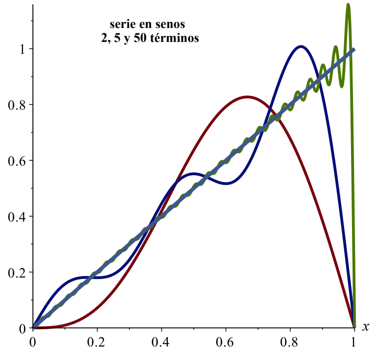
3. Ecuaciones diferenciales ordinarias

3.1 Algunas EDOs de primer orden resolubles

3.2 EDOs lineales de orden 2 resolubles (en este pdf b312)

3.3 Autovalores y autofunciones de problemas de contorno

3.4 Series de Fourier (en el b334)



EDOs de primer orden

Una ecuación diferencial ordinaria o EDO es una ecuación en la que aparecen derivadas de una función incógnita de una variable y se llama orden de la ecuación al orden de la derivada más alta entre las que aparecen. Por tanto:

Una **EDO de primer orden** es de la forma: $\boxed{\frac{dy}{dx}=f(x,y)}$.

Buscamos sus **soluciones**: **funciones derivables $y(x)$ que convierten la ecuación en una identidad**.

La sencilla ecuación $y'=-2y$ la cumplen las funciones de la forma $y=Ce^{-2x}$ para cualquier constante C . A esta expresión (que incluye todas las soluciones) se le llama **solución general** y tendrá **una constante arbitraria** (en las EDOs de orden 1).

Para aislar una única solución impone un **dato inicial**. Por ejemplo, si exigimos que sea $y(0)=7$, la única solución que cumple la ecuación y ese dato es $y=7e^{-2x}$.

Para mayoría de las EDOs no se puede calcular la solución. E incluso hay otras que no tienen solución o tienen más de una cumpliendo un dato inicial, pero esto es raro según el 'teorema de existencia y unicidad [TEU]':

$$\boxed{\begin{array}{l} f\,,\ f_y \text{ continuas en un entorno de } (a,b) \Rightarrow \\ \qquad \text{existe solución única de } y'=f(x,y) \text{ con } y(a)=b\,. \end{array}}$$

Citemos algunos casos de EDOs de primer orden resolubles (hay pocos más).

Algunas EDOs de primer orden resolubles

Las ecuaciones **separables** son de la forma: $\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{p(x)}{q(y)}} \longrightarrow \int q(y)\,dy=\int p(x)\,dx+C$.

[Si podemos hallar las primitivas y despejar la y obtendríamos la solución explícita $y(x)$].

Pasan a ser separables: $\boxed{\frac{dy}{dx}=f\big(\frac{y}{x}\big)}$ haciendo $z=\frac{y}{x}$. $\boxed{\frac{dy}{dx}=f(ax+by)}$ con $z=ax+by$.

[Por ejemplo, para la primera: $y=xz$, $xz'+z=f(z)$, $\frac{dz}{dx}=\frac{f(z)-z}{x}$, $\int\frac{dz}{f(z)-z}=\int\frac{dx}{x}+C$].

La **ecuación lineal** es: $\boxed{\frac{dy}{dx}=a(x)y+f(x)}$. Se dice **homogénea** si $f(x)\equiv 0$ y **no homogénea** cuando $f(x)\not\equiv 0$.

La solución general de la homogénea $y'=a(x)y$ es $\boxed{y=C\,\mathrm{e}^{\int a(x)dx}}$.

[Fácil de deducir, por ser ecuación separable: $\int\frac{dy}{y}=\ln y=\int a+C^*$, $y=\mathrm{e}^{\int a+C^*}=C\,\mathrm{e}^{\int a}$, pero mejor es utilizar la fórmula cuando sea lineal para no repetir este proceso de cálculo].

De la no homogénea: $\boxed{y=C\,\mathrm{e}^{\int a(x)dx}+\mathrm{e}^{\int a(x)dx}\int \mathrm{e}^{-\int a(x)dx}f(x)\,dx}$ [fórmula de variación de las constantes **fvc**]

Es la **solución general de la homogénea más una solución particular y_p de la no homogénea** y bastantes veces la y_p se puede encontrar por tanteo, en vez de integrar.

Una ecuación es **exacta** si escrita en la forma $\boxed{M(x,y)+N(x,y)\frac{dy}{dx}=0}$ es $\boxed{M_y\equiv N_x}$.

Su solución es: $\boxed{U(x,y)=C \text{ con } \begin{matrix} M=U_x \\ N=U_y \end{matrix}}$ [La U se halla como los potenciales de campos conservativos en el capítulo 2].

Ej 1. Hallemos la solución general de $\boxed{\frac{dy}{dx}=3-y}$ y la (única) solución con $\boxed{y(0)=3}$.

Siempre que sea lineal, lo mejor es utilizar las fórmulas. Y para utilizar la **fvc** empezamos siempre, porque aparece 3 veces, calculando $e^{\int a(x)\,dx}=e^{-x}$. Yendo a la fórmula:

$$y = Ce^{-x}+e^{-x}\int 3e^{x}dx = Ce^{-x}+3\text{, que es, por tanto, la solución general de la ecuación.}$$

La solución particular $y_p=3$ era clara ($0=3-3$, las soluciones constantes saltan a la vista) y nos hubiera bastado hallar la de la homogénea y sumarle el 3, ahorrándonos una integral.

