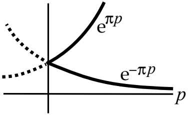
3.3 Autovalores y autofunciones de problemas de contorno homogéneos

Una EDO de orden 2 continua tenía solución única con dos **datos iniciales**. Los **problemas de contorno**, que se suelen incluir una constante λ (que aparece resolviendo EDPs), tienen otras propiedades. Hay valores de λ (**autovalores**) con soluciones no triviales $\{y_n\}$ (**autofunciones**). Antes de la teoría general veamos un par de ejemplos para la ecuación más sencilla: $y''+\lambda y=0$.

Ej 1. $\boxed{(\mathrm{P}_1)\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y(0)=y(\pi)=0 \end{cases}}$ $y\equiv 0$ es siempre solución del problema. ¿Las hay no triviales? Como sus autovalores son $\mu=\pm\sqrt{-\lambda}$, será diferente la solución general según λ sea menor, igual o mayor que 0.

Imponemos las condiciones de contorno en cada caso:



Si $\lambda<0$ la solución es $y=c_1\,\mathrm{e}^{px}+c_2\,\mathrm{e}^{-px}$, con $p=\sqrt{-\lambda}>0$.

$$\left.\begin{array}{l} y(0)=c_1+c_2=0 \\ y(\pi)=c_1\,\mathrm{e}^{\pi p}+c_2\,\mathrm{e}^{-\pi p}=0 \end{array}\right\} \to c_2=-c_1 \searrow \quad c_1[\mathrm{e}^{\pi p}-\mathrm{e}^{-\pi p}]=0 \to$$

$c_1=c_2=0$ (pues $\mathrm{e}^{\pi p}\neq\mathrm{e}^{-\pi p}$ si $p>0$). Ningún $\lambda<0$ es autovalor.

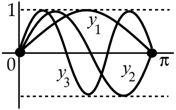
Si $\lambda=0$ es $y=c_1+c_2x \to \left.\begin{array}{l} y(0)=c_1=0 \\ y(\pi)=c_1+c_2\pi=0 \end{array}\right\} \to y\equiv 0$. $\lambda=0$ tampoco es autovalor.

Y para $\lambda>0$ es $y=c_1\cos wx+c_2\,\mathrm{sen}\,wx$, con $w=\sqrt{\lambda}>0 \to \left.\begin{array}{l} y(0)=c_1=0 \downarrow \\ y(\pi)=c_2\,\mathrm{sen}\,w\pi=0 \end{array}\right\}$

Para tener solución no nula debe ser $c_2\neq 0$. Esto ocurre si $\mathrm{sen}\,w\pi=0$,

$w\pi=\pi\sqrt{\lambda}=n\pi \to \lambda_n=n^2,\ n=1,2,\dots$ Para cada λ_n (**autovalor**)

hay solución $y_n=c_2\,\mathrm{sen}\,nx\equiv\{\mathrm{sen}\,nx\}$ (**autofunción**).



Integrado se ve que si $m\neq n$: $\langle y_n,y_m\rangle\equiv\int_0^\pi \mathrm{sen}\,nx\,\mathrm{sen}\,mx\,dx=0$.

[Si $m=n$, el valor no es 0, sino $\langle y_n,y_n\rangle=\int_0^\pi \mathrm{sen}^2 nx\,dx=\frac{1}{2}\int_0^\pi(1-\cos 2nx)\,dx=\frac{\pi}{2}$].

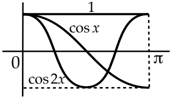
Ej 2. $\boxed{(\mathrm{P}_2)\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y'(0)=y'(\pi)=0\end{cases}}$ Imponemos estas nuevas condiciones:

$\lambda<0\,,\ y'=p\big[c_1e^{px}-c_2e^{-px}\big]\,,\ \left.\begin{array}{l} y'(0)=p[c_1-c_2]=0\to c_2=c_1 \searrow \\ y'(\pi)=p\big[c_1\,e^{\pi p}-c_2\,e^{-\pi p}\big]=0\ \ c_1p\big[e^{\pi p}-e^{-\pi p}\big]=0\end{array}\right\}\to y\equiv 0$.

$\lambda=0\,,\ y'=c_2\ \to\ \left.\begin{array}{l} y'(0)=c_2=0 \\ y'(\pi)=c_2=0\end{array}\right\}\to\ \lambda=0$ autovalor con autofunción $y_0=c_1=\{1\}$.

$\lambda>0\,,\ y'=w[-c_1\operatorname{sen}wx+c_2\cos wx]\,,\ \left.\begin{array}{l} y'(0)=wc_2=0\,,\ c_2=0\downarrow \\ y'(\pi)=-wc_1\operatorname{sen}w\pi=0\end{array}\right\}\to\lambda_n=n^2\,,$ $y_n=\{\cos nx\}$.

Los autovalores $\lambda_n=n^2$ y autofunciones $y_n=\{\cos nx\}$, $n=0,1,\ldots$ (suelen escribirse así, poniendo $\{1\}$ como caso particular $\{\cos 0\}$) tienen propiedades iguales que las del problema anterior. Por ejemplo, sigue dándose la 'ortogonalidad' $\langle y_n,y_m\rangle=0$ para $n\neq m$:



$$\int_0^\pi \cos nx\cos mx\,dx=\tfrac12\int_0^\pi\big[\cos(n-m)x+\cos(n+m)x\big]\,dx=\tfrac12\Big[\tfrac{\operatorname{sen}(n-m)x}{n-m}+\tfrac{\operatorname{sen}(n+m)x}{n+m}\Big]_0^\pi=0\,.$$

Hay mucha notación de aire algebraico como las llaves de las autofunciones que simplemente significan los 'múltiplos de lo de dentro' y los ángulos de las últimas expresiones que también tienen ese origen, porque esas integrales tienen las propiedades de un producto escalar.

Propiedades comunes a (P_1) y (P_2) son: ambas poseen **infinitos autovalores** $\lambda_n=n^2$ que tienden a infinito. Las autofunciones $\{y_n\}$ asociadas a los λ_n son un **espacio vectorial** de **dimensión** 1 . La autofunción que ocupa el lugar n tiene $n-1$ **ceros en** $(0,\pi)$. **Autofunciones distintas son ortogonales en** $[0,\pi]$ [respecto del **producto escalar** $\langle u,v\rangle=\int_0^\pi u\,v\,dx$].

Consideremos la ecuación lineal de orden dos dependiente de λ:

$$y''+a(x)y'+b(x)y+\lambda c(x)y=0\,,\quad \text{con } a,b,c \text{ continuas en } [a,b] \text{ y } c(x)>0 \text{ en } [a,b]\,.$$

La escribimos en la forma llamada '**autoadjunta**' o '**Sturm-Liouville**' multiplicando por $\mathrm{e}^{\int a}$:

$$\left[\mathrm{e}^{\int a}y'\right]'+b\,\mathrm{e}^{\int a}y+\lambda\,c\,\mathrm{e}^{\int a}y\equiv\left[py'\right]'-qy+\lambda ry=0\,,\ \text{con } p\in C^1,\ q,r\in C\,,\ p,r>0\,.$$

Las condiciones que más nos interesan son las llamadas condiciones **separadas** (cada una afecta a los valores de y o de y' sólo en uno de los extremos del intervalo).

> Se llama **problema de Sturm-Liouville separado regular** a uno de la forma:
>
> $$(\mathrm{P_s})\ \begin{cases}[py']'-q\,y+\lambda\,r\,y=0\\ \alpha y(a)-\alpha' y'(a)=0\,,\ \beta y(b)+\beta' y'(b)=0\ \text{ (condiciones separadas)}\end{cases}$$
>
> siendo $p\in C^1$, q,r continuas, $p,r>0$ en $[a,b]$, $|\alpha|+|\alpha'|\,,|\beta|+|\beta'|\neq 0$.

[Si $p,r\leq 0$ se complica. Las últimas condiciones dicen que α y α', β y β' no son ambas 0].

