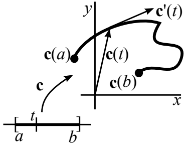
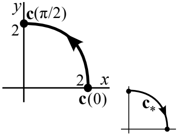
# 2.2 Integrales de línea. De campos escalares.




Una **función vectorial** era $\mathbf{c} : [a, b] \to \mathbf{R}^n$, $\mathbf{c}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, cuya gráfica es una **curva** $C$ en $\mathbf{R}^n$ y era $\mathbf{c}'(t) = (x_1'(t), \dots, x_n'(t))$ el vector tangente a la curva. Llamaremos a **c** también **trayectoria** o **camino** en $\mathbf{R}^n$. Es $\mathbf{c} \in C^1$ si es continua y $\mathbf{c}'$ existe y es continua $\forall t \in (a, b)$ y es $C^1$ **a trozos** si $C$ es continua y se puede dividir $[a, b]$ en un número finito de subintervalos siendo $C^1$ en cada uno.




**Ej 1.** $\mathbf{c} : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbf{R}^2$ con $\mathbf{c}(t) = (2\cos t, 2\,\mathrm{sen}\, t)$ es trayectoria $C^1$ pues $\mathbf{c}'(t) = (-2\,\mathrm{sen}\, t, 2\cos t)$ existe $\forall t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

$\mathbf{c}_* : [0, 2] \to \mathbf{R}^2$ con $\mathbf{c}_*(t) = \left(t, \sqrt{4-t^2}\right)$, $\mathbf{c}_*'(t) = \left(1, -t(4-t^2)^{-1/2}\right)$ es otro camino $C^1$, que describe esa misma curva (en sentido opuesto). Se dice que $\mathbf{c}$ y $\mathbf{c}_*$ son dos **parametrizaciones** de la misma curva $C$.

Hay dos tipos de integrales de línea: de campos **escalares** y de **vectoriales**. Comencemos con las **integrales de campos escalares a lo largo de curvas**:

Sea $\mathbf{c}(t) : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ camino $C^1$ y sea $f$ un campo escalar en $\mathbf{R}^n$ tal que $f\big(\mathbf{c}(t)\big)$ es continua en $[a, b]$. La integral de $f$ sobre **c** (o a lo largo de **c**) se define:

$$\int_{\mathbf{c}} f\, ds \equiv \int_a^b f\big(\mathbf{c}(t)\big)\, \|\mathbf{c}'(t)\|\, dt\,.$$

Si $\mathbf{c}$ es $C^1$ a trozos o $f(\mathbf{c}(t))$ continua a trozos, se se divide $[a, b]$ en intervalos sobre los que $f(\mathbf{c}(t))\|\mathbf{c}'(t)\|$ sea continua y será $\int_{\mathbf{c}} f\, ds$ la suma de las integrales.

# No dependen de la parametrización

**Ej 1*.** Si $f(x,y)=xy^2$ y $\mathbf{c}$, $\mathbf{c}_*$ son los de antes, las integrales a lo largo de los dos caminos son:

$$\|\mathbf{c}'\|=\sqrt{4\,\mathrm{sen}^2 t+4\cos^2 t}=2\,,\quad \int_{\mathbf{c}} f\,ds=\int_0^{\pi/2}16\cos t\,\mathrm{sen}^2 t\,dt=\tfrac{16}{3}\,\mathrm{sen}^3 t\Big]_0^{\pi/2}=\tfrac{16}{3}\,.$$

$$\|\mathbf{c}_*'\|=\sqrt{1+\tfrac{t^2}{4-t^2}}=\tfrac{2}{\sqrt{4-t^2}}\,,\quad \int_{\mathbf{c}_*} f\,ds=\int_0^2 t\,(4-t^2)\,\tfrac{2}{\sqrt{4-t^2}}\,dt=-\tfrac{2}{3}\,(4-t^2)^{3/2}\Big]_0^2=\tfrac{16}{3}\,.$$

No es casualidad que ambas integrales coincidan. Se prueba que:

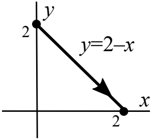
**Teor** $\boxed{\text{Si } \mathbf{c} \text{ y } \mathbf{c}_* \text{ describen la misma curva } C\text{, entonces } \int_{\mathbf{c}} f\,ds=\int_{\mathbf{c}_*} f\,ds\equiv\int_C f\,ds\,.}$

**La integral de línea de una $f$ escalar no depende de la parametrización, sólo de la curva** y es lícita la notación $\int_C f\,ds$ (integral de $f$ sobre $C$) donde **c** no aparece.

La raíz de la norma hace que el cálculo de estas integrales sea complicado (salvo para curvas sencillas) y no es raro que aparecezcan integrales no calculables. [Con los campos vectoriales no ocurrirá esto]. Además de las circunferencias, también suelen ser fáciles sobre segmentos:

**Ej 2.** Calculemos la integral de la $f(x,y)=xy^2$ ahora sobre el segmento que une $(0,2)$ y $(2,0)$.

Podemos parametrizarlo utilizando que pertenece a la recta $y=2-x$:




$$\mathbf{c}(x)=(x,2-x)\,,\ x\in[0,2]\,.\ \ \|\mathbf{c}'(x)\|=\|(1,-1)\|=\sqrt{2}\ \to$$

$$\int_{\mathbf{c}} f\,ds=\int_0^2\sqrt{2}\,x(2-x)^2\,dx=\sqrt{2}\,\big[2x^2-\tfrac{4}{3}x^3+\tfrac{1}{4}x^4\big]_0^2=\tfrac{4}{3}\sqrt{2}\,.$$

O también con la expresión para los segmentos que ya vimos en 1.1:

$\mathbf{c}_*(t)=(0,2)+t(2,-2)=(2t,2-2t)\,,\ t\in[0,1]$ [doble velocidad].

$\|\mathbf{c}_*'(t)\|=2\sqrt{2}\to\int_{\mathbf{c}_*} f\,ds=16\sqrt{2}\int_0^1 t(1-t)^2dt=16\sqrt{2}\big[\tfrac{1}{2}-\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{4}\big]=\tfrac{4}{3}\sqrt{2}$ [debe salir lo mismo].

# Interpretaciones de estas integrales

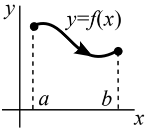
Sea primero $f \equiv 1$ . Si $\mathbf{c}(t)$ describe una partícula, al ser $\|\mathbf{c}'(t)\|$ la velocidad escalar, dará $ds = \|\mathbf{c}'(t)\|\, dt$ la distancia recorrida en un 'diferencial de tiempo $dt$' y por tanto:

$\boxed{L = \int_C ds = \int_a^b \|\mathbf{c}'(t)\|\, dt}$ representa la **longitud** de la curva $C$ definida por $\mathbf{c}$ .

