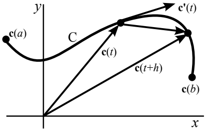
En esta sección tratamos funciones cuyos valores serán vectores.
Primero el caso más sencillo, las **funciones vectoriales**:

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathbf{c}: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^n \\ \quad t \longrightarrow \mathbf{c}(t)=\big(c_1(t), ..., c_n(t)\big)\end{array}}$$

. Sus gráficas son **curvas** en $\mathbf{R}^n$.

A menudo trataremos $\mathbf{c}$ para t en un intervalo finito $t \in [a,b]$. Entonces describe una curva que une (en ese sentido) el punto $\mathbf{c}(a)$ con el $\mathbf{c}(b)$ [extremos de la curva]. Como trabajaremos en $\mathbf{R}^2$ o $\mathbf{R}^3$, será $\mathbf{c}(t)=\big(x(t), y(t)\big)$ o $\mathbf{c}(t)=\big(x(t), y(t), z(t)\big)$.

$\mathbf{c}$ será continua si lo son sus n componentes $c_k(t)$. Y es **derivable** si las n lo son y su **derivada** es el vector $\boxed{\mathbf{c}'(t)=\big(c_1'(t), \dots, c_n'(t)\big)}$.



Al ser $\mathbf{c}'(t)=\lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{c}(t+h)-\mathbf{c}(t)}{h}$, la pendiente de la secante tenderá a la **pendiente de la recta tangente** a la curva C dada por $\mathbf{c}(t)$. Si $\mathbf{c}(t)$ describe el movimiento de una partícula, $\mathbf{c}'(t)$ es el **vector velocidad** $\mathbf{v}(t)$ y $\|\mathbf{c}'(t)\|$ la rapidez (velocidad escalar) con la que la partícula avanza por la curva.

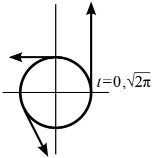
Por lo tanto, una ecuación de la **recta tangente** a C en un punto $\mathbf{c}(t_o)$ suyo $\big[$si $\mathbf{c}'(t_o)\neq \mathbf{0}\big]$ viene dada por $\boxed{\mathbf{x}(s)=\mathbf{c}(t_o)+s\,\mathbf{c}'(t_o)}$.

Ej 1. Sea $\mathbf{c}(t)=\big(\cos t^2,\operatorname{sen} t^2\big),\ t\in\big[0,\sqrt{2\pi}\,\big]$. $\mathbf{c}(0)=\mathbf{c}\big(\sqrt{2\pi}\,\big)=(1,0)$.

Por ser $\|\mathbf{c}(t)\|=\sqrt{\cos^2+\operatorname{sen}^2}=1$, recorrerá $\mathbf{c}$ la circunferencia unidad.

$\mathbf{c}'(t)=\big(-2t\operatorname{sen} t^2,2t\cos t^2\big)$ será un vector tangente, y es $\|\mathbf{c}'(t)\|=2t$.

$\big[$La velocidad escalar crece con el tiempo. La misma curva la describe $\mathbf{c}_*(t)=(\cos t,\operatorname{sen} t)$, $t\in[0,2\pi]$, y para ella es $\|\mathbf{c}_*'(t)\|=1$ constante$\big]$.



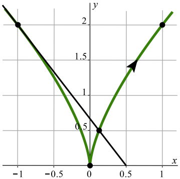
Ej 2. Dibujemos $\mathbf{c}(t)=\big(t^3,2t^2\big)$ para $t\in[-1,1]$ y hallemos su recta tangente en $(-1,2)$ y dónde esta recta vuelve a cortar la curva.

Dando valores a t, o desde $y=2x^{2/3}$ sale el dibujo. [Cuando $\mathbf{c}'=\mathbf{0}$ puede haber picos].

$$t=-1 \to \mathbf{c}(-1)=(-1,2),\ \mathbf{c}'(-1)=(3t^2,4t)\big|_{t=-1}=(3,-4).$$

Recta tangente: $\mathbf{x}(s)=(3s-1,2-4s)$. Se cortan si t y s cumplen:

$$t^3=3s-1,\ 2t^2=2-4s \to (3s-1)^2=(1-2s)^3,\ s=\tfrac{3}{8} \to \big(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{8}\big).$$



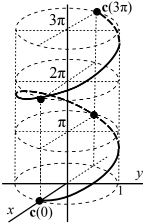
Ej 3. Dibujemos la **hélice** dada en $\mathbf{R}^3$ por $\mathbf{c}(t)=(\cos t,\operatorname{sen} t,t)$, $t\in[0,3\pi]$.