Imponiendo el dato a esta solución aislamos la pedida: $y(0)=C+3=3 \to C=0$, $y=3$.

Pero la ecuación se podía haber visto también como separable:

$$\int\frac{dy}{3-y}=-\ln(3-y)=x+C \to y = 3-e^{C}e^{-x} \overset{\bullet}{=} 3-Ce^{-x} \text{ (como antes, con otra } C \text{ arbitraria).}$$

[Lo habitual es llamar a las constantes arbitrarias C, aunque sean distintas: e^{C} pasó a ser C. Sin el último paso • parecería no haber solución con el dato: $3=3-e^{C}$, $e^{C}=0$!!].

Ej 2. Hallemos la solución de la ecuación $T(t)$ de $\boxed{\begin{array}{l}T'=2tT\\ T(1)=5\end{array}}$ (practicando con otras letras).

Es claramente lineal homogénea: $T=C\,e^{\int 2t\,dt}=C\,e^{t^2}$. Con el dato: $5=Ce \to T=5\,e^{t^2-1}$.

Ej 3. Hallemos la solución de la lineal $\boxed{\frac{dy}{dx}=-\frac{2y}{x}+3}$ que cumple el dato inicial $\boxed{y(1)=0}$.

$$e^{\int a}=e^{-2\ln x}=e^{\ln x^{-2}}=\frac{1}{x^2} \to y=\frac{C}{x^2}+\frac{1}{x^2}\int 3x^2dx = \frac{C}{x^2}+x \xrightarrow{d.i.} 0 = C+1 \to y=x-\frac{1}{x^2}.$$

[El dato inicial no se impuso en $x=0$ (discontinuas a y solución); se da en 'buenos' puntos].

Mas ejemplos

Ej 4. Resolvamos $\boxed{\begin{array}{l} y'=3t^2+3t^2y^2 \\ y(0)=0 \end{array}}$. Primera no lineal que aparece, pero es separable.

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \arctan y = \int 3t^2 dt + C = t^3+C \,.\;\; y=\tan\big(t^3+C\big) \overset{y(0)=0}{\longrightarrow} 0=\tan C \to\; y=\tan\big(t^3\big)\,.$$

Ej 5. $\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{y}{y-x}}$ (con solución única, según el TEU, si $y\neq x$) la resolvemos por tres caminos:

Primero comprobemos que es exacta. Para ellos la reescribimos en la forma $y+(x-y)\frac{dy}{dx}$.

Por ser $M_y\equiv N_x=1$, existe U tal que $\begin{array}{l} U_x=y \;\to\; U=xy+p(y) \\ U_y=x-y \to U=xy-\frac{1}{2}y^2+q(x) \end{array} \to\; y^2-2xy=C\,.$

Como $\frac{dy}{dx}=\frac{y/x}{y/x-1}$, se lleva a separable con $z=\frac{y}{x} \to\; xz'+z=\frac{z}{z-1}$, $xz'=\frac{2z-z^2}{z-1}$,

$$\int \frac{(2z-2)\,dz}{z^2-2z} = -2\int \frac{dx}{x}+C \,,\; \ln(z^2-2z)=C-2\ln x \,,\; z^2-2z=\frac{C}{x^2} \,,\; \frac{y^2}{x^2}-2\frac{y}{x}=\frac{C}{x^2} \uparrow$$

Las soluciones de la ecuación son las mismas que las de la lineal $\frac{dx}{dy}=\frac{y-x}{y}=-\frac{x}{y}+1$.

Con la **fvc** (y cambiando papeles de x e y) volvemos a tener: $x=\frac{C}{y}+\frac{1}{y}\int y\,dy=\frac{C}{y}+\frac{y}{2}$.

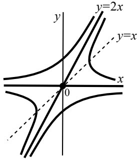
Dibujemos las soluciones para varios C (mejor con la última expresión):

Vemos 2 soluciones distinta $y=0$ e $y=2x$ cumpliendo $y(0)=0$ (f era discontinua).

También se ve que sobre $y=x$ no hay soluciones, sino curvas de pendiente infinito (no son funciones derivables ahí). Se llaman '**curvas integrales**' de la ecuación diferencial a curvas que son soluciones de

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \text{ o de la ecuación 'dada la vuelta' } \frac{dx}{dy}=\frac{1}{f(x,y)}\,.$$

Salvo en $(0,0)$ hay solución única $y(x)$ ó $x(y)$ (única curva integral).



EDOs lineales de orden 2. Teorema general

En esta sección vemos EDOs de **segundo orden** (con derivadas segundas). Y nos limitamos a las **lineales** (las que más veces aparecen) pues las no lineales casi nunca se pueden resolver. Sus soluciones contendrán 2 constantes arbitrarias (como en la ecuación más sencilla $y''=0 \rightarrow y=c_1+c_2x$), y habrá que imponer 2 datos iniciales para aislar una única solución.