En estos problemas homogéneos siempre $y\equiv 0$ es solución y lo son los múltiplos de cualquier otra. Los ejemplos 1 y 2 eran unos ($\mathrm{P_s}$). Se prueba este teorema que generaliza sus propiedades:

> Los autovalores de ($\mathrm{P_s}$) son una sucesión infinita $\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n<\cdots$ que tiende a ∞. Las autofunciones $\{y_n\}$ forman un espacio vectorial de dimensión 1 y cada y_n posee $n-1$ ceros en (a,b) exactamente. Autofunciones asociadas a autovalores distintos son ortogonales en $[a,b]$ respecto al **peso** r, es decir:
>
> $$\langle y_n,y_m\rangle\equiv\int_a^b r\,y_n\,y_m\,dx=0\,,\ \text{si } y_n,\ y_m \text{ están asociadas a } \lambda_n\neq\lambda_m\,.$$
>
> Si $\alpha\alpha'\geq 0$, $\beta\beta'\geq 0$ y $q(x)\geq 0$ en $[a,b]$, entonces todos los $\lambda_n\geq 0$.

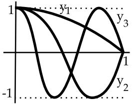
Ej 3. $\boxed{(\mathrm{P}_3)\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y'(0)=y(1)=0 \end{cases}}$ $\Big[$Casi en forma autoadjunta: $\big[y'\big]'+\lambda y=0$. Es el peso $r\equiv 1\Big]$. Hallemos los λ_n. Como $\alpha\alpha'=\beta\beta'=0$, $q\equiv 0$, miramos $\lambda\geq 0$.

$\Big[$**Hay problemas con** $\lambda<0$, como el (P_5), aunque los problemas de interés físico del capítulo 4 tendrán $\lambda\geq 0\Big]$.

$\lambda=0$: $y=c_1+c_2x$, $y'=c_2 \to \begin{cases} y'(0)=c_2=0 \\ y(1)=c_1+c_2=0 \end{cases} \to y\equiv 0$. $\lambda=0$ no es autovalor.

$\lambda>0$: $y=c_1\cos wx+c_2 \operatorname{sen} wx$. $y'(0)=0\to c_2=0$, $y(1)=c_1\cos w=0$

$$\to\ w_n=\tfrac{2n-1}{2}\pi\,,\ \lambda_n=\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4}\,,\ y_n=\left\{\cos\tfrac{2n-1}{2}\pi x\right\},\ n=1,2,\ldots$$

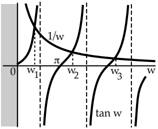


Según el teorema las $\{y_n\}$ son ortogonales: $\int_0^1 y_ny_m\,dx=0$, $n\neq m$, lo que es fácil de comprobar, y la n-sima (como las tres dibujadas) tiene $n-1$ ceros en $(0,1)$.

Ej 4. $\boxed{(\mathrm{P}_4)\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y'(0)=y(1)+y'(1)=0 \end{cases}}$ Aquí es $\alpha\alpha'=0$, $\beta\beta'=1>0$, $q\equiv 0 \Rightarrow \lambda\geq 0$. $\lambda=0\to\begin{cases} c_2=0 \\ c_1+2c_2=0 \end{cases}\to y\equiv 0$. No es autovalor.

$\lambda>0$: $y=c_1\cos wx+c_2\operatorname{sen} wx$. $y'(0)=wc_2=0 \to\ y(1)+y'(1)=c_1[\cos w-w\operatorname{sen} w]=0$.

No podemos dar exactamente los λ_n, pero el corchete se anula infinitas veces, pues $\tan w_n=\frac{1}{w_n}$ para infinitos w_n, que se pueden aproximar con ordenador: $w_1\approx 0.86$, $w_2\approx 3.43$, $w_3\approx 9.53$, ... Por quedar c_1 libre, para los $\lambda_n=w_n^2$ serán $y_n=\{\cos w_nx\}$, que resultarán ortogonales.



Ej 5. $\boxed{(\mathrm{P}_5)\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y(0)+y'(0)=y(1)+y'(1)=0 \end{cases}}$ Como $\alpha\alpha'<0$ puede haber $\lambda<0$. Probemos que, de hecho, $\lambda=-1$ lo es.

$\lambda=-1$, $\mu=\pm 1$, $\begin{array}{l} y=c_1e^x+c_2e^{-x} \\ y'=c_1e^x-c_2e^{-x} \end{array}\to\begin{cases} y(0)+y'(0)=2c_1=0 \\ y(1)+y'(1)=2c_1e=0 \end{cases}\ \forall c_2$. Autovalor con $y_0=\left\{e^{-x}\right\}$.

Ej 6. $\boxed{(\mathrm{P}_6)\begin{cases} x^2y''+xy'+\lambda y=0 \\ y(1)=y(\mathrm{e})=0 \end{cases}}$ $p(x)=\mathrm{e}^{\int a}=\mathrm{e}^{\int\frac{dx}{x}}=x \to \big[xy'\big]'+\lambda\frac{y}{x}=0$. Es $r(x)=\frac{1}{x}$. Es problema separado regular $\big(p,r>0$ en $[1,\mathrm{e}]\big)$.

La ecuación es de Euler: $\mu(\mu-1)+\mu+\lambda=0 \to \mu=\pm\sqrt{-\lambda}$. Basta mirar los $\lambda\geq 0$.

$\lambda=0$, $y=c_1+c_2\ln x$. Imponiendo los datos: $\left.\begin{matrix} c_1=0 \\ c_1+c_2=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow c_1=c_2=0$ (no es autovalor).

$\lambda>0$, $y=c_1\cos(w\ln x)+c_2\operatorname{sen}(w\ln x)$, $\left.\begin{matrix} c_1=0 \\ c_2\operatorname{sen}w=0 \end{matrix}\right\}$ $\lambda_n=n^2\pi^2$, $y_n=\big\{\operatorname{sen}(n\pi\ln x)\big\}_{n=1,2,\dots}$.

Serán ortogonales (**con el peso** r , no sin él): $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\operatorname{sen}(n\pi\ln x)\ \operatorname{sen}(m\pi\ln x)\ dx}{x}\underset{s=\ln x}{=}0$, $m\neq n$.

Ej 7. $\boxed{(\mathrm{P}_7)\begin{cases} y''-2y'+\lambda y=0 \\ y'(0)=y'(1)=0 \end{cases}}$ $\to$ $\begin{matrix} \mu^2-2\mu+\lambda=0 , \\ \mu=1\pm\sqrt{1-\lambda} . \end{matrix}$ Autoadjunta: $\big[\mathrm{e}^{-2x}y'\big]'+\lambda\underbrace{\mathrm{e}^{-2x}}_{r(x)}y=0$.

$\lambda<1:$ $y=c_1\,\mathrm{e}^{(1+p)x}+c_2\,\mathrm{e}^{(1-p)x}$, $y'=c_1(1+p)\,\mathrm{e}^{(1+p)x}+c_2(1-p)\,\mathrm{e}^{(1-p)x}$, con $p=\sqrt{1-\lambda}>0$

$\to$ $\left.\begin{matrix} c_1[1+p]+c_2[1-p]=0 \\ c_1[1+p]\mathrm{e}^{1+p}+c_2[1-p]\mathrm{e}^{1-p}=0 \end{matrix}\right\} \to c_2(1-p)\mathrm{e}[\mathrm{e}^{-p}-\mathrm{e}^{p}]=0$, $p=1$ $(\lambda=0)$, $y_0=\{1\}$.

$\lambda=1:$ $y=[c_1+c_2x]\,\mathrm{e}^x$, $y'=[c_1+c_2+c_2x]\,\mathrm{e}^x \to \left.\begin{matrix} c_1+c_2=0 \\ c_1+2c_2=0 \end{matrix}\right\} \to y\equiv 0$. $\lambda=1$ no autovalor.

$\lambda>1:$ $\begin{matrix} y=[c_1\cos wx+c_2\operatorname{sen}wx]\,\mathrm{e}^x , \ w=\sqrt{\lambda-1} \\ y'=\big[(c_1+c_2w)\cos wx+(c_2-c_1w)\operatorname{sen}wx\big]\mathrm{e}^x \end{matrix}$ $\begin{matrix} \to y'(0)=c_1+c_2w=0 \\ y'(1)=c_2\,\mathrm{e}(1+w^2)\operatorname{sen}w=0 \to \end{matrix}$

$w_n=n\pi$, $\lambda_n=1+n^2\pi^2$, $y_n=\big\{\mathrm{e}^x[\operatorname{sen}n\pi x-n\pi\cos n\pi x]\big\}$, $n=1,2,\dots$

Ortogonales: $\langle y_0,y_n\rangle=\int_0^1\mathrm{e}^{-x}[\operatorname{sen}n\pi x-n\pi\cos n\pi x]\,dx=\big[-\mathrm{e}^{-x}\operatorname{sen}n\pi x\big]_0^1=0$,

$\langle y_n,y_m\rangle=\int_0^1[\operatorname{sen}n\pi x-n\pi\cos n\pi x][\operatorname{sen}m\pi x-m\pi\cos m\pi x]\,dx=\cdots=0$ (si $m\neq n$).