Como $[x(t)]^2+[y(t)]^2=1$, la proyección sobre el plano xy es la circunferencia unidad, y la z de la curva va creciendo con t.

El vector velocidad será $\mathbf{c}'(t)=\big(-\operatorname{sen} t,\cos t,1\big) \to \|\mathbf{c}'(t)\|=\sqrt{2}$, para cualquier t (se recorre la curva a velocidad escalar constante).

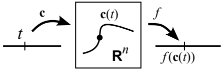
Por ejemplo, si $t=2\pi$ $\big[$en el punto $(1,0,2\pi)\big]$ es $\mathbf{c}'(2\pi)=(0,1,1)$ y la recta tangente ahí es: $\mathbf{x}=(1,0,2\pi)+s(0,1,1)=(1,s,2\pi+s)$

[contenida en el plano $x=1$ y coherente con el dibujo].



Generalizamos la fórmula $(f\circ g)'(x)=f'\big(g(x)\big)g'(x)$. Tratemos por ahora el caso más sencillo, que une funciones vectoriales y campos escalares:

> Sean $\mathbf{c}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^n$, $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ de C^1 y $h(t)=f\big(\mathbf{c}(t)\big)$.
> Entonces h es derivable y es $h'(t)=\nabla f\big(\mathbf{c}(t)\big)\cdot\mathbf{c}'(t)$,
> o sea: $h'(t)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{c}(t))\,x_1'(t)+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{c}(t))\,x_n'(t)$.



$h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$

La última igualdad (cuando $n=2$) habitualmente se escribe así $\boxed{\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}}$,

expresión imprecisa que no explica dónde está evaluada cada término y que mantiene el nombre f para la h (son los valores de f sobre una curva).

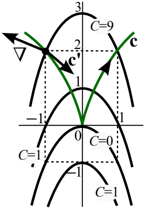
Ej 4. Si $\mathbf{c}(t)=\big(t^3,2t^2\big)$, $f(x,y)=\big(y+x^2\big)^2$ y $h=f\circ\mathbf{c}$, hallemos $h'(-1)$ con la regla de la cadena.

$\mathbf{c}(-1)=(-1,2)$, $\mathbf{c}'(-1)=(3,-4)$, $\nabla f=\big(4x(y+x^2),2(y+x^2)\big)$.

$\nabla f(-1,2)=(-12,6)$, $h'(-1)=\nabla f\big(\mathbf{c}(-1)\big)\cdot\mathbf{c}'(-1)=-60$.

[Comprobamos componiendo y derivando: $h(t)=(2t^2+t^6)^2$, $h'(-1)=-60$].

[Que sea $h'<0$ implica que la f decrece al avanzar sobre la curva, como se puede comprobar dibujándola junto a varias curvas de nivel $f=C$, que son parábolas del tipo $y=\pm\sqrt{C}-x^2$ (o mirando el gradiente en el punto)].



Son funciones de $\mathbf{R}^n$ en $\mathbf{R}^m$: $\boxed{\begin{array}{l}\mathbf{f}: D\subset\mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m \\ \quad \mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n)\to \mathbf{f}(\mathbf{x})=\big(f_1(\mathbf{x}),\dots,f_m(\mathbf{x})\big)\end{array}}$.

[O funciones vectoriales de varias variables con dominio D. Ya hemos el visto el caso de las **funciones vectoriales**, con $n=1$. Uno conocido, con $n=m$, es ∇f; otro, para $n=m=3$, será $\operatorname{rot}\mathbf{f}$; otros serán los **cambios de variable** que iremos haciendo].

En los cálculos de f escalares era importante el vector ∇f. Aquí lo será una matriz:

> $\mathbf{f}$ es diferenciable cuando lo son $f_1,\dots,f_m$.
> La **matriz diferencial** o **jacobiana** de $\mathbf{f}$ es $\mathbf{Df}\equiv\begin{pmatrix}\partial f_1/\partial x_1 & \cdots & \partial f_1/\partial x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \partial f_m/\partial x_1 & \cdots & \partial f_m/\partial x_n\end{pmatrix}$.
> [Sus filas son los gradientes de las m componentes].

