\mathbf{u}}\, g(0,-1) = (2,-2) \cdot \mathbf{u} = -2\sqrt{2} = -\|\nabla g\| = \|\nabla g\|\,\|\mathbf{u}\| \cos\pi$.

Ej 13c. Para $f(x,y)=4-x^2-4y^2$, ya es muy fácil hallar las $D_{\mathbf{v}}$ del **Ej 13**: $\nabla f=(-2x,-8y) \Rightarrow$

$$D_{(1,1)}f(1,0)=(-2,0)\cdot(1,1)=-2\,,\ D_{(2,2)}f(1,0)=(-2,0)\cdot(2,2)=-4\,,\ \ldots$$

Dibujemos algunas curvas de nivel $\big($elipses $x^2+4y^2=4-C$ con $C=4,0,-4,-8,-12\big)$ y los gradientes ∇f en $(1,0)$, $(2,0)$, $(0,1)$ y $(2,1)$ a escala.

Mirando la gráfica de f como una montaña, ∇f indica la máxima subida. Entre las $D_{\mathbf{u}}f(2,1)$ direccionales es máxima la que da ∇f, es decir, en la dirección del vector $\mathbf{u}=\big(-\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\big)$ $\big[$será $D_{\mathbf{u}}f(2,1)=4\sqrt{5}=\|\nabla f(1,2)\|\big]$.



Es mínima en la dirección opuesta $\mathbf{u}=\big(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\big)$ $\big[D_{\mathbf{u}}=-4\sqrt{5}\big]$.

Nula en dirección de los vectores $\perp \nabla f$ $\big[(2,-1)$ o $(-2,1)\big]$, tangentes a la curva $x^2+4y^2=8$.

Ej 15*. Si $f(x,y,z)=x^2y-\cos(yz)$ es $\nabla f=\big(2xy,x^2+z\,\mathrm{sen}(yz),y\,\mathrm{sen}(yz)\big)\xrightarrow{(1,1,0)}(2,1,0)$.

La derivada de f en $\mathbf{a}=(1,1,0)$ según el vector $\mathbf{v}=(1,-1,2)$ es $(2,1,0)\cdot(1,-1,2)=1$.

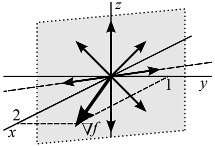
Para dar la direccional se debe dividir por el módulo: $\mathbf{u}=\frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{v} \to D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a})=\frac{1}{\sqrt{6}}$.

La $D_{\mathbf{u}}f$ máxima es en la dirección y sentido de ∇f y su valor será su módulo $\|\nabla f\|=\sqrt{5}$.

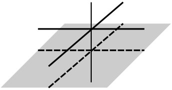
La derivada es 0 en la dirección de todo vector perpendicular a ∇f, que ahora forman un plano. Si $\mathbf{v}=(a,b,c)$ es perpendicular:

$$(2,1,0)\cdot\mathbf{v}=2a+b=0\,,\ \mathbf{v}=(a,-2a,c)\,,\ \mathbf{u}=\frac{1}{\sqrt{5a^2+c^2}}(a,-2a,c)\,.$$

Dos de los $\mathbf{u}$ unitarios para los que la derivada direccional es nula son, por ejemplo, $(0,0,1)$ y $\big(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\big)$.



En $\mathbf{R}$ se cumplía 'derivable $\Rightarrow$ continua'. En $\mathbf{R}^n$ la existencia de todas las derivadas parciales **no** implica la continuidad. Ni siquiera que existan todas las direccionales.



Ej 16. Para $f(x,y)=\begin{cases}1 \text{ si } x=0 \text{ o } y=0\\ 0 \text{ en el resto}\end{cases}$ es $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$,

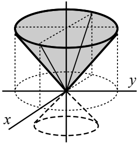
pero f es claramente discontinua en el origen.

Se prueba que $f(x,y)=\frac{xy^2}{x^2+y^4}$ discontinua en $\mathbf{0}$ del **Ej 12** tiene todas las $D_{\mathbf{u}}f$.

Sí lo garantiza ser **diferenciable**, de definición complicada que no repetimos en este resumen (se cuenta en los apuntes: deben existir las parciales y un límite no sencillo).

Una función en $\mathbf{R}$ era derivable si tenía recta tangente. La idea es que en $\mathbf{R}^2$ será f **diferenciable si posee plano tangente**. Sí es fácil comprobar algo que lo implica:

$$\boxed{f\in C^1 \text{ en un entorno de } \mathbf{a} \;\Rightarrow\; f \text{ diferenciable en } \mathbf{a} \;\Rightarrow\; f \text{ continua en } \mathbf{a}.}$$



Los campos discontinuos (como los del **Ej 16**) no serán diferenciables.

Pueden ser continuos y no diferenciables, como le pasa al cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$ en el origen. Sus cortes con $y=0$ y $x=0$ son $z=|x|$ y $z=|y|$, funciones no derivables en 0, por lo que no existen $f_x(0,0)$ ni $f_y(0,0)$. Por tanto, no puede ser diferenciable ahí.

