4. Ecuaciones en derivadas parciales (EDPs)

4.1 EDPs de primer orden

4.2 Orden 2. Clasificación y problemas clásicos (en este pdf b412)

4.3 Separación de variables. Ecuación del calor (hasta aquí el control)

4.4 Ondas. D'Alembert y separación de variables

4.5 Separación de variables para Laplace (en diciembre)

En las EDPs aparecen derivadas parciales de una función incógnita u de varias variables. Todas las que veremos serán **lineales** y en **dos variables**. Tras ver brevemente las de primer orden (con derivadas primeras), trataremos sobre todo las de segundo orden. Una **solución** será una función $u(x,y)\in C^2$ que llevada a la ecuación la convierte en identidad. De orden 2 son las tres EDPs clásicas de la física (escritas aquí en su versión general para n variables):

Ondas $u_{tt}-c^2\Delta u=F$ **Calor** $u_t-k\,\Delta u=F$ **Laplace** $\Delta u=F$

ejemplos respectivos de los grandes tipos de EDPs: **hiperbólicas**, **parabólicas** y **elípticas**.

Casi nunca se tiene la solución general de una EDP (por eso, muchas veces las soluciones serán series). Con cambios de variable la hallaremos en 4.1 para algunas de **primer orden** (contendrá una función arbitraria) y en 4.2 para pocas de **segundo** (con 2 arbitrarias). Sólo para la **cuerda infinita** daremos una fórmula para sus soluciones. Veremos también las condiciones (iniciales o de contorno) que se imponen a las EDPs y dan **solución única** (probarlo es complicado).

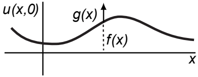
[En los libros serios se pide además que haya 'dependencia continua': variando poco los datos, deben variar poco las soluciones. Se dice entonces que el problema está 'bien planteado'].

Descripción del significado de las EDPs clásicas

La **ecuación de la cuerda vibrante** describe oscilaciones transversales y de pequeña amplitud de una cuerda elástica, tensa y fija en sus extremos. Si $u(x,t)$ representa el desplazamiento vertical del punto de abscisa x en el tiempo t, la u satisface la EDP:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t)$$

donde $c^2 = T_o/\rho$, siendo T_o fuerza de tensión, ρ masa por unidad de longitud y $F(x,t)$ fuerza externa que actúa sobre el punto x en el instante t. Para determinar la evolución de una cuerda dada, se dará la posición de la cuerda y la distribución de velocidades verticales en el instante inicial, es decir, $u(x,0) = f(x)$ y $u_t(x,0) = g(x)$. También se deberá de tener en cuenta que está fija en los extremos $x=0$ y $x=L$, o sea, que $u(0,t) = u(L,t) = 0$.



La distribución de temperaturas a lo largo del tiempo en una varilla delgada (que podemos suponer unidimensional) viene regida por la **ecuación del calor** $u_t - k\,u_{xx} = 0$, donde $u(x,t)$ es la temperatura del punto x en el instante t y $k>0$ es una constante que mide la capacidad de conducir calor de la varilla. Si hay fuentes de calor en el interior de la varilla aparecerá una $F(x,t)$ en el segundo miembro de la ecuación. A diferencia de la de ondas, aquí basta conocer sólo la distribución inicial de temperaturas $u(x,0)$ (junto con las condiciones de contorno, que pueden ser de varios tipos) para precisar la solución.

Además de otras situaciones físicas, la **ecuación de Laplace** $u_{xx} + u_{yy} = 0$ puede describir la distribución estacionaria de temperaturas en una placa bidimensional o la posición de equilibrio de una membrana. La existencia de fuentes de calor en el interior o de fuerzas actuando sobre la membrana daría una F en el segundo miembro. Frente a las EDPs anteriores que describían la evolución de un sistema a lo largo del tiempo, ésta describe situaciones estacionarias y las condiciones que se le imponen a ella serán siempre de contorno.

4.1. EDPs lineales de primer orden

Sea la EDP: [E] $\boxed{A(x,y)\,u_y+B(x,y)\,u_x=H(x,y)\,u+F(x,y)}$, $u=u(x,y)$.