En 4.5 nos aparecerá también el siguiente problema, único no separado, pues sus condiciones de contorno mezclan valores en los extremos del intervalo:

Ej 8. $\boxed{(\mathrm{P}_8)\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y(-\pi)=y(\pi)\,,\, y'(-\pi)=y'(\pi)\end{cases}}$ [**Estas condiciones equivalen a pedir que** y **sea** 2π**-periódica**].

$$\lambda<0 \;\to\; \left.\begin{array}{l} c_1[\mathrm{e}^{\pi p}-\mathrm{e}^{-\pi p}]-c_2[\mathrm{e}^{\pi p}-\mathrm{e}^{-\pi p}]=0 \\ c_1[\mathrm{e}^{\pi p}-\mathrm{e}^{-\pi p}]+c_2[\mathrm{e}^{\pi p}-\mathrm{e}^{-\pi p}]=0 \end{array}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} \mathrm{e}^{\pi p}-\mathrm{e}^{-\pi p} & \mathrm{e}^{-\pi p}-\mathrm{e}^{\pi p} \\ \mathrm{e}^{\pi p}-\mathrm{e}^{-\pi p} & \mathrm{e}^{\pi p}-\mathrm{e}^{-\pi p}\end{vmatrix}=2(\mathrm{e}^{\pi p}-\mathrm{e}^{-\pi p})^2\neq 0\,.$$

El determinante de los coeficientes no es 0 y sólo tiene la solución $c_1=c_2=0$. No hay $\lambda<0$.

$$\lambda=0 \;\to\; \left.\begin{array}{l} c_1-c_2\pi = c_1+c_2\pi \\ c_2=c_2 \end{array}\right\} \text{ se satisface para } c_2=0 \text{ y cualquier } c_1:\;\; y_0=c_1=\{1\}\,.$$

$$\lambda>0 \;\to\; \left.\begin{array}{l} 2c_2\operatorname{sen}\pi w=0 \\ 2c_1 w\operatorname{sen}\pi w=0 \end{array}\right\} \to\; \operatorname{sen}\pi w=0 \;\to\; \lambda_n=n^2\,,\; n=1,2,\ldots$$

Para esos λ_n las condiciones de contorno se cumplen para todo c_1 y todo c_2.

Las autofunciones son, pues: $y_n=c_1\cos nx+c_2\operatorname{sen} nx\equiv\{\cos nx,\operatorname{sen} nx\}$.

[Es claro que exigir simplemente que y sea 2π-periódica lleva a los mismos λ_n e $\{y_n\}$].

Las propiedades de (P_7) son algo distintas: sigue habiendo una **sucesión infinita de autovalores** $\lambda_n=n^2$, $n=1,2,\ldots$ tendiendo a ∞, pero **las autofunciones** $y_0=\{1\}$**,** $y_n=\{\cos nx,\operatorname{sen} nx\}$ **forman**, si $n>0$, **un espacio vectorial de dimensión** 2. Utilizando relaciones trigonométricas se comprueba que sigue siendo cierto que **autofunciones diferentes son ortogonales** entre sí.

Problemas no homogéneos

Resolviendo EDPs aparecerán sobre todo problemas de contorno homogéneos. Pero a veces (en 4.5) también alguno no homogéneo, de propiedades diferentes. En ellos ni $y\equiv 0$ será solución ni lo son los múltiplos de una dada. Damos brevemente la teoría empezando por un ejemplo fácil:

Ej 9. Discutamos cuántas soluciones tiene $\boxed{\begin{cases} y''=3x-d \\ y(1)=y(2)+by'(2)=0 \end{cases}}$, con d, b constantes.

La solución general es: $y=c_1+c_2x+\frac{1}{2}x^3-\frac{d}{2}x^2$ $\big($con $y'=c_2+\frac{3}{2}x^2-dx\big)$. Imponiendo datos:

$$\begin{cases} c_1+c_2+\frac{1}{2}-\frac{d}{2}=0 \\ c_1+2c_2+4-2d+bc_2+6b-2bd=0 \end{cases}, \text{ es decir: } \begin{cases} c_1+c_2=\frac{d}{2}-\frac{1}{2} \\ c_1+(2+b)c_2=2bd+2d-6b-4 \end{cases}.$$

Tiene **solución única** en c_1 y c_2 **si el homogéneo tiene sólo la trivial** (si el determinante de sus coeficientes de $1+b\neq 0$). **Si el homogéneo tiene infinitas, el no homogéneo tendrá infinitas o ninguna**. Para $b\neq -1$, se pueden despejar $\forall d$ de forma única c_1 y c_2.

Pero si $b=-1$: $\begin{cases} c_1+c_2=\frac{d-1}{2} \\ c_1+c_2=2 \end{cases}$. Sólo tiene solución si $d=5$, y queda entonces una constante libre. Si $b=-1$, $d\neq 5$, no hay solución.

En general, sea $\boxed{(\mathrm{P_f}) \begin{cases} \big[p(x)y'\big]'+g(x)y=f(x) \\ \alpha y(a)-\alpha' y'(a)=\beta y(b)+\beta' y'(b)=0 \end{cases}}$ $p\in C^1,\ g,f\in C$, $p>0$ en $[a,b]$.

y llamemos $(\mathrm{P_h})$ al problema homogéneo asociado (el de $f\equiv 0$). Se prueba el teorema:

$$\boxed{\begin{array}{c} (\mathrm{P_f}) \text{ tiene solución única} \Leftrightarrow (\mathrm{P_h}) \text{ tiene sólo la solución } y\equiv 0. \\ \text{Si } (\mathrm{P_h}) \text{ tiene soluciones no triviales } \{y_h\} \text{ entonces, según sea} \\ \int_a^b f(x)\,y_h(x)\,dx \begin{array}{c} =0 \\ \neq 0 \end{array},\ (\mathrm{P_f}) \text{ tiene } \begin{array}{l} \text{infinitas soluciones} \\ \text{ninguna solución} \end{array}. \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} 1\to 1 \\ \infty \to \begin{array}{c}\infty \\ 0\end{array} \end{array}}$$

Ej 9*. El (P_h) del Ej 9 tiene sólo la solución $y\equiv 0$ si $b\neq -1$. Y si $b=-1$ es $y_h=\{1-x\}$.

El (P_f) $\big[$para $[y']'=x-d$, f es la inicial$\big]$, tendrá solución única si $b\neq -1$, e infinitas ó 0, para $b=-1$, según se anule o no la integral $\int_1^2 (3x-d)(1-x)\,dx=\frac{d-5}{2}$ $\big(=0 \Leftrightarrow d=5\big)$.

Para un **problema de S-L no homogéneo**: $\boxed{(P_\lambda)\ \begin{cases} [py']' - qy + \lambda ry = f(x) \\ \alpha y(a)-\alpha' y'(a)=\beta y(b)+\beta' y'(b)=0 \end{cases}}$

del teorema se deduce, si (P_s) es el problema de Sturm-Liouville homogéneo (el de $f\equiv 0$):

(P_λ) tiene solución única $\Leftrightarrow$ λ no es autovalor de (P_s). Si λ_n es autovalor con autofunción $\{y_n\}$, (P_{λ_n}) $\begin{matrix}\text{no tiene solución}\\ \text{tiene infinitas}\end{matrix}$ según sea $\int_a^b f\,y_n\,dx \begin{matrix}\neq 0\\ =0\end{matrix}$.

Ej 10. Sea $\begin{cases} x^2y''-2xy'+\lambda y=2 \\ y'(1)=y(2)=0 \end{cases}$. Veamos si $\lambda=0$ y $\lambda=2$ son o no autovalores del homogéneo y cuántas soluciones tiene el no homogéneo en esos dos casos.

Ecuación de Euler con $\mu^2-3\mu+\lambda=0$. Si $\lambda=0$ la solución de la homogénea es $y=c_1+c_2x^3$.