Veamos como queda la fórmula para la gráfica de una función $y = f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ . Una parametrización clara es $\mathbf{c}(x) = \big(x, f(x)\big)$ , $x \in [a, b]$ . Y como $\mathbf{c}'(x) = \big(1, f'(x)\big)$ , la longitud pasa a ser

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx .$$

[Fórmula análoga para $x = f(y)$ . En general, integrales difíciles].

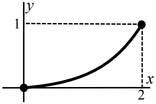



**Ej 3.** Hallemos la longitud de la curva dada por la función vectorial $\mathbf{c}(t) = \big(2t^2, t^3\big)$ , $t \in [0,1]$ .

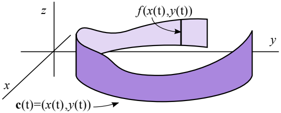
$\mathbf{c}'(t) = (4t, 3t^2)$, $L = \int_0^1 t\sqrt{16+9t^2}\, dt = \frac{1}{27}\,(16+9t^2)^{3/2}\Big]_0^1 = \frac{61}{27} \approx 2.26$ .

O con otra parametrización distinta, usando que es $y = (\frac{x}{2})^{3/2}$ :

$\big(x, (\frac{x}{2})^{3/2}\big)$ , $x \in [0,2]$ , $L = \int_0^2 \big(1 + \frac{9x}{32}\big)^{1/2} dx = \frac{64}{27}\big(1 + \frac{9x}{32}\big)^{3/2}\Big]_0^2 \uparrow$

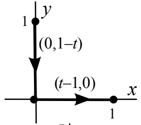



Si $f$ es cualquier campo con $f(\mathbf{c}(t)) \geq 0$ $\forall t \in [a, b]$ , $\int_{\mathbf{c}} f\, ds$ representa para $n=2$ el **área de la valla** de altura $f(x, y)$ en cada $(x, y)$ de la curva $C$ , pues un 'diferencial de valla' tiene por área $f(\mathbf{c}(t))\, ds = f(\mathbf{c}(t))\, \|\mathbf{c}'(t)\|\, dt$ .



**Ej 4.** Integremos $f(x,y)=x-y$ sobre la curva $C^1$ a trozos $\mathbf{c}(t)=\begin{cases}(0,1-t),\ t\in[0,1]\\(t-1,0),\ t\in[1,2]\end{cases}$ .

Itegramos sobre cada segmento y sumamos el resultado.



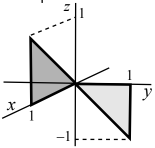

Sobre el vertical, $f(\mathbf{c}_1(t))=t-1$ , $\|\mathbf{c}_1'(t)\|=\|(0,-1)\|=1\ \rightarrow$

$$\int_{\mathbf{c_1}} f\,ds=\int_0^1(t-1)\,dt=\tfrac{1}{2}-1=-\tfrac{1}{2}\,.$$

Sobre el otro, $f(\mathbf{c}_2(t))=t-1$ , $\|\mathbf{c}_2'(t)\|=1$ , $\int_{\mathbf{c_2}} f\,ds=\int_1^2(t-1)\,dt=\tfrac{1}{2}$ .

La integral total es, por tanto: $\int_{\mathbf{c}} f\,ds=\int_{\mathbf{c_1}}+\int_{\mathbf{c_2}}=-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}=0$ .

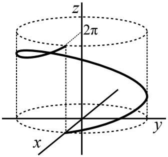
[El área de la valla positiva sobre el eje de las $x$ se cancela con el área de la valla negativa sobre el eje de las $y$ ].




Otro significado de las integrales de línea de campos escalares: si si $\mathbf{c}(t)$ describe un alambre (en el plano o en el espacio) con una densidad variable dada por $\rho(\mathbf{x})$ , la **masa del alambre** será $M=\int_C \rho\,ds$ .

Un ejemplo de longitud y masa calculables exactamente en el espacio:

**Ej 5.** Sea el alambre en forma de hélice $\mathbf{c}(t)=(\cos t,\operatorname{sen} t,t)$ , $t\in[0,2\pi]$ , y de densidad variable $\rho(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ .



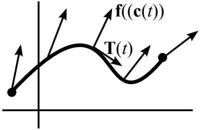

Como $\|\mathbf{c}'\|=\sqrt{2}$ , su longitud es $L=\int_0^{2\pi}\sqrt{2}\,dt=2\pi\sqrt{2}\approx 8.9$ .

Su masa $M=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}(\cos^2 t+\operatorname{sen}^2 t+t^2)\,dt=\sqrt{2}\left(2\pi+\tfrac{8}{3}\pi^3\right)\approx 125.8$ .

Sea $\mathbf{c}(t):[a,b]\to\mathbf{R}^n$ de $C^1$ y sea $\mathbf{f}:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ campo vectorial continuo sobre la gráfica de $\mathbf{c}$. Entonces la integral de línea del campo $\mathbf{f}$ a lo largo de $\mathbf{c}$ se define

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{f}\big(\mathbf{c}(t)\big)\cdot \mathbf{c}'(t)\,dt\,.$$

Si $\mathbf{f}(\mathbf{c}(t))\cdot\mathbf{c}'(t)$ es continua a trozos, se divide el intervalo y se suman la integrales.




Si $\mathbf{c}'(t)\neq\mathbf{0}\ \forall t$ y $\mathbf{T}(t)=\frac{\mathbf{c}'(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|}$ es el vector tangente unitario:

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \big[\,\mathbf{f}(\mathbf{c}(t))\cdot\mathbf{T}(t)\big]\,\|\mathbf{c}'(t)\|\,dt = \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}\cdot\mathbf{T}\,ds\,,$$

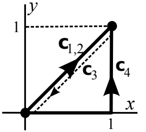
que se puede mirar como la integral del campo escalar $\mathbf{f}\cdot\mathbf{T}$, componente tangencial de $\mathbf{f}$ en la dirección de $\mathbf{c}$. Por tanto:

$\int_{\mathbf{c}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}$ es el **trabajo** realizado por un campo de fuerzas $\mathbf{f}$ sobre la partícula que recorre $\mathbf{c}$.