[Una f continua y no diferenciable tendrá 'picos', como le pasaba al $|x|$ en $\mathbf{R}$].

Si f_x y f_y son continuas (si $f \in C^1$) en un entorno de (a,b), f es diferenciable y tendrá en ese punto **plano tangente**. Se prueba que su ecuación es:

$$\boxed{z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)}\ .$$

Ej 13d. Como para $f(x,y)=4-x^2-4y^2$ las $f_x=-2x$ y $f_y=-8y$ son continuas en todo $\mathbf{R}^2$ claramente es f diferenciable en todo el plano y es fácil de calcular el plano tangente en el punto $(-2,1)$: $z=-4+4(x+2)-8(y-1) = 4x-8y+12$.

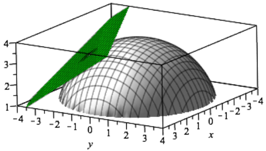
Como en $\mathbf{R}^3$ es ∇f normal a las superficies de nivel, el **plano tangente en un punto** (a,b,c) **de una superficie** S **dada en la forma** $F(x,y,z)=K$ es:

$$\boxed{\nabla F(a,b,c)\cdot(x-a,y-b,z-c) = 0}\ .$$

Ej 17. Hallemos el plano tangente en $(1,-2,3)$ a la superficie esférica $x^2+y^2+z^2=14$:

$$\nabla F(1,-2,3)=(2x,2y,2z)\Big|_{(1,-2,3)}=(2,-4,6)\ \to$$

$$2(x-1)-4(y+2)+6(z-3)=0,\quad z=\tfrac{1}{3}(14-x+2y)\ .$$



Más largo con la otra fórmula: $z=+\sqrt{14-x^2-y^2}\ \to$

$$z_x=\frac{-x}{\sqrt{\ }},\ z_y=\frac{-y}{\sqrt{\ }},\ z_x(1,-2)=-\tfrac{1}{3},\ z_y(1,-2)=\tfrac{2}{3}$$

$$\to\quad z=3-\tfrac{1}{3}(x-1)+\tfrac{2}{3}(y+2)\ \uparrow$$

1. Sean $\mathbf{x} = 4\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j}$, $\mathbf{y} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$. Hallar y dibujar $\mathbf{x} + \mathbf{y}$, $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ y $\mathbf{x} + 3\mathbf{y}$, y hallar el módulo de estos 3 vectores. Comprobar la desigualdad triangular y la de Cauchy-Schwartz para $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$. ¿Forman $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ un ángulo agudo u obtuso entre ellos? Hallar la distancia de $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ y el ángulo formado por $\mathbf{y}$ y $\mathbf{x} + 3\mathbf{y}$.

2. Sean $\mathbf{a} = (1,0,-1)$, $\mathbf{b} = (1,1,0)$. Hallar $\mathbf{b} - \mathbf{a}$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ y $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$. Hallar la distancia de $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ y el ángulo que forman. Comprobar la desigualdad triangular para $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. Escribir una expresión del plano que contiene esos vectores. Dar ecuaciones paramétricas del segmento que une $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ que lo recorran en sentidos opuestos.

3. Con las curvas de nivel y algunas secciones dibujar c) $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$.

4. Sean a) $f(x,y) = xy$, $g(x,y) = y^2$. Dibujar algunas curvas de nivel y su gradiente en algunos puntos. Hallar la ecuación del plano tangente en el punto $(1,1)$.

6. Sea $f(x,y) = e^{x-2y}$. **a]** Dibujar la curva de nivel $f = 1$ y $\nabla f(2,1)$. Hallar $f_{xx} + f_{yy}$. Precisar el $\overline{u}$ unitario para el que es máxima la derivada direccional $D_{\overline{u}} f(2,1)$ y hallar el valor de esa derivada máxima.

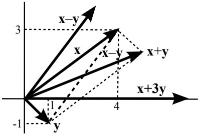
7. Sea $F(x,y,z) = x^3 - 2yz + e^x z^2$. Hallar el plano tangente a $F = 0$ en $(0,1,2)$. Encontrar $\mathbf{u}$ unitario perpendicular al vector $(1,0,1)$ y tal que $D_{\mathbf{u}} F(0,1,2) = 0$.

1. $\mathbf{x}=(4,3)$, $\mathbf{y}=(1,-1)$. $\mathbf{x}+\mathbf{y}=(5,2)$, $\mathbf{x}-\mathbf{y}=(3,4)$ y $\mathbf{x}+3\mathbf{y}=(7,0)$.

$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|=\sqrt{29}\leq 6\leq 5+\sqrt{2}=\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|$. $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|=5$ (distancia $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$).

$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}>0 \;\Rightarrow$ ángulo agudo. $\|\mathbf{x}+3\mathbf{y}\|=7$.

$\frac{(\mathbf{x}+3\mathbf{y})\cdot\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}+3\mathbf{y}\|\|\mathbf{y}\|}=\frac{7}{7\sqrt{2}}=\cos\phi \;\rightarrow\; \mathbf{y}$ y $\mathbf{x}+3\mathbf{y}$ forman ángulo $\frac{\pi}{4}$.