Imponiendo los datos $\begin{cases} y'(1)=3c_2=0 \\ y(2)=c_1+8c_2=0 \end{cases} \to\ c_1=c_2=0$. $\lambda=0$ no es autovalor y el no homogéneo tiene solución única.

Si $\lambda=2$, $y=c_1x+c_2x^2$, $\begin{cases} y'(1)=c_1+2c_2=0 \\ y(2)=2c_1+4c_2=0 \end{cases}$, $c_1=-2c_2$. Autovalor. Autofunción $\{x^2-2x\}$. No homogéneo infinitas o cero.

Para usar el teorema: $\big[\frac{y'}{x^2}\big]'+\frac{2}{x^4}y=\frac{2}{x^4}$, $\int_1^2 \frac{2}{x^4}\,(x^2-2x)dx=\big[\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x}\big]_1^2=-\frac{1}{2}\neq 0$. Sin solución.

O se puede ver a partir de la solución general de la no homogénea $y=c_1x+c_2x^2+1$ (y_p a ojo).

Sean $y_1, \ldots, y_n, \ldots$ las **autofunciones** del problema separado regular: $\boxed{(\mathrm{P}) \begin{cases} [py']' - qy + \lambda r y = 0 \\ \alpha y(a) - \alpha' y'(a) = y(b) + \beta' y'(b) = 0 \end{cases}}$,

y llamemos como en 3.3, $\langle u, v\rangle = \int_a^b r\, u\, v\, dx$ al producto escalar respecto al peso $r(x)$.

[r es el de forma autoadjunta de arriba; muchas veces ese peso es 1 , pero no siempre].

Toda función f suficientemente buena en $[a,b]$ puede ser escrita como una suma infinita de las autofunciones de (P), que se denomina **serie de Fourier de f**: $\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, y_n(x)}$.

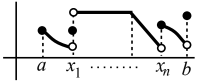
Los c_n deben ser (si la serie puede ser integrada término a término), por ser las y_n ortogonales:

$$\int_a^b r\, f\, y_m\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_a^b r\, y_n y_m\, dx = c_m \int_a^b r\, y_m y_m\, dx \;\Rightarrow\; \boxed{c_n = \frac{\langle f, y_n\rangle}{\langle y_n, y_n\rangle}}\;,\; n = 1, 2, \ldots$$

Para que esta serie converja hacia f debe ser al menos C^1 a trozos:
una f **es C^1 a trozos** en $[a,b] = [a, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \cdots \cup [x_n, b]$ si

i. f y f' son continuas en cada (x_k, x_{k+1}) ,

ii. los límites laterales de f , f' en cada x_k son finitos.



Teor $\boxed{\begin{array}{l}\text{Si } f \text{ es } C^1 \text{ a trozos en } [a,b],\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle f, y_n\rangle}{\langle y_n, y_n\rangle}\, y_n(x) = f(x) \text{ en los } x \in (a,b) \text{ donde } f \text{ es} \\ \text{continua y en los } x \in (a,b) \text{ en que } f \text{ es discontinua la suma es } \frac{1}{2}\big[f(x^-) + f(x^+)\big].\end{array}}$

El teorema **no dice nada sobre la convergencia en los extremos a y b**.

Los casos particulares más importantes son las **series trigonométricas** que vemos ahora.

Para $\boxed{(\mathrm{P}_s)\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y(0)=y(L)=0 \end{cases}}$ son $\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{L^2}$, $y_n=\left\{\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\right\}$, $n=1,2,\ldots$ Y se llama **serie de Fourier en senos** de f en $[0,L]$ al desarrollo:

$$\boxed{f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\ ,\ \text{ con }\ b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx\ ,\ n=1,2,\ldots} \quad \text{[s]}$$

Pues el peso es $r(x)\equiv 1$ y se tiene $\langle y_n,y_n\rangle=\int_0^L \operatorname{sen}^2\frac{n\pi x}{L}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^L\left[1-\cos\frac{2n\pi x}{L}\right]dx=\frac{L}{2}$.

Para $\boxed{(\mathrm{P}_c)\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y'(0)=y'(L)=0 \end{cases}}$ son $\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{L^2}$, $y_n=\left\{\cos\frac{n\pi x}{L}\right\}$, $n=0,1,\ldots$ $\left[\,y_o=\{1\}\,\right]$ Y la **serie de Fourier en cosenos** de una f en $[0,L]$ es:

$$\boxed{f(x)=\frac{a_o}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}\ ,\ \text{ con }\ a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx\ ,\ n=0,1,2,\ldots} \quad \text{[c]}$$

Pues $\langle y_o,y_o\rangle=\int_0^L 1^2\,dx=L$ e $\langle y_n,y_n\rangle=\int_0^L\left[\cos\frac{n\pi x}{L}\right]^2dx=\frac{L}{2}$, si $n\geq 1$.

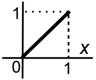
$\Big[$**Ponemos** $\frac{a_o}{2}$ **en la serie para que la fórmula del** a_n **valga también para** $a_o\Big]$.

Otras muy habituales dan lugar a las series en **senos impares** y en **cosenos impares** en $[0,L]$:

$$\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y(0)=y'(L)=0 \end{cases} \text{ con } \lambda_n=\frac{[2n-1]^2\pi^2}{2^2L^2}\ ,\ y_n=\left\{\operatorname{sen}\frac{[2n-1]\pi x}{2L}\right\},\ \langle y_n,y_n\rangle=\frac{L}{2}\ ,\ n=1,2,\ldots$$

$$\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y'(0)=y(L)=0 \end{cases} \text{ con } \lambda_n=\frac{[2n-1]^2\pi^2}{2^2L^2}\ ,\ y_n=\left\{\cos\frac{[2n-1]\pi x}{2L}\right\},\ \langle y_n,y_n\rangle=\frac{L}{2}\ ,\ n=1,2,\ldots$$

En los 4 casos la fórmula para el coeficiente de la serie toma la forma: $\boxed{c_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)y_n(x)\,dx}$.



Ej 1. Desarrollemos $\boxed{f(x)=x\,,\ x\in[0,1]}$ en senos, en cosenos y en cosenos impares:

En senos: $b_n=2\int_0^1 x\,\mathrm{sen}\,n\pi x\,dx=-\frac{2x\cos n\pi x}{n\pi}\Big]_0^1+\frac{2}{n\pi}\int_0^1\cos n\pi x\,dx=-\frac{2\cos n\pi}{n\pi}$,

$$\to\ f(x)=x=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\,\mathrm{sen}\,n\pi x=\frac{2}{\pi}\Big[\,\mathrm{sen}\,x-\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,2x+\frac{1}{3}\,\mathrm{sen}\,3x+\cdots\Big].$$

En cosenos, aunque hay una sola fórmula, hay que hacer dos cálculos: para a_o y para el resto.

$$a_o=2\int_0^1 x\,dx=1\,,\ a_n=2\int_0^1 x\cos n\pi x\,dx=\frac{2x\,\mathrm{sen}\,n\pi x}{n\pi}\Big]_0^1-\frac{2}{n\pi}\int_0^1\mathrm{sen}\,n\pi x\,dx=\frac{2[\cos n\pi-1]}{n^2\pi^2}\,,\ n=1,\ldots$$

$$\to\ x=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos n\pi x=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}\cos(2m-1)\pi x\,.$$

El otro: $x=\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(2n-1)}-\frac{8}{\pi^2(2n-1)^2}\Big]\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}$, pues $c_n=2\int_0^1 x\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}\,dx=\cdots$

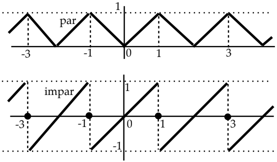
Las tres series, por el teorema, convergen hacia x para cada $x\in(0,1)$. El desarrollo en otra familia de autofunciones cualquiera haría lo mismo. En general no sabremos qué sucede en $x=0$ y $x=1$, pero lo podremos decir para las dos primeras, por los argumentos que siguen.