**Ej 6.** Calculemos varias integrales del línea de $\mathbf{f}(x,y)=\big(x^2,2y+x\big)$ sobre distintos caminos:

$$\mathbf{c}_1(t)=(t,t)\,,\ t\in[0,1]\,,\ \ \mathbf{c}_2(t)=(4t^2,4t^2)\,,\ t\in\big[0,\tfrac12\big]\,,\ \ \mathbf{c}_3(t)=(1-t,1-t)\,,\ t\in[0,1]$$

[describen la misma curva, la tercera en sentido contrario].




$$\int_{\mathbf{c}_1}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (t^2,3t)\cdot(1,1)\,dt = \int_0^1 (t^2+3t)\,dt = \tfrac13+\tfrac32 = \tfrac{11}{6}\,.$$

$$\int_{\mathbf{c}_2}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s} = \int_0^{1/2}(16t^4,12t^2)\cdot(8t,8t)\,dt = 16\int_0^{1/2}(8t^5+6t^3)\,dt = \tfrac{11}{6}\,,$$

$$\int_{\mathbf{c}_3}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 \big((1-t)^2,3(1-t)\big)\cdot(-1,-1)\,dt = \int_0^1\big(-4+5t+t^2\big)\,dt = -\tfrac{11}{6}\,.$$

$$\mathbf{c}_4(t)=\begin{cases}(t,0)\,,\ t\in[0,1]\\(1,t-1),\ t\in[1,2]\end{cases},\ \int_{\mathbf{c}_4}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (t^2,t)\cdot(1,0)\,dt + \int_1^2 (t^2,2t-1)\cdot(0,1)\,dt = \tfrac13+2=\tfrac73\,.$$

La integral parece depender sólo de la curva y del sentido en que se recorre. Incluso para algunos campos no dependerá siquiera de la curva, sólo del punto inicial y del punto final.

**Ej 7.** Hallemos la integrales para los mismos $\mathbf{c_k}$ , pero ahora para el campo $\mathbf{g}(x,y)=(y,x-4y)$ :

$$\int_{\mathbf{c}_1}\mathbf{g}\cdot d\mathbf{s}=\int_0^1(t,-3t)\cdot(1,1)\,dt=-\int_0^1 2t\,dt=-1\,,$$

$$\int_{\mathbf{c}_2}\mathbf{g}\cdot d\mathbf{s}=\int_0^{1/2}(4t^2,-12t^2)\cdot(8t,8t)\,dt=-\int_0^{1/2}16t^3\,dt=-1\,,$$

$$\int_{\mathbf{c}_3}\mathbf{g}\cdot d\mathbf{s}=\int_0^1\big((1-t),-3(1-t)\big)\cdot(-1,-1)\,dt=\int_0^1 2(1-t)\,dt=1\ \text{[única distinta]}.$$

$$\int_{\mathbf{c}_4}\mathbf{g}\cdot d\mathbf{s}=\int_0^1(0,t)\cdot(1,0)\,dt+\int_1^2(t-1,5-4t)\cdot(0,1)\,dt=\int_1^2(5-4t)\,dt=-1\,.$$

Veamos qué sucede en general con las integrales de campos vectoriales al cambiar la parametrización. Se prueba que no cambia el valor absoluto, pero sí el signo:

**Teor** Si $\mathbf{c}$ y $\mathbf{c}_*$ describen la misma curva $C$, entonces según $\mathbf{c}$ y $\mathbf{c}_*$ lo hagan en el mismo sentido o en el opuesto se tiene, respectivamente:

$$\int_{\mathbf{c}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_{\mathbf{c}_*}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}\,,\ \text{ o bien }\ \int_{\mathbf{c}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=-\int_{\mathbf{c}_*}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}\,.$$

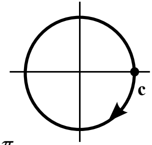
[Eso nos pasaba en los ejemplos 6 y 7 con $\mathbf{c}_1$ , $\mathbf{c}_2$ , $\mathbf{c}_3$ ].

**Ej 8.** Todo análogo en $\mathbf{R}^3$ . Si $\mathbf{h}(x,y,z)=\big(zx^2,xy,y^3\big)$ y $\mathbf{c}(t)=\big(t,t^2,1\big)$ , $t\in[0,1]$ es:

$$\int_{\mathbf{c}}\mathbf{h}\cdot d\mathbf{s}=\int_0^1\big(t^2,t^3,t^6\big)\cdot(1,2t,0)\,dt=\int_0^1\big(t^2+2t^4\big)\,dt=\tfrac{1}{3}+\tfrac{2}{5}=\tfrac{11}{15}\,.$$

Como **la integral de línea de un campo vectorial sólo depende de la curva $C$ y el sentido en que se recorre** (y la uno escalar sólo de $C$), podemos elegir las **c** más sencillas para calcularlas.

**Ej 10.** Tiene sentido preciso hablar de la integral de $\mathbf{f}(x,y)=(y,0)$ a lo largo de la circunferencia unidad recorrida en sentido de las agujas del reloj.




[Las integrales sobre curvas cerradas suelen representarse de la forma $\oint$ ].

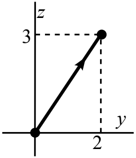
Podemos elegir $\mathbf{c}(t)=(\cos t,-\operatorname{sen} t)$ , $t\in[0,2\pi]$ (o $[-\pi,\pi]$ , o ...) ,

$$\oint_{\mathbf{c}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_0^{2\pi}(-\operatorname{sen} t,0)\cdot(-\operatorname{sen} t,-\cos t)\,dt=\tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2t)\,dt=\pi\,.$$

Cualquier parametrización que proporcionase el mismo sentido nos daría a lo mismo.

[En cartesianas habría dos caminos: $\left(x,\sqrt{1-x^2}\right)$ , $x\in[-1,1]$ y $\left(x,-\sqrt{1-x^2}\right)$ , $x\in[1,-1]$ ].

**Ej 11.** Calculemos la integral de línea del campo $\mathbf{g}(x,y,z)=\left(z,\mathrm{e}^y,xy\right)$ desde $(1,0,0)$ hasta $(1,2,3)$ a lo largo del segmento que une los puntos.




Hay muchas formas de parametrizar un segmento en el espacio. Para este, con $x=1$ constante, una **c** salta a la vista: $\mathbf{c}(t)=(1,2t,3t)$ , $t\in[0,1]$ .

Esta misma parametrización es la que nos daría la expresión dada en 1.1:

$\mathbf{c}(t)=\mathbf{p}+(\mathbf{q}-\mathbf{p})\,t$ , $t\in[0,1]$ [si $t=0$ estamos en **p** y si $t=1$ en **q**].

Del dibujo de la derecha sale una distinta: $\mathbf{c}_*(y)=\left(1,y,\tfrac{3}{2}y\right)$ , $y\in[0,2]$ .