Para resolverla usaremos la EDO de primer orden [e] $\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{A(x,y)}{B(x,y)}}$ **ecuación característica**

A las soluciones $\boxed{\xi(x,y)=K}$ de (e) se les llama **curvas características** de [E].

Por la regla de la cadena, el **cambio de variable** $\begin{cases}\xi=\xi(x,y)\\ \eta=y \quad \text{(o bien } \eta=x \text{)}\end{cases}$, lleva [E] a:

$$\begin{cases} u_y=u_\xi\ \xi_y+u_\eta\\ u_x=u_\xi\ \xi_x\end{cases} \to \ Au_\eta+[A\xi_y+B\xi_x]u_\xi=Hu+F$$

Sobre las soluciones $y(x)$ dadas por $\xi(x,y)=K$ es $\xi_x+\xi_y\frac{dy}{dx}=\frac{1}{B}[A\xi_y+B\xi_x]=0$, y [1] pasa a ser una ecuación en las nuevas variables (ξ,η) en la que no aparece u_ξ :

$$[\mathrm{E}^*]\ \boxed{A(\xi,\eta)\,u_\eta=H(\xi,\eta)\,u+F(\xi,\eta)}\,,\ u=u(\xi,\eta)\,.$$

Si se escoge $\eta=x$ se llega a: [E$_*$] $\boxed{Bu_\eta=Hu+F}$ (tras el cambio **queda el término con la variable elegida**).

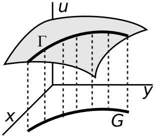
[E*] (o [E$_*$]) es una **EDO lineal de primer orden resoluble** en la variable η viendo la ξ como constante (**si** $F=0$ **sería homogénea** y **si** $H=0$ **bastaría integrar**). En su solución hay una constante arbitraria para cada ξ , o sea, una función arbitraria de ξ :

$$u(\xi,\eta)=p(\xi)\,\mathrm{e}^{\int\frac{H}{A}d\eta}+\mathrm{e}^{\int\frac{H}{A}d\eta}\int\frac{F}{A}\,\mathrm{e}^{-\int\frac{H}{A}d\eta}\,d\eta\,,\quad \text{con } p \text{ arbitraria de } C^1.$$

Deshaciendo el cambio se obtiene la solución general de [E] en función de x e y .

Se ve que esta solución siempre **contiene una función arbitraria** p **de las características**.

Imponiendo datos y un primer ejemplo



¿Cómo determinar una **única solución** de [E]?, es decir, ¿cómo precisar la p arbitraria? Cada solución describe una superficie en el espacio. Generalizando los problemas con datos iniciales para EDOs se plantea el **problema de Cauchy** para [E]; hallar la solución $u(x,y)$ que tome valores dados sobre una curva G del plano xy, es decir, que contenga una curva dada Γ del espacio. En particular, si G es una recta $x = cte$ o $y = cte$ $\big[$por ejemplo, si es $u(x,0) = f(x)$ $\big]$, se tiene el llamado **problema de valores iniciales**.

Ej 1. $\boxed{\begin{array}{l} (y-1)u_y - xu_x = 2x^2y \\ u(x,0) = 0 \end{array}}$ La ecuación característica $\frac{dy}{dx} = \frac{y-1}{-x}$ se puede ver como lineal:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} + \frac{1}{x} \ . \ \mathrm{e}^{-\int 1/x} = \frac{1}{x} \ , \ y = \frac{C}{x} + \frac{1}{x}\int \frac{x}{x}dx = \frac{C}{x} + 1 \ \text{(o } y_p = 1 \text{ a ojo).}$$

O separable: $\int \frac{dy}{y-1} = \ln(y-1) = \int \frac{dx}{-x} = C - \ln x$, $y-1 = C\mathrm{e}^{-\ln x} = \frac{C}{x}$, $xy - x = C$ **características**.