Cada sumando de una **serie en senos** es impar y de periodo $2L$ y la serie también lo será. Si la f inicialmente dada en $[0,L]$ se extiende de forma **impar** a $[-L,L]$ y luego se hace **$2L$-periódica** en todo $\mathbf{R}$, **hacia esa función extendida tenderá la serie**. Donde sea continua, la serie tomará su valor (y si no, tenderá al valor medio, pudiendo aparecer discontinuidades en los extremos). Razonando análogamente, una **serie en cosenos** (de sumandos pares y periódicos) **convergerá hacia la extensión par y $2L$-periódica** de la f , lo que permitirá analizarla en los extremos. [Hay argumentos para extremos de series en senos y cosenos impares, pero no hablamos de ello].

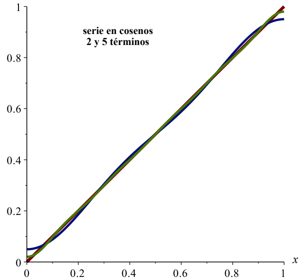
Ej 1*. Ya podemos saber hacia qué convergen en los extremos las dos primeras series.

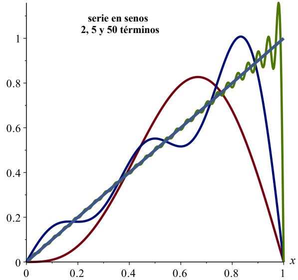
La serie de cosenos sí converge a f en todo $[0,1]$. Pero la serie en senos no converge hacia f en todo el intervalo (lo hace en $[0,1)$, en $x=1$ la suma será 0).

[Aunque las series en cosenos converjan mejor, al resolver EDPs no elegiremos en qué desarrollar las funciones. El problema nos impondrá unas autofunciones determinadas].



Utilizamos el ordenador para comprobarlo. Para la de cosenos sumamos 2 y 5 términos y ya se tiene una buena aproximación. Para la de senos, en cambio, además de acercarse más lentamente se ve que cerca de $x=1$, aunque sumemos 50 términos de la serie, no se ajusta bien al valor real.





En las discontinuidades siempre aparecerán esos ‘picos’. Es el llamado ‘**fenómeno de Gibbs**’.

Ej 2. Hallemos el desarrollo de $\boxed{f(x)=\pi}$ en las autofunciones $y_n(x)$ de $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y'(0)=y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \end{cases}$.

Es uno de los 4 problemas conocidos, el de cosenos impares: $y_n=\{\cos(2n-1)x\}$, $n=1,2,\dots$

Y tenemos la fórmula para los $c_n=\frac{2}{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\pi\cos(2n-1)x\,dx=\frac{4}{2n-1}\operatorname{sen}(2n-1)x\Big]_0^{\pi/2}\to$

$$\pi=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\cos(2n-1)x=4\left[\cos x-\tfrac{1}{3}\cos 3x+\tfrac{1}{5}\cos 5x-\tfrac{1}{7}\cos 7x+\cdots\right].$$

Como la f desarrollada es continua en $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, la suma de la serie $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ será $\pi=f(x)$. Aunque no tenemos resultados en sus extremos, en este caso es posible ver que en $x=0$ sí es $\pi=4\left[1-\frac{1}{3}+\cdots\right]=4\arctan 1$, pero que en $\frac{\pi}{2}$ suma 0 (los cosenos se anulan).

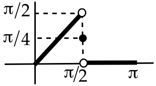
En cualquier otro punto, por ejemplo, $x=1$, el ordenador va confirmando lo que asegura el teorema 1: sumando 100 términos de la serie se obtiene 3.132..., sumando 1000, 3.14227... .

Parecemos estar haciendo tonterías escribiendo una sencilla constante como una serie infinita, pero este tipo de cálculos será necesario para resolver ecuaciones en derivadas parciales.

Ej 3. Desarrollemos la discontinua $\boxed{f(x)=\begin{cases} x\,,\ 0\le x<\frac{\pi}{2} \\ 0\,,\ \frac{\pi}{2}\le x\le\pi \end{cases}}$ en las y_n de $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y(0)=y'(\pi)=0 \end{cases}$.

$y_n=\left\{\operatorname{sen}\frac{(2n-1)x}{2}\right\}$, $n=1,2,\dots$ son sus conocidas autofunciones.

$$c_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\operatorname{sen}\frac{(2n-1)x}{2}\,dx=\cdots=\frac{8\operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi}{4}}{\pi(2n-1)^2}-\frac{2\cos\frac{(2n-1)\pi}{4}}{2n-1}.$$



La serie tiende hacia $f(x)$ en los $x\in(0,\pi)$ en que es continua $\left[\text{en } \left(0,\frac{\pi}{2}\right) \text{ y } \left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\right]$, hacia $\frac{1}{2}[f(x^+)+f(x^-)]=\frac{\pi}{4}$ en el $x=\frac{\pi}{2}$ donde es discontinua (y en los extremos no lo sabemos).

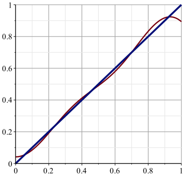
Cuando las autofunciones no sean las 4 clásicas habrá se usará expresión $c_n=\langle f,y_n\rangle/\langle y_n,y_n\rangle$.

Ej 4. Desarrollamos $\boxed{f(x)=x\,,\,x\in[0,1]}$ en las $\{\cos w_nx\}$ con $\tan w_n=\frac{1}{w_n}$ del Ej 4 de 3.3:

El peso $r(x)=1\to\langle\cos w_nx,\cos w_nx\rangle=\int_0^1\cos^2 w_nx\,dx=\frac{1}{2}+\frac{\operatorname{sen}w_n\cos w_n}{2w_n}=\frac{w_n^2+\cos^2 w_n}{2w_n^2}$.

$$\langle x,\cos w_nx\rangle=\int_0^1 x\cos w_nx\,dx=\frac{\operatorname{sen}w_n}{w_n}+\frac{\cos w_n-1}{w_n^2}=\frac{2\cos w_n-1}{w_n^2}\,.$$

Por tanto: $x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(2\cos w_n-1)}{w_n^2+\cos^2 w_n}\cos w_nx$.



Usamos Maple para calcular varios coeficientes y dibujar algunas sumas parciales de la serie.
Primero aproximamos los w_n: $w_1\approx 0.8603$, $w_2\approx 3.4256$, $w_3\approx 6.4373$, $w_4\approx 9.5293\ldots$
De ellos deducimos los c_n: $c_1\approx 0.5223$, $c_2\approx -0.4614$, $c_3\approx 0.0460$, $c_4\approx -0.0651\ldots$
A la derecha se ven $f(x)=x$ y la cuarta suma parcial. Parece converger bien en los extremos.

Ej 5. Desarrollamos ahora $\boxed{f(x)=1}$ en las $y_0=\{e^{-x}\}$, $y_n=\{\operatorname{sen}n\pi x-n\pi\cos n\pi x\}$ del Ej 5.

El peso vuelve a ser $r(x)=1$. $c_0=\frac{\langle 1,e^{-x}\rangle}{\langle e^{-x},e^{-x}\rangle}=\frac{\int_0^1 e^{-x}dx}{\int_0^1 e^{-2x}dx}=\frac{1-e^{-1}}{(1-e^{-2})/2}=\frac{2e}{e+1}$.

$\langle 1,y_n\rangle=\Big[-\frac{\cos n\pi x}{n\pi}-\operatorname{sen}n\pi x\Big]_0^1=\frac{1-(-1)^n}{n\pi}$ (se anula si n par).

$$\langle y_n,y_n\rangle=\int_0^1\big[\operatorname{sen}^2 n\pi x+n^2\pi^2\cos^2 n\pi x-2n\pi\operatorname{sen}n\pi x\cos n\pi x\big]dx=\frac{1+n^2\pi^2}{2}\,.$$

El desarrollo es, pues: $1=\frac{2e}{e+1}e^{-x}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2[1-(-1)^n]}{n\pi[1+n^2\pi^2]}(\operatorname{sen}n\pi x-n\pi\cos n\pi x)$.