Calculemos ya la integral pedida con ambas parametrizaciones (debe salir lo mismo):

$$\int_{\mathbf{c}}\mathbf{g}\cdot d\mathbf{s}=\int_0^1\left(3t,\mathrm{e}^{2t},2t\right)\cdot(0,2,3)\,dt=\int_0^1\left(2\mathrm{e}^{2t}+6t\right)dt=\mathrm{e}^2+2\,.$$

$$\int_{\mathbf{c}_*}\mathbf{g}\cdot d\mathbf{s}=\int_0^2\left(\tfrac{3}{2}y,\mathrm{e}^y,y\right)\cdot\left(0,1,\tfrac{3}{2}\right)dy=\int_0^2\left(\mathrm{e}^y+\tfrac{3}{2}y\right)dy=\mathrm{e}^2+2\,.$$

# Integrales de gradientes

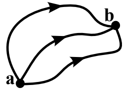
Generalizamos la sencilla fórmula de $\mathbf{R}$: $\int_a^b g'(x)\,dx = g(b) - g(a)$ .

**Teor**

| Sea $U:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ un campo escalar $C^1$ y $\mathbf{c}:[a,b]\to\mathbf{R}^n$ camino $C^1$ a trozos. Entonces: $\int_{\mathbf{c}} \nabla U\cdot d\mathbf{s} = U\big(\mathbf{c}(b)\big) - U\big(\mathbf{c}(a)\big)$ . |
|---|

Si $\mathbf{c}\in C^1$ (si no, dividimos), $\int_a^b \nabla U(\mathbf{c}(t))\cdot\mathbf{c}'(t)\,dt = \int_a^b (U\circ\mathbf{c})'(t)\,dt = U(\mathbf{c}(b)) - U(\mathbf{c}(a))$ .

Por tanto, **la integral de línea de un gradiente no depende del camino, sólo del punto inicial y final**. Si vemos que un campo es un gradiente, la integral es muy sencilla. Cuando $\mathbf{c}(a)=\mathbf{c}(b)$ , **c** define una curva cerrada e $\oint_{\mathbf{c}} \nabla U\cdot d\mathbf{s} = 0$ : **la integral de línea de un gradiente sobre cualquier curva cerrada es** $0$ .




| Si un campo vectorial **f** es gradiente de alguna función $U$, a $U$ se le llama **función potencial** para **f** , y el campo **f** se dice **conservativo**. |
|---|

¿Cómo saber si **f** es conservativo? Condiciones necesarias sencillas para $n=2$ y $n=3$ son:

**Teor**

| Si $\mathbf{f}(x,y) = \big(f(x,y), g(x,y)\big)$ de $C^1$ es conservativo $\Rightarrow$ $f_y \equiv g_x$ .<br>Si $\mathbf{f}(x,y,z) = \big(f(x,y,z), g(x,y,z), h(x,y,z)\big)$ de $C^1$ es conservativo $\Rightarrow$ $\operatorname{rot}\mathbf{f} = \mathbf{0}$ . |
|---|

Si $(f,g) = (U_x, U_y) = \nabla U$, con $U\in C^2$, debe ser $f_y \equiv g_x$ , pues, como sabemos, $U_{xy} = U_{yx}$ .
Y lo mismo para $n=3$ . Ya vimos en 1.2 que el rotacional de un gradiente siempre era **0** .

Pidiendo muy poco más las implicaciones opuestas se cumplen (aunque es difícil de demostrar):

**Teor**

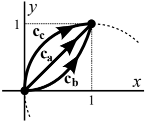
| Si **f** es $C^1$ en todo $\mathbf{R}^2$ $\left[\,\mathbf{R}^3\,\right]$ y $f_y \equiv g_x$ $\left[\,\operatorname{rot}\mathbf{f} = \mathbf{0}\,\right]$ $\Rightarrow$ **f** es conservativo. |
|---|

Cuando **f** es conservativo, muchas veces es sencillo hallar una $U$ tal que $\nabla U = \mathbf{f}$ como aquí:

**Ej 12.** Sea $\mathbf{f}(x,y) = (y^2, 2xy)$ . Hallemos la integral entre $(0,0)$ y $(1,1)$ sobre diferentes curvas: a) la recta que une los puntos, b) la parábola $y = x^2$ , c) la circunferencia $x^2 + y^2 = 2x$ .

Posibles parametrizaciones: a) $\mathbf{c_a} = (t,t)$ , b) $\mathbf{c_b} = (t,t^2)$ , c) $\mathbf{c_c} = \left(t, \sqrt{2t-t^2}\right)$ , con $t \in [0,1]$ .

Las integrales en cada caso son, respectivamente:




$$\int_0^1 (t^2, 2t^2) \cdot (1,1)\, dt = \int_0^1 3t^2 dt = 1 , \quad \int_0^1 (t^4, 2t^3) \cdot (1,2t)\, dt = \int_0^1 5t^4 dt = 1 ,$$

$$\int_0^1 \left(2t - t^2, 2t\sqrt{2t-t^2}\right) \cdot \left(1, \frac{1-t}{\sqrt{2t-t^2}}\right) dt = \int_0^1 (4t - 3t^2)\, dt = 1 .$$

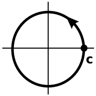
Como $\frac{\partial}{\partial y}(y^2) = 2y = \frac{\partial}{\partial x}(2xy)$ y $\mathbf{f} \in C^1$ existe potencial $U$ . Y es fácil en este caso hallarlo:

Si $U_x = y^2$ , debe ser $U = xy^2 + p(y)$ para alguna función $p$
Si $U_y = 2xy$ , debe ser $U = xy^2 + q(x)$ para alguna función $q$ $\Rightarrow U(x,y) = xy^2$ .

Por tanto, las parametrizaciones y cálculos de integrales anteriores han sido inútiles, puesto que la integral **a lo largo de cualquier trayectoria** debía valer $U(1,1) - U(0,0) = 1 - 0 = 1$ .

[El campo $(y,0)$ del ejemplo 10 no era conservativo. No podía serlo desde que vimos que su integral sobre un camino cerrado era no nula. Pero también lo asegura $f_y = 1 \neq 0 = g_x$ ].

**Ej 13.** Integremos $\mathbf{f}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ a lo largo de $x^2 + y^2 = 1$ en sentido antihorario.




Si $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ , $t \in [0, 2\pi]$ , $\oint_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} (-s, c) \cdot (-s, c)\, dt = 2\pi$ .
No hay ningún potencial $C^1$ que contenga la curva, aunque $f_y = g_x = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$ .
Además de coincidir sus derivadas, las $f$ y $g$ han de ser $C^1$.

**Ej 14.** Calculemos la integral de línea del campo vectorial $\mathbf{f}(x,y,z)=(4x\,,3z-2y\,,3y)$ desde $(1\,,0\,,0)$ hasta $(1\,,2\,,3)$ a lo largo del segmento que une los puntos.