Llamemos [e] $\boxed{y''+a(x)y'+b(x)y=0}$ y [n] $\boxed{y''+a(x)y'+b(x)y=f(x)}$.

ecuación homogénea **ecuación no homogénea**

En los libros de ecuaciones diferenciales ordinarias se demuestra este teorema general:

Sea a, b, f continuas en un intervalo I y sea $|W|(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ **determinante wronskiano**

Si $x_o \in I$, una única solución cumple los datos iniciales $y(x_o)=y_o$, $y'(x_o)=y_o'$.

Si y_1, y_2 son soluciones de [e] con wronskiano $|W|(s)\neq 0$ para algún $s\in I$, la **solución general de** [e] es $y=c_1\,y_1+c_2\,y_2$, c_1, c_2 constantes arbitrarias.

Si y_p es una solución de [n], la **solución general de** [n] es: $y=c_1\,y_1+c_2\,y_2+y_p$.

Una solución particular de [n] es $y_p=y_2\int \frac{y_1 f}{|W|}dx - y_1\int \frac{y_2 f}{|W|}dx$ [fórmula de variación de las constantes **fvc**].

[Dicho finamente, las soluciones de [e] son un **espacio vectorial** de dimensión 2 (sumas y múltiplos de soluciones son soluciones) y que su wronskiano sea no nulo asegura que y_1 e y_2 no dependen linealmente. Como en las de primer orden también la **solución de la no homogénea** es la general de la homogénea (aquí con 2 constantes) + y_p de la no homogénea].

Dos tipos resolubles elementalmente

Además de las de coeficientes constantes y Euler que vemos luego, hay dos tipos de ecuaciones [n] **resolubles** [en el resto de los casos se resuelve mediante series de potencias]:

a) Si $b(x)\equiv 0$, el cambio $y'=v$ lleva [n] a una lineal de primer orden en v.
b) Si y_1 es solución de [e] $\Rightarrow$ $y_2=y_1\int \mathrm{e}^{-\int a\,dx}\,y_1^{-2}dx$ es otra solución de [e].

[Probado en los apuntes. Según b), no se necesitan las 2 soluciones que pedía el teorema para resolver [e] (y, por tanto, también [n] con la **fvc**). Basta hallar 1. El problema es que se encuentra pocas veces: unas a simple vista, otras tanteando, otras resolviendo por series].

Ej 1. $\boxed{xy''-2y'=2x} \xrightarrow{y'=v} v'=\frac{2v}{x}+2$. En la **fvc** de primer orden empezamos hallando $\mathrm{e}^{\int a}$.

$$\mathrm{e}^{\int 2dx/x}=\mathrm{e}^{2\ln x}=x^2 \to v=Cx^2+x^2\int\frac{2\,dx}{x^2}=Cx^2-2x \to y=K+Cx^3-x^2 .$$

$\big[$También será una ecuación de Euler $x^2y''-2xy'=2x^2$, de las que trataremos luego$\big]$.

Para precisar las 2 constantes habrá que imponer 2 datos iniciales en un $x_o\neq 0$ $\big[$en $x=0$ es $a(x)=\frac{2}{x}$ discontinua y un par de datos nos podrían dar ninguna o infinitas soluciones$\big]$.

Por ejemplo, $y(1)=0$, $y'(1)=1 \to \begin{matrix} c_1+c_2-1=0 \\ 3c_2-2=1 \end{matrix}$, $c_2=1$, $c_1=0$, $y=x^3-x^2$ única solución.

Ej 2. $\boxed{x^3y''-xy'+y=0}$. Es claro que $y_1=x$ es una solución de esta homogénea.

Como $a(x)=-\frac{1}{x^2}$ la otra es $y_2=x\int\frac{\mathrm{e}^{-\int -x^{-2}dx}}{x^2}\,dx=x\int\frac{\mathrm{e}^{-1/x}}{x^2}=x\,\mathrm{e}^{-1/x}$.

Y, por tanto, la solución general de la ecuación lineal es $y=c_1x+c_2\,x\,\mathrm{e}^{-1/x}$.

Para resolver [h] basta hallar las raíces del **polinomio característico** $\boxed{\mu^2+a\mu+b=0}$, llamados **autovalores** de [h], pues entonces su solución general es:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si } \mu_1\neq\mu_2 \text{ reales} \rightarrow\ y=c_1\,e^{\mu_1 x}+c_2\,e^{\mu_2 x}.\\ \text{Si } \mu \text{ doble (real)} \rightarrow\ y=(c_1+c_2x)\,e^{\mu x}.\\ \text{Si } \mu=p\pm iq \rightarrow\ y=(c_1\cos qx+c_2\,\mathrm{sen}\,qx)\,e^{px}.\end{array}}$$

Ej 3. $y''+4y'=0$, $\mu^2+4\mu=0 \rightarrow \mu=0,-4 \rightarrow y=c_1+c_2\,e^{-4x}$.
$y''+4y'+3y=0$, $\mu^2+4\mu+3=0 \rightarrow \mu=-1,-3 \rightarrow y=c_1\,e^{-x}+c_2\,e^{-3x}$.
$y''+4y'+4y=0$, $\mu^2+4\mu+4=0 \rightarrow \mu=-2$ doble $\rightarrow y=(c_1+c_2x)\,e^{-2x}$.
$y''+4y'+5y=0$, $\mu^2+4\mu+5=0 \rightarrow \mu=-2\pm i \rightarrow y=(c_1\cos x+c_2\,\mathrm{sen}\,x)\,e^{-2x}$.