[Si $m=1$, esta matriz es una matriz $n\times 1$: el vector gradiente ∇f. Si $n=1$, el vector derivada de una función vectorial $\mathbf{c}'(t)$ (escrito como columna). Y si $n=m=1$, la matriz jacobiana pasa ser la más simple de las matrices: $f'(a)$].

Si $m=n$, típico de los **cambios de variable**, es importante (integrando por ejemplo) el determinante de la matriz diferencial $n\times n$, llamado jacobiano del cambio:

> Si $\begin{cases} y_1=f_1(x_1,\dots,x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n=f_n(x_1,\dots,x_n)\end{cases}$, a $\dfrac{\partial(y_1,\dots,y_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}\equiv J\mathbf{f}\equiv\big|\mathbf{Df}\big|=\begin{vmatrix}\partial f_1/\partial x_1 & \cdots & \partial f_1/\partial x_n \\ \vdots & & \vdots \\ \partial f_n/\partial x_1 & \cdots & \partial f_n/\partial x_n\end{vmatrix}$ se le llama **determinante jacobiano** de $\mathbf{f}$.

Caso general de la regla de la cadena (y particulares más memorizables)

$$\begin{array}{c}\mathbf{R}^n \xrightarrow{\mathbf{g}} \mathbf{R}^m \xrightarrow{\mathbf{f}} \mathbf{R}^p \\ \mathbf{a} \to \mathbf{g}(\mathbf{a}) = \mathbf{b} \to \mathbf{f}(\mathbf{b})\end{array}$$

, **g** diferenciable en **a**, **f** diferenciable en $\mathbf{b}=\mathbf{g}(\mathbf{a})$

$\Rightarrow$ $\mathbf{f}\circ\mathbf{g}$ diferenciable en $\mathbf{a}$ y $\mathbf{D}(\mathbf{f}\circ\mathbf{g})(\mathbf{a}) = \mathbf{Df}(\mathbf{b})\,\mathbf{Dg}(\mathbf{a})$ [producto de matrices].

Ej 6. Sean $\mathbf{g}(x,y)=(x-y,y^2)$, $\mathbf{f}(u,v)=(u+v,uv,v)$. Hallemos $\mathbf{D}(\mathbf{f}\circ\mathbf{g})$ en $(2,1)$.

Utilizando el Teorema: $\mathbf{Df}(u,v)=\begin{pmatrix}1&1\\v&u\\0&1\end{pmatrix}$, $\mathbf{Dg}(x,y)=\begin{pmatrix}1&-1\\0&2y\end{pmatrix}$, $\mathbf{g}(2,1)=(1,1)$

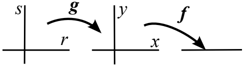
$$\Rightarrow\ \mathbf{D}(\mathbf{f}\circ\mathbf{g})(2,1)=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\\0&2\end{pmatrix}.$$

Comprobemos componiendo los campos y calculando luego la matriz diferencial:

$$(\mathbf{f}\circ\mathbf{g})(x,y)=\left(x-y+y^2,\,xy^2-y^3,\,y^2\right),\quad \mathbf{D}(\mathbf{f}\circ\mathbf{g})(2,1)=\begin{pmatrix}1&2y-1\\y^2&2xy-3y^2\\0&2y\end{pmatrix}_{(2,1)}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\\0&2\end{pmatrix}.$$

Los casos particulares que más usaremos son:

$f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$, $\underset{(r,s)\to(x,y)}{\mathbf{g}:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2}$, $\underset{(r,s)\to f(x(r,s),\,y(r,s))}{h=f\circ\mathbf{g}:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}}$



$$\left(\tfrac{\partial h}{\partial r}\ \ \tfrac{\partial h}{\partial s}\right)=\left(\tfrac{\partial f}{\partial x}\ \ \tfrac{\partial f}{\partial y}\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial r}&\frac{\partial x}{\partial s}\\ \frac{\partial y}{\partial r}&\frac{\partial y}{\partial s}\end{pmatrix}\Rightarrow\ \boxed{\frac{\partial h}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\ ,\ \ \frac{\partial h}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}}\,.$$

[A menudo se escribe f en vez de h, pues es simplemente la f en unas nuevas variables].

Similares en $\mathbf{R}^3$ para $(r,s,t)\to f(\mathbf{g}(r,s,t))=f\big(x(r,s,t),y(r,s,t),z(r,s,t)\big)$.