En el ejemplo 11 ya parametrizamos el segmento y podemos hallar la integral directamente:

$$\mathbf{c}(t)=(1,2t,3t)\,,\ t\in[0,1]\ \rightarrow\ \int_{\mathbf{c}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_0^1\big(1,5t,6t\big)\cdot(0,2,3)\,dt=\int_0^1 28\,t\,dt=14\,.$$

Pero para este campo es $\operatorname{rot}\mathbf{f}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ 4x & 3z-2y & 3y\end{vmatrix}=(3-3)\,\mathbf{i}+(0-0)\,\mathbf{j}+(0-0)\,\mathbf{k}=\mathbf{0}\,.$

y además **f** es $C^1$ en $\mathbf{R}^3$. Existe, por tanto, una función potencial $U(x,y,z)$ para el campo **f**.

Debe ser $\begin{array}{l} U_x=4x\ \rightarrow\ U=2x^2+p(y,z)\\ U_y=3z-2y\ \rightarrow\ U=3yz-y^2+q(x,z)\\ U_z=3y\ \rightarrow\ U=3yz+r(x,y)\end{array}$ , $U=2x^2+3yz-y^2\ \Rightarrow$

$$\int_{\mathbf{c}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=U(1,2,3)-U(1,0,0)=16-2=14\,.$$

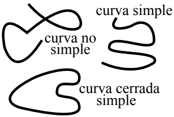
Este es el valor de la integral sobre cualquier camino que una los puntos, por complicado que sea. Por ejemplo, hallemos la integral a lo largo de $\mathbf{c}^*(t)=\big(\mathrm{e}^{t-t^2},\ 2t^3,\ 3t^2\big)\,,\ t\in[0,1]$ :

$$\int_{\mathbf{c}^*}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_0^1\big(4\,\mathrm{e}^{t-t^2},9t^2-4t^3,6t^3\big)\cdot\big((1-2t)\,\mathrm{e}^{t-t^2},6t^2,6t\big)\,dt$$

$$=\int_0^1\big(2(2-4t)\,\mathrm{e}^{2t-2t^2}+90t^4-24t^5\big)\,dt=2\,\mathrm{e}^{2t-2t^2}+18t^5-4t^6\Big]_0^1=14\,.$$

$\Big[$El campo **g** del ejemplo 11 no era conservativo, por ser $\operatorname{rot}\mathbf{g}=(x,1-y,0)\neq\mathbf{0}$, y era necesario utilizar la definición para calcular la integral pedida$\Big]$.

Una **curva simple** será la imagen de una $\mathbf{c}:[a,b]\to\mathbf{R}^2$, $C^1$ a trozos e **inyectiva**. Si además es $\mathbf{c}(a)=\mathbf{c}(b)$, se llama **curva cerrada simple**. Una curva de estas puede recorrerse en dos sentidos opuestos; para indicar que se recorre en sentido antihorario indicaremos $\oint$.




**Teorema de Green**:

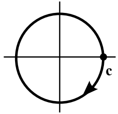
> Sea $D\subset\mathbf{R}^2$ limitado por $\partial D$ curva cerrada simple y el campo $\mathbf{f}=(f,g)\in C^1(D)$.
> Entonces $\iint_D [\,g_x-f_y\,]\,dx\,dy=\oint_{\partial D}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}$.

$\big[$Obsérvese que si $\mathbf{f}$ es conservativo, el teorema de Green dice $0=\oint\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}$ como debía ser$\big]$.

**Ej 10*.** Hallemos, usando Green, el valor $\pi$ de la integral de $\mathbf{f}(x,y)=(y,0)$ sobre la circunferencia unidad calculado ya en el ejemplo 10.

Como el sentido es el opuesto al que pide Green y $g_x-f_y=-1$ es:

$$\oint_{\partial D}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=-\iint_D(-1)\,dx\,dy=\iint_D dx\,dy=\text{área de } D=\pi 1^2=\pi\,.$$

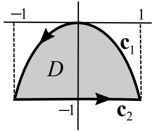



**Ej 15.** Comprobémoslo ahora para $\mathbf{f}(x,y)=(y,2x)$ en la región acotada por $y=-x^2$ e $y=-1$.

$g_x-f_y=1$ (luego $\iint_D$ medirá el área de la región y debe ser positiva).

La integral doble: $\iint_D[g_x-f_y]\,dx\,dy=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{-x^2}dy\,dx=\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx=\frac{4}{3}$.

La frontera $\partial D$ está formada por dos curvas:

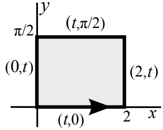



$$\mathbf{c}_1(x)=(x,-x^2)\,,\ x\in[1,-1]\,,\ \ \mathbf{c}_2(x)=(x,-1)\,,\ x\in[-1,1]\ \to$$

$$\oint_{\partial D}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_1^{-1}(-x^2,2x)\cdot(1,-2x)\,dx+\int_{-1}^{1}(-1,2x)\cdot(1,0)\,dx=\int_{-1}^{1}5x^2\,dx-\int_{-1}^{1}dx=\frac{4}{3}\,.$$

**Ej 16.** Si $\mathbf{f}(x,y)=(\mathrm{e}^x \operatorname{sen} y, \mathrm{e}^{2x}\cos y)$ y $D=[0,2]\times[0,\frac{\pi}{2}]$ hallemos $\oint_{\partial D}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}$.

La $\partial D$ la forman ahora 4 curvas (segmentos sencillos) distintas:




$$\int_0^2 0\,dt+\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^4\cos t\,dt-\int_0^2 \mathrm{e}^t\,dt-\int_0^{\pi/2}\cos t\,dt$$

$$=\mathrm{e}^4\big[-\operatorname{sen} t\big]_0^{\pi/2}-\big[\mathrm{e}^t\big]_0^2-\big[\operatorname{sen} t\big]_0^{\pi/2}=\mathrm{e}^4-\mathrm{e}^2 .$$

Utilizando Green es bastante más corto: $g_x-f_y=2\,\mathrm{e}^{2x}\cos y-\mathrm{e}^x\cos y$,

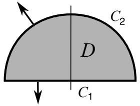
$$\int_0^{\pi/2}\int_0^2(2\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x)\cos y\,dx\,dy=\big[\operatorname{sen} y\big]_0^{\pi/2}\big[\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x\big]_0^2=\mathrm{e}^4-\mathrm{e}^2 .$$

Del teorema de Green se deduce el **teorema de la divergencia en el plano**:

Sean $D\subset\mathbf{R}^2$ limitado por $\partial D$ curva cerrada simple, $\mathbf{f}: D\to\mathbf{R}^2$ campo vectorial $C^1$, y **n** el vector normal unitario exterior a $\partial D$. Entonces $\iint_D \operatorname{div}\mathbf{f}\,dx\,dy=\oint_{\partial D}\mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\,ds$.