Una y_p de [c] la da la **fvc**, pero si $f(x)$ es polinomio, exponencial, seno o coseno es más corto obtenerla con un tanteo sugerido por $f(x)$. Antes del teorema general, demos unos ejemplos.

Para dar la solución de $\boxed{y''+4y'+3y=f(x)}$ con $\boxed{f(x)=x}$ (la de la homogénea está arriba) se necesita una y_p. Parece buena idea tantear un polinomio. Llevemos $y_p=Ax+B$ a la ecuación: $0+4A+3(Ax+B)=x$. Para que esto se cumpla debe ser $3A=1$, $4A+3B=0 \rightarrow A=\frac{1}{3}$, $B=-\frac{4}{9}$. Es $y_p=\frac{1}{3}x-\frac{4}{9}$ $\left[\text{y la solución de la ecuación será entonces } y=c_1\,e^{-x}+c_2\,e^{-3x}+\frac{x}{3}-\frac{4}{9}\right]$.

Si ahora $\boxed{f(x)=e^x}$, probamos $y_p=Ae^x \rightarrow A(1+4+3)\,e^x=e^x \rightarrow y=c_1\,e^{-x}+c_2\,e^{-3x}+\frac{1}{8}\,e^x$.

¿Y si $\boxed{f(x)=e^{-x}}$? Probar $y_p=Ae^{-x}$ no funcionará, pues ya hay soluciones de la homogénea de esa forma (es decir, pues -1 era uno de los dos autovalores). En esos casos el teorema nos dirá que hay que multiplicar y_p por potencias de x $\left[\text{se llevará la ecuación } y_p=Axe^{-x}\right]$.

Si $f(x)=p_m(x)$, p_m polinomio de grado m, y $\mu=0$ no es autovalor existe una $y_p=P_m(x)$ con P_m del mismo grado. Si $\mu=0$ es autovalor de multiplicidad r, será $y_p=x^r P_m(x)$.
Si $f(x)=e^{\mu x}p_m(x)$, con p_m de grado m, y μ no es autovalor, hay $y_p=e^{\mu x}P_m(x)$, con P_m de grado m. Si μ es autovalor de multiplicidad r, hay $y_p=x^r e^{\mu x}P_m(x)$.
Si $f(x)=e^{px}\left[p_j(x)\cos qx+q_k(x)\operatorname{sen} qx\right]$, p_j, q_k de grados j, k, y $p\pm iq$ no es autovalor, hay $y_p=e^{px}\left[P_m(x)\cos qx+Q_m(x)\operatorname{sen} qx\right]$ con P_m y Q_m de grado $m=\max\{j,k\}$. Si $p\pm iq$ es autovalor hay $y_p=x\,e^{px}\left[P_m(x)\cos qx+Q_m(x)\operatorname{sen} qx\right]$.

[Los P y Q tienen coeficientes arbitratrios que se precisan llevando la y_p a la ecuación].
[El método también es aplicable a las lineales de primer orden con coeficientes constantes].
[Al derivar cosenos aparecen senos y viceversa, la y_p tiene los dos, aunque en f solo haya uno].

Ej 4. Resolvamos $\boxed{y''+4y'+ay=8x+2}$ si $a=4$ y si $a=0$. [Homogéneas resueltas en Ej 3].

Si $a=4$ ($\lambda=0$ no autovalor) se lleva a la ecuación: $y_p=Ax+B \to 4A+4Ax+4B=8x+2$
$\to 4A=8$, $4A+4B=2$, $A=2$, $B=-\frac{3}{2}$. La solución general es $y=(c_1+c_2x)\,e^{-2x}+2x-\frac{3}{2}$.

En el otro, $\mu=0$ es autovalor y hay que multiplicar por x: $y_p=Ax^2+Bx$, $y_p'=2Ax+B$, $y_p''=2A$
$\to 2A+8Ax+4B=8x+2 \to A=1$, $B=0$. Solución general: $y=c_1+c_2\,e^{-4x}+x^2$.
[O bien: $y'=v \to v'=-4v+8x+2$. Con la **fvc** o probando $v_p=Ax+B$ se tiene $v\overset{\uparrow}{=}Ce^{-4x}+2x$].

Ej 5. $\boxed{y''-y=4\,e^x}$ $\mu=\pm1$. Solución de la homogénea: $y=c_1e^x+c_2e^{-x}$. Como $\mu=1$ es autovalor, hay que 'engordar' la y_p con una x:

$y_p=Ax\,e^x$, $y_p''=A(x+2)\,e^x \to A(x+2)-Ax=2A=4 \to A=2$. $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+2x\,e^x$.

Peor con la **fvc**: $|W|(x)=\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x}\end{vmatrix}=-2$, $y_p=e^{-x}\int\frac{e^x 4e^x}{-2}dx-e^x\int\frac{e^{-x}4e^x}{-2}dx=-e^x+2xe^x$ ↑

Ej 6. Resolvamos $\boxed{y''+y=f(x)}$ para varias $f(x)$. $\left[\,\mu=\pm\mathrm{i}\ \to\ y=c_1\cos x+c_2\,\mathrm{sen}\,x+y_p\,\right]$.