Resulta ser: $\boxed{f_r=f_xx_r+f_yy_r+f_zz_r}$, $\boxed{f_s=f_xx_s+f_yy_s+f_zz_s}$, $\boxed{f_t=f_xx_t+f_yy_t+f_zz_t}$.

[Derivadas de f respecto a todas las variables intermedias multiplicadas por sus derivadas respecto a la variable de la izquierda].

Ej 7. Escribamos la EDP $(y-2)u_y - xu_x = x^2 y$ en las nuevas variables $s=xy-2x$, $t=x$.

Cambiamos el nombre a las variables: $\begin{cases} u_x = u_s s_x + u_t t_x = (y-2)u_s + u_t \\ u_y = u_s s_y + u_t t_y = xu_s \end{cases}$. Llevadas a la EDP:

$-xu_t = x^2 y$, $u_t = -xy = -s-2t$, pues en las nuevas variables: $xy = s+2x = s+2t$.

Ej 8. Si $\begin{cases} x=r+s^2 \\ y=rs \end{cases}$, las derivadas de $f(r+s^2, rs)$ respecto a (r,s) son $\begin{cases} f_r = f_x + sf_y \\ f_s = 2sf_x + rf_y \end{cases}$.

Si $f \in C^2$ podemos hallar también las **derivadas segundas** con la regla de la cadena.

Como f_x y f_y son también funciones de r y s, se derivarán respecto a r y s de la misma forma que se derivaba la f (utilizando las expresiones de arriba):

$$f_{rr} = (f_r)_r = (f_x)_r + s(f_y)_r = [f_{xx} + sf_{xy}] + s[f_{yx} + sf_{yy}] = f_{xx} + 2sf_{xy} + s^2 f_{yy}$$

(•) $$f_{rs} = (f_r)_s = (f_x)_s + s(f_y)_s + f_y = [2sf_{xx} + rf_{xy}] + s[2sf_{yx} + rf_{yy}] + f_y = 2sf_{xx} + (r+2s^2)f_{xy} + rsf_{yy} + f_y$$

$$f_{ss} = (f_s)_s = 2s(f_x)_s + r(f_y)_s + 2f_x = 2s[2sf_{xx} + rf_{xy}] + r[2sf_{yx} + rf_{yy}] + 2f_x$$
$$= 4s^2 f_{xx} + 4rsf_{xy} + r^2 f_{yy} + 2f_x$$

[Para escribir, por ejemplo, $(f_x)_r$ se utilizó que, según la expresión para las derivadas primeras, había que derivarla respecto a x y sumarle s por su derivada respecto a y].

[(•) se podría también hacer así, pues las derivadas cruzadas de las funciones C^2 coinciden:

$$f_{rs} = (f_s)_r = 2s[f_{xx} + sf_{yx}] + r[f_{xy} + sf_{yy}] + f_y = 2sf_{xx} + (r+2s^2)f_{xy} + rsf_{yy} + f_y \,].$$

Si $\mathbf{f}=(f,g):\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ es campo vectorial C^1, la **divergencia** de **f** es el campo escalar $\operatorname{div}\mathbf{f}\equiv f_x+g_y$. En $\mathbf{R}^3$, si $\mathbf{f}=(f,g,h)$, $\operatorname{div}\mathbf{f}=f_x+g_y+h_z$.

Llamando $\nabla\equiv\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)$ [notación sólo, eso no es ningún vector] la divergencia se escribe también $\nabla\cdot\mathbf{f}$.

Si $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ es C^2, el **laplaciano** de **f** es $\Delta f\equiv\nabla^2 f\equiv\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$.

Es otro campo escalar. En particular, $\boxed{\Delta f=f_{xx}+f_{yy}}$ o $\boxed{\Delta f=f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}}$.