**Ej 18.** Comprobemos este teorema para $\mathbf{f}(x,y)=(7,y^2-1)$ en el semicírculo $r\le 3$, $0\le\theta\le\pi$:

$$\operatorname{div}\mathbf{f}=2y,\ \iint_D 2y\,dx\,dy=\int_0^{\pi}\int_0^3 2r^2\operatorname{sen}\theta\,dr\,d\theta=36 .$$




Para $C_1$, $\mathbf{c}(x)=(x,0)$, $x\in[-3,3]$, $\mathbf{n}=(0,-1)$, $\int_{C_1}(1-y^2)\,ds=\int_{-3}^3 dx=6$.

Para $C_2$, $\mathbf{c}(t)=(3\cos t,3\operatorname{sen} t)$, $t\in[0,\pi]$, $\|\mathbf{c}'(t)\|=3$.

Como $\mathbf{n}=(\cos t,\operatorname{sen} t)$, $\int_{C_2}\mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\,ds=3\int_0^{\pi}\big(7\cos t+9\operatorname{sen}^3 t-\operatorname{sen} t\big)dt=30$.

**14.** Hallar $\int_{\mathbf{c}} f\,ds$ para la $f(x,y,z)=x+z$ y la curva $\mathbf{c}(t)=\left(t,t^2,\frac{2}{3}t^3\right)$, $t\in[0,1]$.

**17.** Sea el campo vectorial $\mathbf{f}(x,y,z)=(xy\,,x\,,-yz)$. Hallar div $\mathbf{f}$ y rot $\mathbf{f}$. Calcular la integral de línea de $\mathbf{f}$ a lo largo del camino $\mathbf{c}(t)=(\cos t,\operatorname{sen} t,1)$, $t\in[0,\pi]$ y la longitud de la curva descrita por $\mathbf{c}(t)$.

**20.** Sea $\bar{\mathrm{f}}(x,y)=\left(y+3x^2,x\right)$. **a]** Calcular div $\bar{\mathrm{f}}$. ¿Deriva $\bar{\mathrm{f}}$ de un potencial? **b]** Determinar el valor de la integral de línea de $\bar{\mathrm{f}}$ desde $(1,0)$ hasta $(-1,0)$ a lo largo de la semicircunferencia $x^2+y^2=1$, $y\geq 0$. **c]** Si $D$ es el semicírculo dado por $x^2+y^2\leq 1$, $y\geq 0$, hallar el valor de la integral doble $\iint_D \operatorname{div}\bar{\mathrm{f}}$.

**21.** Sea $f(x,y)=x^2y$. **a]** Dibujar las curvas $f(x,y)=0$ y $1$. Hallar $\nabla f(-1,1)$ y un $\mathbf{u}$ unitario tal que $D_{\mathbf{u}}f(-1,1)=1$. **b]** Si $D$ es el cuadrante $x^2+y^2\leq 1$, $x,y\geq 0$, calcular $\iint_D f$ en cartesianas y polares. **c]** Hallar la integral de línea de $\mathbf{g}(x,y)=(2xy,x^2)$ entre $(-1,0)$ y $(1,1)$ siguiendo el segmento que los une.

**22.** Sea $g(x,y,z)=y\,\mathrm{e}^{2x-z}$. **a]** Hallar $\nabla g(1,-1,2)$ y escribir un $\mathbf{u}$ unitario para el que $D_{\mathbf{u}}g(1,-1,2)=0$. **b]** Calcular $\iiint_V g$, con $V$ limitado por los planos $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=2$, $z=0$ y $z=2-x$. **c]** Hallar el valor de la integral de línea de i) $g$, ii) $\nabla g$ desde $(0,0,0)$ hasta $(1,2,2)$ sobre el segmento que une los puntos.

**23(jl21).** Sea $\mathbf{g}(x,y,z)=\left(3x^2-y^2,-2xy,-xz\right)$. a) Hallar $\operatorname{div}\mathbf{g}$ y $\operatorname{rot}\mathbf{g}$.
b) Dibujar el sólido $V$ acotado por $x=0$, $x=1$, $z=0$, $z=1-y^2$, y hallar $\iiint_V \operatorname{div}\mathbf{g}$.
c) Calcular la integral de línea $\int_{\mathbf{c}} \overline{g}\cdot d\overline{s}$, para $\mathbf{c}(t)=\left(1,t,1-t^2\right)$, $t\in[0,1]$.

**25.** Sea $\mathbf{f}(x,y,z)=\left(z^2,2y,cxz\right)$, $c$ constante. Hallar $\operatorname{div}\mathbf{f}$ y $\operatorname{rot}\mathbf{f}$, precisar para qué valor de $c$ deriva $\mathbf{f}$ de un potencial $U$ y calcularlo. Para este $c$, ¿cuánto vale la integral de línea de $\mathbf{f}$ entre $(0,0,0)$ y $(1,0,1)$ sobre el segmento que une los puntos? ¿Cuánto vale la integral para cualquier $c$?

**27.** Comprobar el teorema de Green $\displaystyle\iint_D [g_x-f_y]\,dx\,dy=\oint_{\partial D}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}$ para:
$\mathbf{f}(x,y)=\left(y^2,2x\right)$ y $D$ región encerrada entre la parábola $x=4-y^2$ y la recta $y=x-2$.

**29.** Sea $D$ el semicírculo dado por $x^2+y^2\le 9$, $x\ge 0$. **a]** Calcular $\iint_D x\,dx\,dy$ en polares y cartesianas. **b]** Si $\mathbf{f}(x,y)=(-xy,y)$: i) ¿Es $\mathbf{f}$ conservativo? ii) Hallar $\operatorname{div}\mathbf{f}$.
iii) Hallar el valor de $\oint_{\partial D}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}$.

**14.** $\begin{array}{l} f(x,y,z)=x+z\,, \\ \mathbf{c}(t)=\left(t,t^2,\frac{2}{3}t^3\right). \end{array}$ $\mathbf{c}'(t)=\left(1,2t,2t^2\right)$, $\displaystyle\int_{\mathbf{c}} f\,ds=\int_0^1\left(t+\tfrac{2}{3}t^3\right)\left(1+2t^2\right)dt=\tfrac{1}{2}\left(t+\tfrac{2}{3}t^3\right)^2\Big]_0^1=\tfrac{25}{18}$ .