Si $f(x)=7$, la $y_p=7$ salta a la vista (siempre lo hacen las soluciones constantes).

Si $f(x)=2x\mathrm{e}^x$, hay $y_p=\mathrm{e}^x(Ax+B)\ \to\ \mathrm{e}^x\left[(Ax+B+2A)+(Ax+B)\right]=2x\mathrm{e}^x\ \to\ y_p=\mathrm{e}^x(x-1)$.

Si $f(x)=5\mathrm{e}^x\cos x$, como $1\pm\mathrm{i}$ no es autovalor, hay que probar $y_p=\mathrm{e}^x(A\cos x+B\,\mathrm{sen}\,x)\ \to$

$$(A+2B)\cos x+(B-2A)\,\mathrm{sen}\,x=\cos x\to\begin{cases}A+2B=5\\B-2A=0\end{cases}\to\ y_p=\mathrm{e}^x(\cos x+2\,\mathrm{sen}\,x)\,.$$

Si $f(x)=3\,\mathrm{sen}\,2x$, $y_p=A\cos 2x+B\,\mathrm{sen}\,2x\ \to\ -3Ac-3Bs=3s,\ A=0\,,B=-1\ ,\ y_p=-\,\mathrm{sen}\,2x$.

Si $f(x)=2\,\mathrm{sen}\,x$, como $\pm\mathrm{i}$ es autovalor hay que engordar: $y_p=x(A\cos x+B\,\mathrm{sen}\,x)$

Derivando y sustituyendo: $2B\cos x-2A\,\mathrm{sen}\,x=2\,\mathrm{sen}\,x\to A=-1\,,B=0\,,\ y_p=-x\cos x$.

Si $f(x)=(\cos x)^{-1}$, es necesario acudir a la fórmula de variación de las constantes:

$$|\mathbf{W}|(x)=1\ \to\ y_p=\mathrm{sen}\,x\int\frac{\cos x}{\cos x}dx-\cos x\int\frac{\mathrm{sen}\,x}{\cos x}dx=x\,\mathrm{sen}\,x+\cos x\ln(\cos x)\,.$$

Imponemos ahora **datos iniciales** $\boxed{y(0)=y'(0)=0}$ a algunas de estas ecuaciones. Sabemos que (por ser las funciones continuas), estos datos proporcionan siempre una **única solución**.

En concreto, imponiéndolos a $\boxed{\text{a) } y''+y=0\,,\ \text{b) } y''+y=7\,,\ \text{c) } y''+y=3\,\mathrm{sen}\,2x}$ se obtiene:

a) $\begin{cases}c_1=0\\c_2=0\end{cases}\to y=0$, b) $\begin{cases}c_1+7=0\\c_2=0\end{cases}\to y=7-7\cos x$, c) $\begin{cases}c_1=0\\c_2-2=0\end{cases}\to y=2\,\mathrm{sen}\,x-\mathrm{sen}\,2x$.

Pero pasan cosas raras imponiendo estos **datos de contorno** (en x distintos): $\boxed{y(0)=y(\pi)=0}$.

Para a) $\begin{cases}c_1=0\\-c_1=0\end{cases}\to\ c_1=0$, pero vale cualquier c_2 . Hay **infinitas soluciones** $y=c_2\,\mathrm{sen}\,x$.

Para b) $\begin{cases}c_1+7=0\\-c_1+7=0\end{cases}$ que es imposible. **No tiene solución** la ecuación con esos datos.

Para c) $\begin{cases}c_1=0\\-c_1=0\end{cases}$ que se cumple $\forall c_2$. También **infinitas soluciones**: $y=c_2\,\mathrm{sen}\,x-\mathrm{sen}\,2x$.

Ecuaciones de Euler [u] $\boxed{x^2y''+axy'+by=h(x)}$, $x>0$.

Con el cambio de variable independiente $x=e^s$ ($s=\ln x$): $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{ds}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{x^2}\left[\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{dy}{ds}\right]$,
[u] pasa a ser una ecuación lineal con coeficientes constantes que sabemos resolver:

$$\frac{d^2y}{ds^2}+(a-1)\frac{dy}{ds}+by=h(e^s) \text{ de polinomio característico } \boxed{\mu^2+(a-1)\mu+b=0}.$$

Deshaciendo el cambio, se tiene la solución general de una ecuación de Euler **homogénea**:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Si } \mu_1\neq\mu_2 \text{ reales, } y=c_1x^{\mu_1}+c_2x^{\mu_2}.\\ \text{Si } \mu \text{ doble (real), } y=(c_1+c_2\ln x)\,x^{\mu}.\\ \text{Si } \mu=p\pm q\mathrm{i},\ y=\left[c_1\cos(q\ln x)+c_2\,\mathrm{sen}(q\ln x)\right]x^p.\end{array}}$$

(observemos que la 'ecuación característica' de una ecuación de Euler sería la que obtendríamos probando en la homogénea soluciones de la forma x^{μ} y la de una de coeficientes constantes se obtendría probando soluciones $e^{\mu x}$).