Para $n=3$ hay otro importante campo vectorial que se obtiene a partir de uno dado:

Si $\mathbf{f}=(f,g,h):\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ es C^1, el **rotacional** de **f** es el campo vectorial:

$$\operatorname{rot}\mathbf{f}=\nabla\times\mathbf{f}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \partial/\partial x&\partial/\partial y&\partial/\partial z\\ f&g&h\end{vmatrix}=(h_y-g_z)\,\mathbf{i}+(f_z-h_x)\,\mathbf{j}+(g_x-f_y)\,\mathbf{k}\,.$$

Algunas propiedades y relaciones fácilmente comprobables son:

$$\boxed{\operatorname{rot}(\nabla f)=\mathbf{0}\,,\ \operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{f})=0\,,\ \operatorname{div}(g\,\mathbf{f})=g\operatorname{div}\mathbf{f}+\nabla g\cdot\mathbf{f}\,,\ \operatorname{rot}(g\,\mathbf{f})=g\operatorname{rot}\mathbf{f}+\nabla g\times\mathbf{f}\,.}$$

Por ejemplo, la primera: $\operatorname{rot}(f_x,f_y,f_z)=(f_{zy}-f_{yz})\,\mathbf{i}+(f_{xz}-f_{zx})\,\mathbf{j}+(f_{yx}-f_{xy})\,\mathbf{k}=\mathbf{0}$.

[No sólo el rotacional de un gradiente es $\mathbf{0}$. En 2.2 veremos que si el rotacional de un campo vectorial C^1 se anula, este campo será el gradiente de un campo escalar que sabremos calcular].

Ej 9. Sea $\mathbf{f}=\big(xyz, e^{yz}, y^2\big)$. rot $\mathbf{f}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ xyz & e^{yz} & y^2\end{vmatrix}=\big(2y-y\,e^{yz},\ xy\ ,-xz\big)$.

div $\mathbf{f}=yz+z\,e^{yz}$. div (rot $\mathbf{f}$) $=0+x-x=0$ (debía serlo).

$\nabla(\operatorname{div}\mathbf{f})=\big(0\,,z+z^2e^{yz},\ y+e^{yz}+yz\,e^{yz}\big)$. $\Delta(\operatorname{div}\mathbf{f})=(z^3+y^2z+2y)\,e^{yz}$.

[No tiene sentido hablar del gradiente o laplaciano de $\mathbf{f}$, ni de divergencia o rotacional de escalares. Estos 4 'operadores' (reglas que convierten funciones en otras) son 'lineales' (porque lo es la derivada): $\nabla(af+bg)=a\nabla f+b\nabla g$, $a,b\in\mathbf{R}$, e igual los otros tres].

En **coordenadas polares** de $\mathbf{R}^2$: $\boxed{\begin{matrix}x=r\cos\theta\\ y=r\operatorname{sen}\theta\end{matrix}}$ $\begin{matrix}r=\sqrt{x^2+y^2}\,,\\ \tan\theta=\frac{y}{x}\,.\end{matrix}$ es $\boxed{\Delta f=f_{rr}+\frac{f_r}{r}+\frac{f_{\theta\theta}}{r^2}}$.

Por la regla de la cadena: $\begin{cases}f_r=\cos\theta\,f_x+\operatorname{sen}\theta\,f_y\\ f_\theta=-r\operatorname{sen}\theta\,f_x+r\cos\theta\,f_y\end{cases}$. Y usándola de nuevo:

$$\begin{cases}f_{rr}=\cos^2\theta\,f_{xx}+2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,f_{xy}+\operatorname{sen}^2\theta\,f_{yy}\\ f_{\theta\theta}=r^2\operatorname{sen}^2\theta\,f_{xx}-2r^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,f_{xy}+r^2\cos^2\theta\,f_{yy}-r\cos\theta\,f_x-r\operatorname{sen}\theta\,f_y\end{cases}$$

Escribiendo la suma $f_{rr}+\frac{f_r}{r}+\frac{f_{\theta\theta}}{r^2}$ y usando $\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta=1$ se obtiene $f_{xx}+f_{yy}$.

Ej 10. Si $f(x,y)=\frac{x^3}{x^2+y^2}$, hallemos $\Delta f(1,1)$. Pide polares: $f(r,\theta)=r\cos^3\theta$.

$\Delta f=0+\frac{\cos^3\theta}{r}+\frac{6\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta-3\cos^3\theta}{r}=\frac{2}{r}\cos\theta\,(3-4\cos^2\theta)=1$ en $(r,\theta)=\big(\sqrt{2}\,,\,\frac{\pi}{4}\big)$.

Mucho más largo ... $f_{xx}+f_{yy}=\frac{4x^3+6xy^2-2x^3}{(x^2+y^2)^2}+\frac{8x^3y^2-4x(x^4+3x^2y^2)}{(x^2+y^2)^3}=\frac{2x(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$.