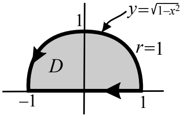
**17.** $\begin{array}{l} \mathbf{f}(x,y,z)=(xy,x,-yz)\,. \\ \mathbf{c}(t)=(\cos t,\operatorname{sen} t,1)\,. \end{array}$ div $\mathbf{f}=y+0-y=0$ . rot $\mathbf{f}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ xy & x & -yz\end{vmatrix}=\left(-z\,,0\,,1-x\right)$ [no deriva de un potencial].

$$\int_{\mathbf{c}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_0^{\pi}(cs,c,-s)\cdot(-s,c,0)\,dt=\int_0^{\pi}\left(\cos^2 t-\operatorname{sen}^2 t\cos t\right)dt=\tfrac{\pi}{2}+\Big[\tfrac{\operatorname{sen}2t}{4}-\tfrac{\operatorname{sen}^3 t}{3}\Big]_0^{\pi}=\tfrac{\pi}{2}\,.$$

Como $\|\bar{c}'\|=\sqrt{\operatorname{sen}^2 t+\cos^2 t+0}=1$ , la longitud de la curva es $L=\int_0^{\pi}1\,dt=\pi$ (es media circunferencia).

**20.** $\bar{f}(x,y)=\left(y+3x^2,x\right)$ . **a]** div $\bar{f}=6x+0=\boxed{6x}$ . $g_x=1=f_y$ y $\bar{f}\in C^1\to$ **deriva de un potencial**.

**b]** Para dar el valor de la integral de línea podemos calcular el potencial:




$$\begin{array}{l} U_x=y+3x^2\;\to\;U=xy+x^3+p(y) \\ U_y=x\quad\;\;\to\;U=xy+q(x)\end{array}\;\to\;U=xy+x^3,$$
$$\int_{\bar{c}}\bar{f}\cdot d\bar{s}=U(-1,0)-U(1,0)=\boxed{-2}\,.$$

O podemos parametrizar la curva: $\bar{c}(t)=(\cos t,\operatorname{sen} t)$ , $t\in[0,\pi]\to$

$$\int_{\bar{c}}\bar{f}\cdot d\bar{s}=\int_0^{\pi}\left(s+3c^2,c\right)\cdot(-s,c)\,dt=\int_0^{\pi}\big[\underbrace{c^2-s^2}_{\cos 2t}-3c^2s\big]\,dt=\Big[\tfrac{1}{2}\operatorname{sen}2t+\cos^3 t\Big]_0^{\pi}=\boxed{-2}\,.$$

O, como no depende del camino, hallar la integral sobre $\bar{c}_*(x)=(x,0)$ , $x\in[1,-1]$ :

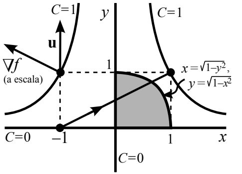
$$\int_{\bar{c}_*}\bar{f}\cdot d\bar{s}=\int_1^{-1}\left(3x^2,x\right)\cdot(1,0)\,dx=\int_1^{-1}3x^2\,dx=\left[x^3\right]_1^{-1}=\boxed{-2}\,.$$

**c]** $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_0^{\sqrt{1-x^2}}6x\,dy\,dx=\int_{-1}^{1}\underbrace{6x\sqrt{1-x^2}}_{\text{impar}}\,dx=-2\left(1-x^2\right)^{3/2}\Big]_{-1}^{1}=\boxed{0}$ . [Debía anularse por ser $6x$ impar y $D$ simétrico].

O $\displaystyle\int_0^1\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}6x\,dx\,dy=\int_0^1 0\,dx=\boxed{0}$ o $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^1 6r^2\cos\theta\,dr\,d\theta=2\int_0^{\pi}\cos\theta\,d\theta=\boxed{0}$ .

**21.** $\boxed{f(x,y)=x^2y}$ **a]** $f=0 \to x=0$ o $y=0$ ; $f=1 \to y=\frac{1}{x^2}$ .

$\nabla f(x,y)=\big(2xy,x^2\big)$ . $\nabla f(-1,1)=(-2,1)$ . $\mathbf{u}=\mathbf{j}$ lo cumple.




**b]** $\iint_D f=\int_0^1\!\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2y\,dy\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\big(1-x^2\big)\,dx=\frac{1}{15}$ .

$\int_0^1\!\int_0^{\sqrt{1-y^2}} x^2y\,dx\,dy=\frac{1}{3}\int_0^1 y\big(1-y^2\big)^{3/2}dy=-\frac{1}{15}\big(1-y^2\big)^{5/2}\Big]_0^1$ .

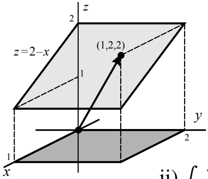
Polares: $\iint_D f=\int_0^{\pi/2}\!\int_0^1 r\,r^3\cos^2\theta\ \mathrm{sen}\,\theta\,dr\,d\theta=\big[\frac{1}{5}r^5\big]_0^1\big[-\frac{1}{3}\cos^3\theta\big]_0^{\pi/2}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{15}$ .

**c]** Como $\mathbf{g}=\nabla f$ , para hallar la integral de línea basta calcular $f(1,1)-f(-1,0)=1-0=1$ .

Peor: $\mathbf{c}(t)=\big(t,\frac{1+t}{2}\big)$ , $t\in[-1,1] \to \int_{\mathbf{c}}\mathbf{g}\cdot d\mathbf{s}=\int_{-1}^1\big(t+t^2,t^2\big)\cdot\big(1,\frac{1}{2}\big)\,dt=\int_{-1}^1\big(t+\frac{3}{2}t^2\big)\,dt=0+1$ .

**22.** $\boxed{g(x,y,z)=y\,\mathrm{e}^{2x-z}}$ . **a]** $\nabla g=\big(2y\mathrm{e}^{2x-z},\mathrm{e}^{2x-z},-y\mathrm{e}^{2x-z}\big)\xrightarrow{(1,-1,2)}\boxed{(-2,1,1)}$ .

$D_{(a,b,c)}g(1,-1,2)=\nabla g(1,-1,2)\cdot(a,b,c)=b+c-2a$ . $(1,1,1)\to\mathbf{u}=\big(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\big)$ ($\perp$ al $\nabla g$).




**b]** En $[0,1]\times[0,2]$ está $z=2-x$ encima de $z=0$ (innecesario dibujo).

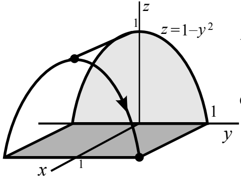
$\int_0^2\!\int_0^1\!\int_0^{2-x} y\mathrm{e}^{2x-z}\,dzdxdy=\int_0^2 y\,dy\int_0^1\big[\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{3x-2}\big]dx=\mathrm{e}^2-1-\frac{2\mathrm{e}}{3}+\frac{2}{3\mathrm{e}^2}$ .