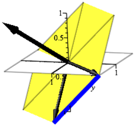
2. $\mathbf{b}-\mathbf{a}=(0,1,1)$, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=1$, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\1&0&-1\\1&1&0\end{vmatrix}=(1,-1,1)$, $\underbrace{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=0}_{\text{perpendiculares}}$.

$\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|=\sqrt{2}=$ distancia de $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$. $\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|}=\frac{1}{2}=\cos\phi\;\rightarrow\;\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ forman ángulo $\frac{\pi}{3}$.

$\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|=\|(2,1,-1)\|=\sqrt{6}\leq 2\sqrt{2}=\|\mathbf{a}\|+\|\mathbf{b}\|$ $(6<8)$.

Plano conteniendo $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$: $\mathbf{x}=t(1,0,-1)+s(1,1,0)$, $\begin{cases}x=t+s\\y=s\\z=-t\end{cases}\rightarrow\boxed{z=y-x}$.

O como $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ es perpendicular al plano: $(1,-1,1)\cdot(x,y,z)=0$ ↗



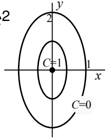
Segmentos $\mathbf{c}(t)=\mathbf{a}+t\big(\mathbf{b}-\mathbf{a}\big)$ y $\mathbf{c}_*(t)=\mathbf{b}+t\big(\mathbf{a}-\mathbf{b}\big)$, con $t\in[0,1]$. Es decir:

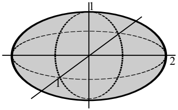
$\mathbf{c}(t)=(1,0,-1)+t(0,1,1)=\boxed{(1,t,t-1)}$, $\mathbf{c}_*(t)=(1,1,0)+t(0,-1,-1)=\boxed{(1,1-t,-t)}$.

3. $\boxed{4x^2+y^2+4z^2=4}$. $z=C\rightarrow 4x^2+y^2=4-4C^2$

$x=0\rightarrow\frac{y^2}{2^2}+z^2=1\leftarrow$ elipses ↗

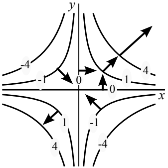
$y=0\rightarrow x^2+z^2=1$



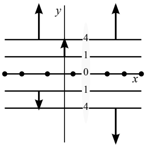


elipsoide
(esfera estirada
⟵ ⟶)

4. a) $f(x,y)=xy$, $\nabla f=(y,x)$, $=(1,0)\ (0,1)\ (1,1)\ (2,2)\ (1,-1)\ (-1,1)\ (-1,-1)$
en $(0,1)\ (1,0)\ (1,1)\ (2,2)\ (-1,1)\ (1,-1)\ (-1,-1)$



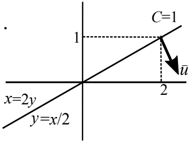
Plano tangente: $\boxed{z=x+y-1}$. [silla de montar como la del Ej 8]



b) $g(x,y)=y^2$, $\nabla g=(0,2y)$ $\big[=(0,2)$ en $(1,1)\big]$.

Plano tangente: $z=1+2(y-1)$, $\boxed{z=2y-1}$.

6. $\boxed{f(x,y)=\mathrm{e}^{x-2y}}$ $f=1 \to x=2y$. $\big[$O bien $y=\frac{x}{2}\big]$. $\nabla f=\left(\mathrm{e}^{x-2y},-2\mathrm{e}^{x-2y}\right)$.



$\nabla f(2,1)=\boxed{(1,-2)}$. $\Delta f=\mathrm{e}^{x-2y}+4\mathrm{e}^{x-2y}=\boxed{5\mathrm{e}^{x-2y}}$.

$D_{\overline{u}}$ máxima en sentido de ∇f ($\perp$ recta de nivel): $\boxed{\overline{u}=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}$.

Valor máximo $\|\nabla f\|=\boxed{\sqrt{5}}$. Comprobamos: $D_{\overline{u}}f(2,1)=\nabla f(2,1)\cdot\overline{u}=\frac{5}{\sqrt{5}}$.

7. $\boxed{F(x,y,z)=x^3-2yz+\mathrm{e}^x z^2}$. $\nabla F=\left(3x^2+z^2\mathrm{e}^x,\,-2z,\,2z\mathrm{e}^x-2y\right)\xrightarrow{(0,1,2)}2(2,-2,1)$.
Plano: $(2,-2,1)\cdot(x,y-1,z-2)=0$. $\boxed{z=2y-2x}$.

Perpendicular al vector y al gradiente en el punto es

$$(1,0,1)\times(2,-2,1)=(2,1,-2)\to\boxed{\overline{u}=\left(\tfrac{2}{3},\tfrac{1}{3},-\tfrac{2}{3}\right)}\ \big[\text{o } -\overline{u}\big].$$

$\Big[$O resolviendo $\begin{array}{l}a+c=0\to c=-a\\ 2a-2b+c=0\ \ a=2b\end{array}$, vector $(2b,b,-2b)$ de módulo $9|b|\Big]$.