Para la solución particular de la no homogénea tenemos siempre la **fórmula de variación de las constantes con** $f(x)=h(x)/x^2$. Para la lineal de coeficientes constantes en s tenemos además el método de **coeficientes indeterminados**, **si** $h(e^s)$ **es del tipo adecuado**.

Ej 1*. $\boxed{xy''-2y'=2x}$, ó $y''-\frac{2}{x}y'=2$, ó $x^2y''-2xy'=2x^2 \rightarrow \mu(\mu-1)-2\mu+0=0$, $\mu=0,3$.

Como $h(e^s)$ sería e^{2s} existe solución particular $y_p=Ae^{2s}=Ax^2$ (al no ser 2 autovalor).
Llevamos esta y_p a la (primera) ecuación: $2Ax-4Ax=2x \rightarrow y_p=-x^2$, $y=c_1+c_2x^3-x^2$,
que es la solución general obtenida en el ejemplo 1. Hallamos ahora la y_p con la **fvc**:

$$|\mathbf{W}|(x)=\begin{vmatrix}1 & x^3\\ 0 & 3x^2\end{vmatrix}=3x^2,\ f(x)=2 \rightarrow y_p=x^3\int\frac{2\,dx}{3x^2}-\int\frac{2x^3dx}{3x^2}=-\frac{2x^2}{3}-\frac{x^2}{3}=-x^2.$$

Ej 7. Calculemos la solución general de $\boxed{x^2y''+xy'-y=2x}$.

La 'ecuación característica' es $\mu^2+(1-1)\mu-1=0 \;\to\; \mu=\pm 1 \;\to$

la homogénea tiene por solución general $x_h=c_1x+c_2x^{-1}$ (válida en este caso $\forall x\neq 0$).

$$|\mathbf{W}|(x)=\begin{vmatrix} x & x^{-1} \\ 1 & -x^{-2}\end{vmatrix}=-2x^{-1},\; f(x)=2x^{-1}\to y_p=x^{-1}\int\frac{xx^{-1}dx}{-x^{-1}}-x\int\frac{x^{-1}x^{-1}dx}{-x^{-1}}=x\ln x-\frac{x}{2}\,.$$

La solución general de la ecuación es $y=c_1x+\frac{c_2}{x}+x\ln x$ $\big($incluimos el $-\frac{x}{2}$ en $c_1x\big)$.

La y_p se podría hallar utilizando coeficientes indeterminados en la ecuación $y''-y=2e^s$ a la que conduce el cambio $x=e^s$. La y_p que deberíamos probar en la ecuación en s (por ser $\mu=1$ autovalor) es $y_p=Ase^s$, o lo que es lo mismo, podríamos probar $y_p=Ax\ln x$ en la de Euler inicial. Haciendo cualquiera de las dos cosas se comprueba que debe ser $A=1$ como antes y se llega a la misma solución.

Que quede claro que el método de coeficientes indeterminados se ha dado para ecuaciones de coeficientes constantes y no (directamente) para las de Euler. En este ejemplo no tiene sentido, a la vista del $2x$ de la derecha de la ecuación, probar en ella $y_p=Ax+B$. De hecho, si se hace, se obtiene la expresión sin sentido $-B=2x$ (una constante no puede ser igual a una función).

2. a) Hallar la solución general $T(t)$ y la que cumple $T(0)=0$ de $T'=4-4T$.

3. Hallar la solución con $y(1)=1$ de: a) $\frac{dy}{dx}=2xy^2$, b) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{3x}+2$, c) $\frac{dy}{dx}=e^{x-y}$.

4. Resolver $\frac{dy}{dx}=-\frac{12x+5y}{5x+2y}$: i) como exacta, viendo que lo es, ii) haciendo $z=\frac{y}{x}$.

6. Resolver $y''+2y'-3y=f(x)$ para a) $f(x)=e^{-x}$, b) $f(x)=e^{x}$, c) $f(x)=\operatorname{sen} x$.

7. Hallar la solución general de: c) $y''+y=6\cos^2 x$, e) $y''-2y'+y=x^2$.

8. Hallar su solución general y la que cumple $y(0)=y'(0)=0$:
a) $y''+2y'+2y=2$, c) $y''+y=x^2$, d) $y''+y=2xe^{x}$.

9. Hallar la solución general de la ecuación de Euler no homogénea b) $x^2y''-2y=2$.

10. Sea $x^2y''-3xy'=4$. Hallar la solución general de viéndola como ecuación de Euler y haciendo $y'=v$. Hallar la solución particular que satisface $y(1)=y'(1)=3$.

13. a) Hallar la solución general de $y''+y'=2x-1$, i) como lineal de segundo orden, ii) haciendo $y'=v$. b) Hallar la única que cumple los datos iniciales $y(0)=y'(0)=0$. c) Precisar cuántas soluciones cumplen los datos de contorno $y'(0)=y'(1)=0$.

2. a) $\boxed{T'=4-4T}$ La de la homogénea es $C\mathrm{e}^{-4t}$ y $T_p=1$ salta a la vista. General: $\boxed{T=C\mathrm{e}^{-4t}+1}$.