La teoría de series de Fourier incluye los problemas periódicos. Así se deduce para:

$$\boxed{(\mathrm{P}_p)\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y(-L)=y(L),\, y'(-L)=y'(L)\end{cases}}\quad \lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{L^2}\,,\ n=0,1,\dots,\ y_o=\{1\}\,,\ y_n=\left\{\cos\frac{n\pi x}{L}\,,\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{L}\right\}$$

esta **serie de Fourier en senos y cosenos** en $[-L,L]$:

$$[\mathrm{p}]\quad \boxed{f(x)=\frac{a_o}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\,a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{L}\,\Big]}\ \text{, con:}$$

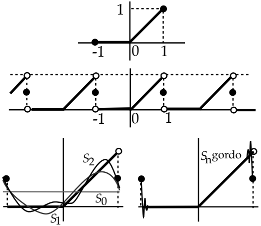
$$[1]\quad \boxed{a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx\,,\ n=0,1,\dots}\quad \text{y}\quad [2]\quad \boxed{b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{L}\,dx\,,\ n=1,2,\dots},$$

La serie [p] también converge hacia $f(x)$ en los puntos de continuidad. Y además se puede decir qué sucede en los extremos $-L$ y L (por converger hacia una función $2L$-periódica en todo $\mathbf{R}$).

Las fórmulas [s] y [c] de las series en senos y en cosenos son casos particulares de [1] y [2]. Si f es **impar** en $[-L,L]$, es impar $f\cdot\cos$ y par $f\cdot\text{sen}$. Si f es **par**, $f\cdot\cos$ es par y $f\cdot\text{sen}$ es impar. Por eso, $a_n=0$ y [1] se convierte en [s] en el primero, y en el segundo $b_n=0$ y [2] pasa a ser [c].

Ej 6. Sea $\boxed{f(x)=\begin{cases}0\,,\ -1\le x\le 0\\ x\,,\ 0\le x\le 1\end{cases}}$ Su serie en senos y cosenos está casi calculada en el Ej 1:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos n\pi x-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\,\text{sen}\,n\pi x\,.$$



Viendo su extensión 2π-periódica, deducimos que su suma será 0 en $(-1,0]$ y x en $[0,1)$ (valores de la f inicial), pero sumará $1/2$ (valor medio entre 0 y 1) en -1 y 1. Cerca de estos dos puntos de discontinuidad aparecerá Gibbs.

15(e21). a) Hallar la solución de $y''+\frac{1}{4}y=\mathrm{e}^{x/2}$ que cumple $y(0)=y'(0)=2$. b) Ver si $\lambda=0$, $\lambda=\frac{1}{4}$ son o no autovalores de $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y(-\pi)=y(\pi)=0 \end{cases}$, dando la autofunción si lo es.

19. Sea $\begin{cases} x^2y''+3xy'+y+\lambda y=0 \\ y(1)=y(\mathrm{e})=0 \end{cases}$. **a]** Escribirla en forma autoadjunta y hallar el peso. **b]** Ver si $\lambda=0$ es autovalor. **c]** Probar que $\lambda=\pi^2$ lo es, dar su autofunción $\{y_1\}$ y calcular $\langle y_1, y_1\rangle$.

24. **a]** Hallar sin mirar apuntes los autovalores λ_n, las autofunciones $\{y_n\}$ e $\langle y_n, y_n\rangle$.
b] Desarrollar $f(x)=x$ en serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n\, y_n(x)$ de autofunciones de $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y(0)=y'\left(\frac{1}{2}\right)=0 \end{cases}$.

26. Sea $f(x)=\begin{cases} 1,\ 0\le x\le 1 \\ 0,\ 1<x\le 2 \end{cases}$. Hallar su desarrollo de Fourier $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{2}$.
¿Cuánto debe sumar la serie si i) $x=1$, ii) $x=2$? Comprobarlo sustituyendo en ella.

25. b) Desarrollar $f(x)=x^2$, $x\in[0,1]$, en serie de i) $\{\operatorname{sen} n\pi x\}$, ii) $\{\cos n\pi x\}$.
Dibujar con algún programa de ordenador algunas sumas parciales de las series.

2bs20. Precisar si i) $\lambda=0$ ii) $\lambda=1/4$ son o no autovalores de $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y(0)=y\left(\frac{\pi}{2}\right)-2y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \end{cases}$.

14(j21). Ver si i) $\lambda=-2$ ii) $\lambda=\frac{1}{4}$ son autovalores de $\begin{cases} y''-y'+\lambda y=0 \\ y'(-2)=y(0)=0 \end{cases}$, dando la autofunción.

16. a) Hallar la solución de $y''+y'=2\,e^x$ que cumple $y(0)=0$, $y'(0)=2$. b) Precisar si $\lambda=0$, $\lambda=-2$ son autovalores de $\begin{cases} y''+y'+\lambda y=0 \\ y'(0)=y'(1)=0 \end{cases}$, dando la autofunción si lo es.

21. **a]** Estudiar si $\lambda=0$ y $\lambda=-2$ son o no autovalores de $\begin{cases} x^2y''+\lambda y=0 \\ y'(1)=y'(2)=0 \end{cases}$, dando la autofunción cuando lo sea. **b]** Precisar para esos λ si hay o no una única solución de $x^2y''+\lambda y=2$ cumpliendo esos datos de contorno.

23. Sea $\begin{cases} y''+\lambda y=\operatorname{sen} x \\ y(0)=y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \end{cases}$. Precisar algún λ para el que: i) tenga solución única, ii) tenga infinitas soluciones, iii) no tenga solución.

28. Sea (P) $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y(0)=y(1)-y'(1)=0 \end{cases}$. a) Probar que $\lambda_0=0$ es autovalor y hallar la $\{y_0\}$ asociada... b) Hallar el coeficiente que acompaña a y_0 en el desarrollo de $f(x)=1$ en serie de autofunciones de (P).

30. Sea $\begin{cases} y''+\lambda y=\cos 3x \\ y'(0)=y'\left(\frac{\pi}{4}\right)+y\left(\frac{\pi}{4}\right)=0 \end{cases}$. Hallar un término del desarrollo de $f(x)=\cos 3x$ en serie de autofunciones del homogéneo. Precisar para i) $\lambda=0$, ii) $\lambda=1$ cuántas soluciones tiene el problema no homogéneo.

15(e21). $\boxed{y''+\frac{1}{4}y=e^{x/2}}$ **a]** $\mu=\pm\frac{i}{2}$, $y=c_1\cos\frac{x}{2}+c_2\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{2}+y_p$. $y_p=Ae^{x/2}\longrightarrow A\big(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\big)=1$, $A=2$.

Solución general $y=c_1\cos\frac{x}{2}+c_2\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{2}+2e^{x/2}\overset{d.i.}{\longrightarrow}\begin{array}{l}c_1+2=2\,,\ c_1=0\\ \frac{1}{2}c_2+1=2,\ c_2=2\end{array}$. $\boxed{y=2\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{2}+2e^{x/2}}$.

b] $\boxed{\begin{array}{l}y''+\lambda y=0\\ y(-\pi)=y(\pi)=0\end{array}}$ $\lambda=0$, $y=c_1+c_2x\overset{c.c.}{\longrightarrow}\begin{array}{ll}c_1-c_2\pi=0\,,\ c_1=c_2\pi\downarrow & c_1=0\\ c_1+c_2\pi=0 & 4c_2\pi=0\,,\ c_2=0\uparrow\end{array}$. **No autovalor**.

$\lambda=\frac{1}{4}$, $y=c_1\cos\frac{x}{2}+c_2\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{2}\overset{c.c.}{\longrightarrow}\begin{array}{l}-c_2=0\\ c_2=0\end{array}$, $\forall c_1$. Es **autovalor** con autofunción $\boxed{\{\cos\frac{x}{2}\}}$.

[Para calcular todos, como dicen los apuntes, conviene llevar el intervalo a uno de la forma $[0,L]$ haciendo $s=x+\pi\rightarrow$ $y''+\lambda y=0$, $y(0)=y(2\pi)=0\rightarrow\lambda_n=n^2/4$, $y_n=\{\mathrm{sen}\,\frac{ns}{2}\}=\{\mathrm{sen}\,\frac{n(x+\pi)}{2}\}$, que son $\{\cos\frac{x}{2}\}$, $\{\mathrm{sen}\,x\}$, $\dots$].

19. $\boxed{\begin{array}{l}x^2y''+3xy'+y+\lambda y=0\\ y(1)=y(e)=0\end{array}}$ **a]** $y''+\frac{3}{x}y'+\frac{1}{x^2}y+\frac{1}{x^2}\lambda y=0$, $e^{\int 3/x}=x^3$, $\big(x^3y'\big)'+xy+\lambda xy=0$.