10. Sea la curva dada por $\mathbf{c}(t)=\left(\mathrm{e}^t,t^2\right)$, $t\in[-2,2]$. Dibujarla y hallar: i) la recta tangente en el punto $(\mathrm{e},1)$ y un vector unitario normal a la curva en ese punto, ii) su punto de corte con la curva $\mathbf{r}(s)=(s,s-1)$, $s\in[0,5]$.

11. Sean $g(x,y)=\sqrt{20-x^2-y^2}$ y la curva $\mathbf{c}(t)=\left(t,t^2\right)$, $t\in[-2,2]$. a) Dibujar en el plano xy las curvas de nivel $g(x,y)=2\sqrt{5}\,,4\,,0$ y la curva C descrita por $\mathbf{c}(t)$.
b) Hallar de dos formas la ecuación del plano tangente a la gráfica de g en $(-1,1)$.
c) Hallar la derivada de $h(t)=g(\mathbf{c}(t))$ en $t=-1$ utilizando la regla de la cadena.

14. Sea $f(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$. Dibujar las curvas de nivel $f(x,y)=0\,,1\,,\frac{1}{2}\,,\frac{2}{5}$, y $\nabla f(2,1)$. Hallar un $\mathbf{u}$ unitario tal que $D_{\mathbf{u}}f(2,1)$ valga: i) 0, ii) $-\frac{3}{25}$. Hallar $\operatorname{div}(\nabla f)$. Si $\mathbf{c}(t)=\left(2t^2,t^2\right)$ y $h(t)=g(\mathbf{c}(t))$, hallar $h'(1)$ con la regla de la cadena.

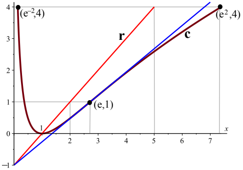
17. Si $\mathbf{F}(x,y,z)=xy\,\mathbf{i}+y^2\,\mathbf{j}+xz\,\mathbf{k}$, hallar: $\operatorname{div}\mathbf{F}$, $\operatorname{rot}\mathbf{F}$, $\nabla(\operatorname{div}\mathbf{F})$, $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{F})$, $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{F})$, $\nabla(\mathbf{F}\cdot\mathbf{F})$.

1 (jl21). Sea $f(x,y)=\cos(y-2x)$. Dibujar $\nabla f\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ junto con la curva de nivel que pasa por $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Escribir la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

8. Sea $F(x,y,z)=\frac{z-x}{y^2}$. Hallar el plano tangente a $F=1$ en $(0,-1,1)$. Calcular ΔF.

2 de prob 2. Sea $f(x,y)=y^2-x$. **a]** Dibujar las curvas $f=0$ y $f=-1$. Hallar el $\mathbf{u}$ unitario con $D_{\mathbf{u}}f(1,-1)$ es mínima y su valor. Calcular Δf en cartesianas y polares.

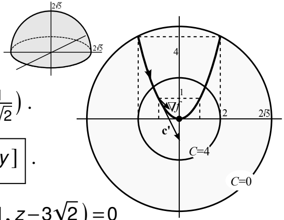
12. Si $h(t)=f(t,-t,t^2)$, dar fórmula para h''. Comprobarla para $f(x,y,z)=x+y+z^2$.



10. $\mathbf{c}(t)=\left(\mathrm{e}^t,\ t^2\right)$. Pasa por $(\mathrm{e}^{-2},4)$, $(1,0)$, $(\mathrm{e},1)$ y $(\mathrm{e}^2,4)$.
$\left[\text{Es la gráfica de } y=(\log x)^2 \text{, pues } t=\log x \text{ e } y=t^2\right]$.

i) $\mathbf{c}'(t)=\left(\mathrm{e}^t,\ 2t\right)$, $\mathbf{c}'(1)=(\mathrm{e},2)$.
Tangente $\mathbf{x}=(\mathrm{e},1)+s(\mathrm{e},2)=(\mathrm{e}+s\,\mathrm{e},\ 1+2s)$.
Normales $(\pm1,\mp\mathrm{e}) \to \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^2+1}}(\pm1,\mp\mathrm{e})$.

ii) La recta $\mathbf{r}(s)=(s,s-1)$ la corta sólo en $(1,0)$ ($t=0$ y $s=1$).
$\left[s=\mathrm{e}^t,\ s-1=t^2 \Rightarrow 1+t^2=\mathrm{e}^t \Leftrightarrow t=0\text{, como muestran las gráficas}\right]$.