O con **fvc**: $T=C\mathrm{e}^{-4t}+\mathrm{e}^{-4t}\int 4\mathrm{e}^{4t}dt = C\mathrm{e}^{-4t}+1$. $T(0)=C+1=0 \to C=-1$, $\boxed{T=1-\mathrm{e}^{-4t}}$.

3. a) $\boxed{\frac{dy}{dx}=2xy^2}$ separable: $\int\frac{dy}{y^2}=\int 2x\,dx+C$, $-\frac{1}{y}=x^2+C$, $\boxed{y=\frac{1}{C-x^2}} \xrightarrow{y(1)=1} \boxed{y=\frac{1}{2-x^2}}$.

b) $\boxed{y'=\frac{y}{3x}+2}$ lineal. $\mathrm{e}^{\int dx/3x}=\mathrm{e}^{\frac{1}{3}\ln x}=x^{1/3}$, $y=Cx^{1/3}+x^{1/3}\int 2x^{-1/3}dx=Cx^{1/3}+3x \overset{d.i.}{\to} C=-2$.

[También es del tipo $y'=f(\frac{y}{x})$: $z=\frac{y}{x} \to xz'+z=\frac{z}{3}+2$, $\int\frac{3dz}{3-z}=-3\ln(3-z)=2\ln x+C$, ...].

c) $\boxed{\frac{dy}{dx}=\mathrm{e}^{x-y}}$ separable: $\int \mathrm{e}^y dy=\int \mathrm{e}^x dx+C \to \boxed{y=\log(C+\mathrm{e}^x)} \xrightarrow{y(1)=1} \boxed{y=x}$.

[mucho más largo $z=x-y$, $z'=1-\mathrm{e}^z$, $\int\frac{dz}{1-\mathrm{e}^z}=x+C\dots$].

4. $\boxed{\frac{dy}{dx}=-\frac{12x+5y}{5x+2y}}$ $12x+5y+(5x+2y)\frac{dy}{dx}=0$, $M_y=5=N_x$. $U=6x^2+5xy+p(y)\underset{\downarrow}{=}5xy+y^2+q(x)$

O bien: $z=\frac{y}{x}$, $xz'+z=-\frac{12+5z}{5+2z}$, $\int\frac{(2z+5)\,dz}{z^2+5z+6}=\int\frac{-2\,dx}{x}+C$, $z^2+5z+6=\frac{C}{x^2}$, $\boxed{y^2+5xy+6x^2=C}$.

6. $\boxed{y''+2y'-3y=f(x)}$ $\mu^2+2\mu-3=0$, $\mu=-1\pm\sqrt{4}=1,-3 \to y=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{-3x}+y_p$.

a) $\mu=-1$ no autovalor. Probamos $y_p=A\mathrm{e}^{-x}$: $A-2A-3A=1$, $\boxed{y=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{-3x}-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-x}}$.

b) $\mu=1$ sí lo es. $y_p=Ax\mathrm{e}^x$: $A(x+2)+2A(x+1)-3Ax=1$, $\boxed{y=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{-3x}-\frac{1}{4}x\mathrm{e}^{-x}}$.

c) $y_p=A\cos x+B\,\mathrm{sen}\,x \to (2B-4A)c-(2A+4B)s=s$. $\boxed{y=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{-3x}-\frac{\cos x}{10}-\frac{\mathrm{sen}\,x}{5}}$.

7. c) $\boxed{y''+y=6\cos^2 x}$ $\begin{vmatrix} c & s \\ -s & c \end{vmatrix}=1$, $y_p = s\int 6c^3 - c\int 6sc^2 = 6s^2-2s^4+2c^4$
$= 6s^2+2(c^2-s^2)(c^2+s^2)$

$\rightarrow$ $\boxed{y = c_1\cos x + c_2 \operatorname{sen} x + 4\operatorname{sen}^2 x + 2\cos^2 x}$.

O bien, $6\cos^2 x = 3+3\cos 2x \rightarrow y_p = A + B\cos 2x + C\operatorname{sen} 2x \rightarrow y_p = 3-\cos 2x = \cdots$

e) $\boxed{y''-2y'+y=x^2}$ $\mu^2-2\mu+1=0 \rightarrow \mu=1$ doble, $y = (c_1+c_2 x)\,\mathrm{e}^x + y_p$.

Como $\mu=0$ no autovalor: $y_p = Ax^2+Bx+C \rightarrow 2A-4Ax-2B+Ax^2+Bx+C = x^2$,

$A=1$, $B=4$, $C=6$, $\boxed{y = (c_1+c_2 x)\,\mathrm{e}^x + x^2+4x+6}$.

8. a) $\boxed{y''+2y'+2y=2}$ $\mu^2+2\mu+2=0$, $\mu = -1\pm \mathrm{i}$, $y = (c_1\cos x + c_2\operatorname{sen} x)\,\mathrm{e}^{-x} + 1$ (y_p a ojo).