**c]** i) $\mathbf{c}(t)=(t,2t,2t)$ (salta a la vista). $\mathbf{c}'(t)=(1,2,2)$ . $\|\mathbf{c}'(t)\|=3$ .

$$\int_{\mathbf{c}} g\cdot ds=\int_0^1 g(\mathbf{c}(t))\,\|\mathbf{c}'(t)\|\,dt=\int_0^1 6t\,dt=\boxed{3}\,.$$

ii) $\int_{\mathbf{c}}\nabla g\cdot d\mathbf{s}=g(1,2,2)-g(0,0,0)=\boxed{2}$ . [Peor: $\int_0^1(4t,1,-2t)\cdot(1,2,2)\,dt=\int_0^1 2=2$ ].

**23.** $\boxed{\mathbf{g}(x,y,z)=\left(3x^2-y^2,-2xy,-xz\right)}$ a) $\operatorname{div}\mathbf{g}=3x$ . $\operatorname{rot}\mathbf{g}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \partial/\partial x&\partial/\partial y&\partial/\partial z\\ 3x^2-y^2&-2xy&-xz\end{vmatrix}=(0,z,0)$ . No conservativo.




b) $\iiint_V \operatorname{div}\mathbf{g}=\int_0^1\int_{-1}^1\int_0^{1-y^2}3x\,dz\,dy\,dx=\int_0^1 2x\,dx\int_0^1\left[3-3y^2\right]dy=\boxed{2}$ .

c) Con la definición: $\mathbf{g}\big(\mathbf{c}(t)\big)=\left(3-t^2,-2t,t^2-1\right)$ , $\mathbf{c}'(t)=(0,1,-2t)$ ,

$$\int_{\mathbf{c}}\mathbf{g}\cdot d\mathbf{s}=\int_0^1\left(0-2t-2t^3+2t\right)dt=-\int_0^1 2t^3\,dt=\boxed{-\tfrac{1}{2}}\,.$$

**25.** $\boxed{\mathbf{f}(x,y,z)=\left(z^2,2y,cxz\right)}$. $\operatorname{div}\mathbf{f}=2+cx$ . $\operatorname{rot}\mathbf{f}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ z^2&2y&cxz\end{vmatrix}=(0\,,2z-cz\,,\,0)=\mathbf{0}$ si $\boxed{c=2}$ y $\mathbf{f}\in C^1(\mathbf{R}^3)$ .

Si $c=2$ hay $U$: $\begin{array}{l}U_x=z^2\rightarrow U=xz^2+p(y,z)\\ U_y=2y\rightarrow U=y^2+q(x,z)\\ U_z=2xz\rightarrow U=xz^2+r(x,y)\end{array}$ , $U=xz^2+y^2\longrightarrow\int_{\mathbf{c}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=U(1,0,1)-U(0,0,0)=\boxed{1}$.
Sin necesidad de hacer integrales de línea.

Más largo: $\mathbf{c}(t)=(t,0,t),\ t\in[0,1]\rightarrow\int_{\mathbf{c}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_0^1(t^2,0,2t^2)\cdot(1,0,1)\,dt=\int_0^1 3t^2\,dt=1$ .

Para cualquier $c$ se debe acudir a la definición (usamos la **c** de arriba):

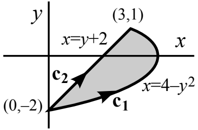
$$\int_{\mathbf{c}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_0^1(t^2,0,ct^2)\cdot(1,0,1)\,dt=\int_0^1(1+c)t^2\,dt=\boxed{\tfrac{1+c}{3}}\,.$$

**27.** a) $\mathbf{f}(x,y)=(y^2,2x)$ , $\mathbf{c_1}=\big(4-y^2,y\big)$, $y\in[-2,1]$ ,

$\mathbf{c_2}=(t,t-2)$, $t\in[0,3]$ o $\mathbf{c}_2^*=(y+2,y)$, $y\in[-2,1]$ (sentido opuesto).

$$\int_{\partial D}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_{-2}^{1}(-2y^3+8-2y^2)\,dy-\int_0^3(t^2-2t+4)\,dt=\tfrac{51}{2}-12=\tfrac{27}{2}\,.$$

$$\Big[\text{O }-\int_{-2}^{1}(y^2+2y+4)\,dy=-12\,\Big].$$

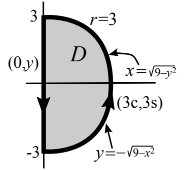



$$g_x-f_y=2-2y\,,\ \int_{-2}^{1}\int_{y+2}^{4-y^2}(2-2y)\,dx\,dy=\int_{-2}^{1}(4-6y+2y^3)\,dy=\tfrac{27}{2}\,.$$

**29.** **a]** i) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^3 r^2\cos\theta\,dr\,d\theta=2\big[\text{sen }\theta\big]_0^{\pi/2}\big[\tfrac{r^3}{3}\big]_0^3=\boxed{18}$ .

ii) $\displaystyle\int_{-3}^{3}\int_0^{\sqrt{9-y^2}}x\,dx\,dy=\tfrac{2}{2}\int_0^3\big(9-y^2\big)\,dy=27-\big[\tfrac{y^3}{3}\big]_0^3=\boxed{18}$ .

O bien: $\displaystyle\int_0^3\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}x\,dy\,dx=\int_0^3 2x\sqrt{9-x^2}\,dx=-\tfrac{2}{3}(9-x^2)^{3/2}\Big]_0^3=\boxed{18}$ .




**b]** i) Como $g_x-f_y=x$ el campo **no es conservativo** (debía ser $\equiv 0$ ). ii) div $\mathbf{f}=f_x+g_y=\boxed{1-y}$ .

iii) Según Green el valor de la integral de linea coincide con el de la integral de **a]**: $\boxed{18}$ .

Calculando la integral de línea: $\mathbf{c}(t)=(3\cos t,3\,\text{sen}\,t)$ , $t\in\big[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\big]$ .

$\mathbf{c}_*(t)=(0,y)$ , $y\in[3,-3]$ .

$$\oint_{\partial D}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(-9cs,3s)\cdot(-3s,3c)\,dt+\int_3^{-3}(0,y)\cdot(0,1)\,dy$$

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\big(\underset{\text{par}}{27s^2c}+\underset{\text{impar}}{9sc}\big)\,dt-\int_{-3}^{3}\overset{\text{imp}}{y}\,dy=18s^3\Big]_0^{\pi/2}=18\,.$$