$\boxed{r(x)=x}$ peso. $\mu(\mu-1)+3\mu+1+\lambda=0$, $\mu=-1\pm\sqrt{-\lambda}$.

b] $\lambda=0$, $y=\big(c_1+c_2\ln x\big)x^{-1}\longrightarrow\begin{array}{l}y(1)=c_1=0\\ y(e)=(c_1+c_2)\,e^{-1}=0\end{array}\Rightarrow c_1=c_2=0$. **No es autovalor**.

c] $\lambda=\pi^2$, $y=c_1\frac{\cos(\pi\ln x)}{x}+c_2\frac{\mathrm{sen}(\pi\ln x)}{x}\longrightarrow\begin{array}{l}y(1)=c_1=0\\ y(e)=-c_1e^{-1}=0\end{array}$. Autovalor. $\boxed{y_1=\big\{\frac{\mathrm{sen}(\pi\ln x)}{x}\big\}}$.

$\langle y_1\,,y_1\rangle=\int_1^e x\frac{\mathrm{sen}^2(\pi\ln x)}{x^2}\,dx=[\ln x=s]=\int_0^1\mathrm{sen}^2(\pi s)\,ds=\frac{1}{2}\int_0^1[1-\cos(2\pi s)]\,ds=\boxed{\frac{1}{2}}$.

24. b] Sabemos que $\boxed{\lambda_n=(2n-1)^2\pi^2\,,\ y_n=\{\mathrm{sen}(2n-1)\pi x\}}$, $n=1,2,\ldots$.

$$c_n=4\int_0^{1/2}x\,\mathrm{sen}(2n-1)\pi x\,dx=-\frac{4x\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)\pi}\Big]_0^{1/2}+\frac{4}{(2n-1)\pi}\int_0^{1/2}\cos(2n-1)\pi x=\frac{4(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2\pi^2}\,.$$

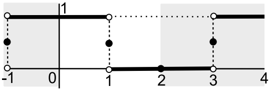
Por tanto: $x=\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}\,\mathrm{sen}(2n-1)\pi x=\frac{4}{\pi^2}\Big[\,\mathrm{sen}\,\pi x-\frac{1}{9}\mathrm{sen}\,3\pi x+\frac{1}{25}\mathrm{sen}\,5\pi x+\cdots\Big]$.

26. $\boxed{f(x)=\begin{cases}1\,,\ 0\le x\le 1\\ 0\,,\ 1<x\le 2\end{cases}}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{L}\ \to\ a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx\,.\quad a_0=\frac{2}{2}\int_0^1 dx=1\,,$

$a_n=\int_0^1\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx=\frac{2}{n\pi}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0\,,\ n=2m\\ \frac{2(-1)^m}{(2m+1)\pi}\,,\ n=2m+1\end{cases},\quad \boxed{f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}\cos\frac{(2m+1)\pi x}{2}}\,.$

i) En $x=1$ la suma de la serie será $\frac{1}{2}\big[f(1^-)+f(1^+)\big]=\frac{1}{2}$:

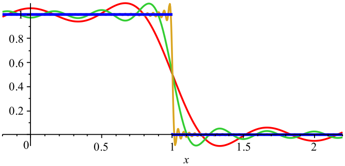
$$\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}\cos\frac{(2m+1)\pi}{2}=\frac{1}{2}\quad\text{[los cosenos se anulan].}$$



ii) Como tiende en $\mathbf{R}$ hacia la extensión par y 4-periódica de f, en $x=2$ deberá tender hacia $f(2)=0$. Sustituyendo:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\cos(2m+1)\pi}{2m+1}=\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}=0\,,$$

pues la serie $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$.

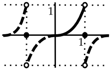


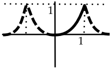
25. b) $\boxed{f(x)=x^2}$ $\quad b_n=2\int_0^1 x^2 \operatorname{sen} n\pi x\,dx=-\frac{2x^2\cos n\pi x}{n\pi}\Big]_0^1+\frac{4}{n\pi}\int_0^1 x\cos n\pi x\,dx$

$$=\frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n}+\frac{4x\operatorname{sen} n\pi x}{n^2\pi^2}\Big]_0^1-\frac{4}{n^2\pi^2}\int_0^1 \operatorname{sen} n\pi x\,dx\,. \qquad a_0=2\int_0^1 x^2dx=\tfrac{2}{3}\,,$$

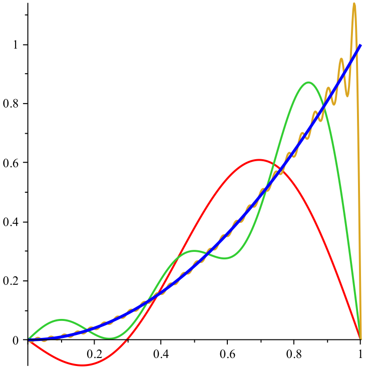
$$a_n=2\int_0^1 x^2\cos n\pi x\,dx=\frac{2x^2\operatorname{sen} n\pi x}{n\pi}\Big]_0^1+\frac{4}{n\pi}\int_0^1 x\operatorname{sen} n\pi x\,dx=-\frac{4x\cos n\pi x}{n^2\pi^2}\Big]_0^1-\frac{4}{n^2\pi^2}\int_0^1\cos n\pi x\,dx\,.$$

$$x^2=\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n}-\frac{4[(-1)^n-1]}{\pi^3n^3}\Big]\operatorname{sen} n\pi x=\frac{1}{3}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi x\,.$$

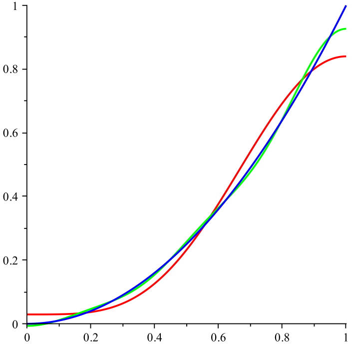




La de senos convergerá mal cerca de 1 y la de cosenos tiende a x^2 en todo $[0,1]$.



b) sen, $n=2,5,50$



b) cos, $n=2,5$

21. $\boxed{\begin{array}{l} x^2y''+\lambda y=0 \\ y'(1)=y'(2)=0 \end{array}}$ **a]** Euler, $\mu^2-\mu-\lambda=0$. $\lambda=0 \to y=c_1+c_2x \xrightarrow{cc} \begin{array}{l} c_2=0 \\ c_2=0 \end{array}$, $\forall c_1$. **Autovalor** $\boxed{y_0=\{1\}}$

$\lambda=-2 \to \mu=2\,,-1\,,\ y=c_1x^2+\frac{c_2}{x}\,,\ y'=2c_1x-\frac{c_2}{x^2} \xrightarrow{cc} \begin{array}{l} y'(1)=2c_1-c_2=0 \\ y'(2)=4c_1-\frac{c_2}{4}=0 \end{array} \to y\equiv 0$. **No autovalor**.

$\Big[$Como la ecuación es $[y']'+\lambda\frac{1}{x^2}y=0$ en forma autoadjunta, al ser $q=\alpha\alpha'=\beta\beta'=0$ sabemos que no había $\lambda<0\Big]$.

b] $x^2y''+\lambda y=2$. $\lambda=-2$. El homogéneo tenía sólo $y\equiv 0$. El no homogéneo, **solución única**.

[Imponiendo los datos en la solución $y=c_1x^2+c_2x^{-1}\underset{\text{a ojo}}{-1}$, se ve que esa única es $y=-1$].

$\lambda=0$. Infinitas el homogéneo $\{1\}$. $[y']'=\frac{2}{x^2}$. **No hay solución** ya que $\int_1^2 1\,\frac{2}{x^2}dx=1\neq 0$.

O a partir de la solución: $y'=C-\frac{2}{x}\,,\ y=Cx+K-2\ln x \xrightarrow{cc} \begin{array}{l} C=2 \\ C=1 \end{array}$. Imposible.

23. $\boxed{\begin{array}{l} y''+\lambda y=\operatorname{sen} x \\ y(0)=y'(\frac{\pi}{2})=0 \end{array}}$ Ya autoadjunta $[y']'+\lambda y=\operatorname{sen} x$ y del homogéneo sabemos:

$$\lambda_n=(2n-1)^2\,,\ y_n=\big\{\operatorname{sen}(2n-1)x\big\},\ n=1,2,\ldots$$

Para $\lambda\neq(2n-1)^2$ el homogéneo sólo tiene la solución 0 y el no homogéneo **solución única**.
Si $\lambda=(2n-1)^2$ el homogéneo tiene infinitas soluciones y entonces el no homogéneo tendrá

infinitas / ninguna según sea $\begin{array}{c} =0 \\ \neq 0 \end{array}$ la integral $\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen} x\operatorname{sen}(2n-1)x\,dx$.