$y(0)=y'(0)=0 \rightarrow \begin{cases} c_1+1=0 \\ c_2-c_1=0 \end{cases} \rightarrow \boxed{y = 1-\mathrm{e}^{-x}(\cos x + \operatorname{sen} x)}$.

c) $\boxed{y''+y=x^2}$ $\mu^2+1=0$, $\mu=\pm\mathrm{i}$. $y_p=Ax^2+Bx+C$ ($\mu=0$ no autovalor) $\rightarrow 2A+Ax^2+Bx+C=x^2$, $A=1$,

$B=0$, $C=-2$. $y=c_1\cos x+c_2\operatorname{sen} x+x^2-2 \xrightarrow{d.i.} \begin{matrix} y(0)=c_1-2=0 \\ y'(0)=c_2=0 \end{matrix}$, $\boxed{y=2\cos x+x^2-2}$.

d) $\boxed{y''+y=2x\,\mathrm{e}^x}$ $\mu=\pm\mathrm{i} \rightarrow y=c_1\cos x+c_2\operatorname{sen} x+y_p$. $y_p=(Ax+B)\,\mathrm{e}^x$,

$y_p'=(Ax+B+A)\,\mathrm{e}^x$, $y_p''=(Ax+B+2A)\,\mathrm{e}^x$, $(2Ax+2B+2A)\,\mathrm{e}^x = 2x\,\mathrm{e}^x$

$\rightarrow A=1$, $B=-1$. $y=c_1\cos x+c_2\operatorname{sen} x+(x-1)\,\mathrm{e}^x$. $\begin{cases} c_1-1=0 \\ c_2=0 \end{cases}$, $\boxed{y=\cos x+(x-1)\,\mathrm{e}^x}$.

9. b) $\boxed{x^2y''-2y=2}$ Euler. $\mu^2-\mu-2=(\mu-2)(\mu+1)=0$, $y_p=-1$ a ojo $\rightarrow$ $\boxed{y=c_1x^2+\frac{c_2}{x}-1}$.

Sin vista: $|W|=\begin{vmatrix} x^2 & x^{-1} \\ 2x & -x^{-2}\end{vmatrix}=-3$. $y_p=x^{-1}\int\frac{2}{-3}dx-x^2\int\frac{2x^{-3}}{-3}dx=-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}$.

12. $\boxed{x^2y''-3xy'=4}$. Como Euler: $\mu(\mu-1)-3\mu=0$, $\mu=0,4 \rightarrow y=c_1+c_2x^4+y_p$. Con la **fvc**:

$\begin{vmatrix} 1 & x^4 \\ 0 & 4x^3\end{vmatrix}=4x^3$. $y_p=x^4\int\frac{4/x^2}{4x^3}dx-\int\frac{x^4\cdot 4/x^2}{4x^3}dx=x^4\int\frac{dx}{x^5}-\int\frac{dx}{x}=-\frac{1}{4}-\ln|x|$,

Haciendo $x=\mathrm{e}^s \rightarrow y''-4y'=4 \xrightarrow{y_p=As} y=c_1+c_2\mathrm{e}^{4s}-s \nearrow$ $\boxed{y=c_1+c_2x^4-\ln|x|}$.

O bien: $v'=\frac{3}{x}v+\frac{4}{x^2}$, $\mathrm{e}^{3\ln x}=x^3$, $v=Cx^3+x^3\int\frac{4}{x^5}dx=Cx^3-\frac{1}{x}$, $y=Cx^4+K-\ln|x|$.

Imponiendo los datos $\left(y'=4c_2x^3-\frac{1}{x}\right)$: $\begin{cases} c_1+c_2=3 \\ 4c_2-1=3\end{cases} \rightarrow \boxed{y=2+x^4-\ln|x|}$.

13. a) $\boxed{y''+y'=2x-1}$. i) $\mu^2+\mu=0 \rightarrow c_1+c_2\mathrm{e}^{-x}+y_p$. $y_p=Ax^2+Bx$ ($\mu=0$ autovalor) $\rightarrow$

$2A+2Ax+B=2x-1$, $A=1$, $B=-3$, $\boxed{y=c_1+c_2\,\mathrm{e}^{-x}+x^2-3x}$.

ii) $y'=v \rightarrow v'=-v+2x-1 \rightarrow v=C\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-x}\int\mathrm{e}^x(2x-1)\,dx=C\mathrm{e}^{-x}+2x-3\uparrow$

b) $\begin{cases} y(0)=c_1+c_2=0, & c_1=3 \\ y'(0)=-c_2-3=0, & c_2=-3\end{cases}$, $\boxed{y=x^2-3x+3-3\,\mathrm{e}^{-x}}$. c) $\begin{cases} y'(0)=-c_2-3=0, & c_2=-3 \\ y'(1)=-c_2\mathrm{e}^{-1}-1=0, & c_2=-\mathrm{e}\end{cases}$, Imposible. **Sin solución**.

[O utilizando 4.3: $\begin{matrix} y=c_1+c_2\mathrm{e}^{-x} \\ y'=-c_2\mathrm{e}^{-x}\end{matrix} \rightarrow \begin{cases} -c_2=0 \\ -c_2\mathrm{e}^{-1}=0\end{cases}$. **Infinitas soluciones** del homogéneo $\{1\}$. $\left[\mathrm{e}^xy'\right]'=\mathrm{e}^x(2x-1)$.

$\int_0^1\mathrm{e}^x(2x-1)\,dx=\mathrm{e}^x(2x-3)\big]_0^1=3-\mathrm{e}\neq 0 \Rightarrow$ **no tiene solución**].