11. a) $g(x,y)=C \to x^2+y^2=20-C^2$ circunferencias.
$\mathbf{c}(t)=\left(t,t^2\right)$ es parte de la parábola $y=x^2$.

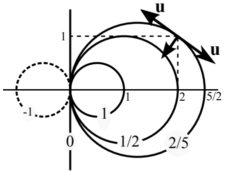
b) $g_x=\frac{-x}{\sqrt{20-x^2-y^2}}$, $g_y=\frac{-y}{\sqrt{20-x^2-y^2}}$. $\nabla g(-1,1)=\left(\frac{1}{3\sqrt{2}},-\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)$.

Plano: $z=3\sqrt{2}+\frac{1}{3\sqrt{2}}(x+1)-\frac{1}{3\sqrt{2}}(y-1)$, $\boxed{z=\frac{1}{3\sqrt{2}}[20+x-y]}$.

O con: $G(x,y,z)=x^2+y^2+z^2=20,\ \left(2,2,6\sqrt{2}\right)\cdot\left(x+1,\,y-1,\,z-3\sqrt{2}\right)=0$

c) $\mathbf{c}'(-1)=(1,2t)\big|_{t=-1}$. $h'(t)=\nabla g(\mathbf{c}(t))\cdot\mathbf{c}'(t)$. $h'(-1)=\nabla g(-1,1)\cdot(1,-2)=\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$.

$\left[\text{Componiendo y derivando: } h(t)=\sqrt{20-t^2-t^4},\ h'(t)=\frac{-t-2t^3}{\sqrt{20-t^2-t^4}} \xrightarrow{t=-1} \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.



14. $f(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}=0 \to x=0$. $\frac{x}{x^2+y^2}=C \to x^2+y^2=\frac{x}{C}$,

$\left(x-\frac{1}{2C}\right)^2+y^2=\frac{1}{4C^2}$. Centro $\left(\frac{1}{2C},0\right)$ y pasan por $(0,0)$ y $\left(\frac{1}{C},0\right)$.

$\nabla f(x,y)=\left(\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\right)$, $\nabla f(2,1)=\left(-\frac{3}{25},-\frac{4}{25}\right)$.
($\perp$ a la circunferencia por el punto)

i) Se anula en dirección perpendicular a ∇f: $\boxed{\mathbf{u}=\left(\pm\frac{4}{5},\mp\frac{3}{5}\right)}$.

ii) Uno claro es $\boxed{\mathbf{u}=(1,0)}$, pues la parcial $f_x=-\frac{3}{25}$ es precisamente la derivada según **i**.

Sin vista: $D_{\mathbf{u}}f(2,1)=\left(-\frac{3}{25},-\frac{4}{25}\right)\cdot(a,b)=-\frac{3}{25} \to 3a+4b=3$, $b=\frac{3}{4}(1-a)$ y $a^2+b^2=1$

$\to a^2+\frac{9}{16}a^2-\frac{9}{8}a+\frac{9}{16}=1$, $25a^2-18a-7=0$, $a=1$ ó $-\frac{7}{25} \to b=0$ ó $\frac{24}{25}$. $\mathbf{u}=\left(-\frac{7}{25},\frac{24}{25}\right)$ otro.

$$\Delta f=-2x\left(x^2+y^2\right)^{-2}+4x\left(x^2-y^2\right)\left(x^2+y^2\right)^{-3}-2x\left(x^2+y^2\right)^{-2}+8xy^2\left(x^2+y^2\right)^{-3}$$
$$=4x\left(x^2+y^2\right)^{-3}\left[-x^2-y^2+x^2-y^2+2y^2\right]=\boxed{0}.$$

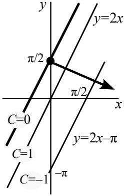
Mejor polares: $f(r,\theta)=\frac{\cos\theta}{r}$, $f_r=-\frac{\cos\theta}{r^2}$, $f_{rr}=\frac{2\cos\theta}{r^3}$, $f_{\theta\theta}=-\frac{\cos\theta}{r}$, $f_{rr}+\frac{1}{r}f_r+\frac{1}{r^2}f_{\theta\theta}=0$.