Por tanto, **no hay solución** sólo si $\lambda=1$ $\Big[\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^2 x\,dx\neq 0\Big]$, pues para los otros autovalores $\lambda=9,\ 25,\ \ldots$ la integral es cero y hay **infinitas soluciones**. Lo sabemos sin calcularla pues $\operatorname{sen} x$ es ortogonal a las otras autofunciones. Aunque también podemos hacer la integral:

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\big[\cos 2(n-1)x-\cos 2nx\big]dx \overset{n\neq 1}{=} \frac{\operatorname{sen}(n-1)\pi}{4(n-1)}-\frac{\operatorname{sen} n\pi}{4n}=0,\ \text{si } n\neq 1\Big].$$

14(j21). $\boxed{\begin{array}{l} y''-y'+\lambda y=0 \\ y'(-2)=y(0)=0 \end{array}}$ $\mu=\frac{1\pm\sqrt{1-4\lambda}}{2}$. i) $\lambda=-2 \to y=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}$, $y'=2c_1e^{2x}-c_2e^{-x}$

$\to \begin{cases} y'(-2)=2c_1e^{-4}-c_2e=0 & c_1\left[2e^{-4}+1\right]=0 \\ y(0)=c_1+c_2=0 \to c_2=-c_1 & c_1=c_2=0 \end{cases}$. **No es autovalor.** [Bastaba escribir $\left(e^{-x}y'\right)'+\lambda e^{-x}=0$ y observar que $\alpha\alpha'=\beta\beta'=q=0$].

ii) $\lambda=\frac{1}{4}$, $\mu=\frac{1}{2}$ doble, $\begin{array}{l} y=(c_1+c_2x)\,e^{x/2} \\ y'=\left(\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{2}x+c_2\right)e^{x/2} \end{array} \to \begin{cases} y'(-2)=c_1/2e=0 \\ y(0)=c_1=0 \end{cases}$, $c_1=0$ y $\forall c_2$.

Autovalor con autofunción $\boxed{\left\{x\,e^{x/2}\right\}}$.

2bs20. $\boxed{\begin{array}{l} y''+\lambda y=0 \\ y(0)=y\left(\frac{\pi}{2}\right)-2y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \end{array}}$ i) $\lambda=0 \to y=c_1+c_2x$, $y'=c_2 \to$

$\begin{cases} y(0)=c_1=0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)-2y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=c_2\left(\frac{\pi}{2}-2\right)=0 \to c_2=0 \end{cases}$. **No es autovalor.**

ii) $\lambda=\frac{1}{4}$, $y=c_1\cos\frac{x}{2}+c_2\operatorname{sen}\frac{x}{2} \to \begin{cases} y(0)=c_1=0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)-2y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=c_2\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}\right)=c_2\left(\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=c_2\cdot 0=0 \end{cases} \forall c_2$.

Es **autovalor** con autofunción asociada $\boxed{y_1=\left\{\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right\}}$.

16. a) $\boxed{y''+y'=2\,e^x}$ $\mu=0\,,-1$. $\underset{(\mu=1 \text{ no autovalor})}{y_p=A\,e^x} \to A+A=2$. $y=c_1+c_2\,e^{-x}+e^x \xrightarrow{d.i.}$ $\boxed{y=e^x-e^{-x}}$.

O bien: $y'=v \to v'=-v+2\,e^x$, $v=Ce^{-x}+e^{-x}\int 2\,e^{2x}dx=Ce^{-x}+e^x$. $y=K-Ce^{-x}+e^x$.

b) $\boxed{\begin{array}{l} y''+y'+\lambda y=0 \\ y'(0)=y'(1)=0 \end{array}}$ $\mu^2+\mu+\lambda=0$. $\lambda=0$, $y=c_1+c_2\,e^{-x} \xrightarrow{cc} \begin{array}{l} -c_2=0 \\ -c_2e^{-1}=0 \end{array}$. **Autovalor** $\boxed{y_0=\{1\}}$.

$\lambda=-2$, $\mu=1\,,-2$, $y=c_1e^x+c_2e^{-2x}$, $y'=c_1e^x-2c_2e^{-2x} \xrightarrow{cc} \begin{array}{l} c_1-2c_2=0 \\ c_1e-2c_2e^{-2}=0 \end{array}$. **No autovalor**.

[Como la ecuación en forma autoadjunta es $\left[y'e^x\right]'+\lambda e^x y=0$, al ser $q=\alpha\alpha'=\beta\beta'=0$ sabemos que no había $\lambda<0$].

28. $\boxed{\begin{array}{l} y''+\lambda y=0 \\ y(0)=y(1)-y'(1)=0 \end{array}}$ a) $\lambda=0:\ y=c_1+c_2x\,,\ \left.\begin{array}{l} c_1=0 \\ c_1=0 \end{array}\right\}\ \forall\, c_2 \to \lambda_0=0\,,\ \boxed{y_0=\{x\}}$.

b) Los coeficientes del desarrollo $1=c_0\,x+\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n\,y_n(x)$ vienen dados por $c_n=\frac{\langle 1,y_n\rangle}{\langle y_n,y_n\rangle}$.

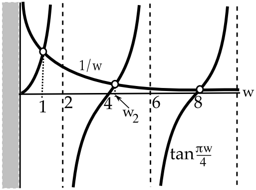
En particular, $\langle 1,x\rangle=\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}\,,\ \langle x,x\rangle=\int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{3}\,,\ c_0=\frac{1/2}{1/3}=\boxed{\frac{3}{2}}\,,\ \ 1=\frac{3}{2}x+\cdots$

30. $\boxed{\begin{array}{l} y''+\lambda y=\cos 3x \\ y'(0)=y'(\frac{\pi}{4})+y(\frac{\pi}{4})=0 \end{array}}$ $\begin{array}{l} \alpha\cdot\alpha'=0 \\ \beta\cdot\beta'>0 \end{array} \Rightarrow \lambda\geq 0\,.\ \ \lambda=0:\ y=c_1+c_2x \to \left.\begin{array}{l} y'(0)=c_2=0\downarrow \\ y'(\frac{\pi}{4})+y(\frac{\pi}{4})=c_1=0 \end{array}\right\}$
No es autovalor.

$\lambda>0:\ y=c_1\cos wx+c_2\,\mathrm{sen}\,wx\ .\ y'(0)=0\to c_2=0\ \to$

$c_2=0\ \to\ y'(\frac{\pi}{4})+y(\frac{\pi}{4})=c_1\left[\cos\frac{w\pi}{4}-w\,\mathrm{sen}\,\frac{w\pi}{4}\right]=0\,.$

Si el corchete es cero, c_1 queda indeterminado. Infinitos w_n cumplen $\tan\frac{\pi w_n}{4}=\frac{1}{w_n}$. A cada $\lambda_n=w_n^2$, está asociada la $y_n=\{\cos w_nx\}$. λ_1 se puede hallar exactamente:



$\boxed{\lambda_1=1\to y_1=\{\cos x\}}$ ($\tan\frac{\pi}{4}=1$).

Si $\cos 3x=c_1\cos x+\sum\limits_{n=2}^{\infty}c_n\cos w_nx$, el coeficiente c_1 es:

$$c_1=\frac{\langle\cos 3x,\cos x\rangle}{\langle\cos x,\cos x\rangle}=\frac{\int_0^{\pi/4}\cos 3x\cos x\,dx}{\int_0^{\pi/4}\cos^2 x\,dx}=\frac{\int_0^{\pi/4}(\cos 4x+\cos 2x)\,dx}{\int_0^{\pi/4}(1+\cos 2x)\,dx}=\boxed{\frac{2}{\pi+2}}\,.$$

Para i), por no ser $\lambda=0$ autovalor hay solución única del no homogéneo. Para ii), hay infinitas del homogéneo $y_h=\{\cos x\}$ y el no homogéneo no tiene pues: $\int_0^{\pi/4}\cos 3x\cos x\,dx=\frac{1}{4}\neq 0$.