$\mathbf{c}(t)=\left(2t^2,t^2\right)$, $\mathbf{c}(1)=(2,1)$, $\mathbf{c}'(1)=(4,2)$, $h'(1)=\nabla f(2,1)\cdot(4,2)=\boxed{-\frac{4}{5}}$. $\left[h(t)=\frac{2}{5t^2}\right]$.

17. $\boxed{\mathbf{F}(x,y,z)=\left(xy,y^2,xz\right)}$. div $\mathbf{F}=3y+x$. rot $\mathbf{F}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \partial/\partial x&\partial/\partial y&\partial/\partial z\\ xy&y^2&xz\end{vmatrix}=(0,-z,-x)$.

$\nabla(\text{div}\,\mathbf{F})=(1,3,0)$. div(rot $\mathbf{F}$)$=0$ (sabido).

$$\text{rot(rot}\,\mathbf{F})=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \partial/\partial x&\partial/\partial y&\partial/\partial z\\ 0&-z&-x\end{vmatrix}=(1,1,0).\quad \nabla(\underbrace{\mathbf{F}\cdot\mathbf{F}}_{x^2y^2+y^4+x^2z^2})=\left(2x(y^2+z^2),2x^2y+4y^3,2x^2z\right).$$



1 (jl21). $\boxed{f(x,y)=\cos(y-2x)}$. $\nabla f=\big(2\,\mathrm{sen}\,(y-2x),-\,\mathrm{sen}\,(y-2x)\big)\overset{(0,\pi/2)}{\longrightarrow}(2,-1)$.

$f\big(0,\frac{\pi}{2}\big)=0$, $f=0\to y-2x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ [rectas paralelas]. $y=2x+\frac{\pi}{2}$ la del punto.

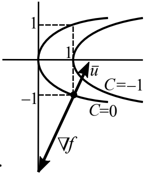
Plano tangente: $z=0+2(x-0)-\big(y-\frac{\pi}{2}\big)$, $\boxed{z=2x-y+\frac{\pi}{2}}$.

[El problema completo con integrales es el 15 de problemas 2].

8. $\boxed{F(x,y,z)=\frac{z-x}{y^2}}$. $\boxed{\nabla F=\Big(-\frac{1}{y^2},\frac{2(x-z)}{y^3},\frac{1}{y^2}\Big)}\overset{(0,-1,1)}{\longrightarrow}(-1,2,1)$. $\Delta F=\boxed{\frac{6(z-x)}{y^4}}$.

Plano tangente: $0=(-1,2,1)\cdot(x,y+1,z-1)=-x+2y+2+z-1$, es decir, $\boxed{z=x-2y-1}$.

$\big[$O bien, $F=1$ es $z=x+y^2$, $\nabla=(1,2y)$ y su plano tangente en $(0,-1)$ es $z=1+x-2(y+1)^{\uparrow}\big]$.



2.2. a] $\boxed{f(x,y)=y^2-x}=0\to x=y^2$, $f=-1\to x=y^2+1$ (parábolas).

$\nabla f(x,y)=(-1,2y)$. $f(1,-1)=0$, $\nabla f(1,-1)=(-1,-2)$.

$D_{\mathbf{u}}$ mínima en sentido opuesto a ∇f : $(1,2)\to\bar{u}=\big(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\big)$.

$D_{\mathbf{u}}f(1,-1)=-\sqrt{5}$. $\Delta f=f_{xx}+f_{yy}=2$.

$f(r,\theta)=r^2\mathrm{sen}\,\theta-r\cos\theta$. $f_{rr}+\frac{f_r}{r}+\frac{f_{\theta\theta}}{r^2}=2s^2+2s^2-\frac{c}{r}+2c^2-2s^2+\frac{c}{r}=2$.

12. $\boxed{h(t)=f(t,-t,t^2)}$, $h'(t)=f_x-f_y+2tf_z$, $h''(t)=(f_x)'-(f_y)'+2t(f_z)'+2f_z$

$=f_{xx}-f_{xy}+2tf_{xz}-f_{yx}+f_{yy}-2tf_{yz}+2tf_{zx}-2tf_{zy}+4t^2f_{zz}+2f_z=f_{xx}+f_{yy}+4t^2f_{zz}-2f_{xy}+4tf_{xz}-4tf_{yz}+2f_z$.

Para la f dada, $h(t)=t^4$, $h''(t)=12t^2$. Con la fórmula: $h''(t)=8t^2+4z\big|_{z=t^2}=12t^2$.