Más cortos resultan los cálculos haciendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = x\,(y-1) \\ \eta = x \end{array} \right. \to \left\{ \begin{array}{l} u_y = x\,u_\xi \\ u_x = (y-1)u_\xi + u_\eta \end{array} \right. \longrightarrow -xu_\eta = 2x^2y \ , \ u_\eta = -2xy = -2\eta\left(\frac{\xi}{\eta} + 1\right) = -2\xi - 2\eta \ .$$

Integrando: $u = -2\xi\eta - \eta^2 + p(\xi)$. La **solución general** es: $u(x,y) = x^2 - 2x^2y \underset{\uparrow}{+} p(xy-x)$.

$$\left[\text{Peor: } \left\{ \begin{array}{l} \xi = x\,(y-1) \\ \eta = y \end{array} \right. , \ \left\{ \begin{array}{l} u_y = x\,u_\xi + u_\eta \\ u_x = (y-1)u_x \end{array} \right. \to \ u_\eta = \xi^2 \frac{2\eta}{(\eta-1)^3} \ , \ u = -\xi^2\left[\frac{1}{(\eta-1)^2} + \frac{2}{\eta-1}\right] + p(\xi) \right].$$

Ahora el **dato inicial**: $u(x,0) = x^2 + p(-x) = 0$, $p(-x) = -x^2$. Para precisar la p llamamos

$$-x = v \ \to \ x = -v \ \to \ p(v) = -v^2 \ \to \ u(x,y) = x^2 - 2x^2y - x^2y^2 + 2x^2y - x^2 = -x^2y^2 \ .$$

Más ejemplos de primer orden

Ej 2. $\boxed{\begin{array}{l} u_y+2u_x=u-x+2y \\ u(x,x)=1-x \end{array}}$ $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}$, $2y=x+C$. $x-2y=C$ características $\big[$o $2y-x=C$, o $y-\frac{x}{2}=C$, todas pueden valer$\big]$.

$\begin{cases}\xi=x-2y\\ \eta=y\end{cases}$, $\begin{cases}u_y=-2u_\xi+u_\eta\\ u_x=u_\xi\end{cases}$, $u_\eta=u-\xi \to u=p(\xi)\,e^{\eta}+\underset{u_p \text{ a ojo}}{\xi}$. $\underset{\text{solución general}}{u(x,y)=p\big(x-2y\big)\,e^{y}+x-2y}$.

O bien: $\begin{cases}\xi=x-2y\\ \eta=x\end{cases}$, $\begin{cases}u_y=-2u_\xi\\ u_x=u_\xi+u_\eta\end{cases}$, $u_\eta=\frac{u-\xi}{2} \to u=q(\xi)\,e^{\eta/2}+\xi=q\big(x-2y\big)\,e^{x/2}+x-2y$.

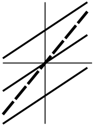
casi como antes.

Imponemos el dato: $u(x,x)=p(-x)\,e^{x}-x=1-x$, $p(-x)=e^{-x}$, $p(v)=e^{v}$

$\to u(x,y)=e^{x-2y}e^{y}+x-2y=e^{x-y}+x-2y$ (parecido con la q).

Comprobamos que cumple el dato: $u(x,x)=1+x-2x$.

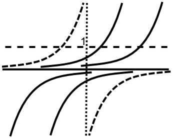
Y la ecuación: $u_y=-e^{x-y}-2$, $u_x=e^{x-y}+1$, $e^{x-y}=e^{x-y}+x-2y-x+2y$.



No siempre los datos de Cauchy (como en los ejemplos vistos hasta ahora) determinan una sola solución de la ecuación. En el siguiente ejemplo veremos que **no hay solución o no es única si la curva G donde imponemos datos es una de las características**.

[Hay problemas sutiles de unicidad si G y las características son tangentes y se prueba que si G no es tangente nunca a las características hay solución única del problema. En el ejemplo 2 de arriba se ve que no hay tangencia y sabríamos que tiene solución única antes de resolverlo].

Ejemplo con problemas de unicidad



Ej 4. $\boxed{y^2u_y+u_x=2xu}$ $\frac{dy}{dx}=y^2$ (separable), $\frac{1}{y}=K-x$, $x+\frac{1}{y}=K$ características.

$$\begin{cases}\xi=x+\frac{1}{y}\\ \eta=x\end{cases} \to u_\eta=2xu=2\eta u \to u=p(\xi)\,\mathrm{e}^{\eta^2}=p\big(x+\tfrac{1}{y}\big)\,\mathrm{e}^{x^2},\ p\in C^1.$$

[Bastante más largo escogiendo $\eta=y$].

Impongamos varios datos de Cauchy a la ecuación y veamos qué pasa:

$$\boxed{u(x,1)=1} \to p(x+1)\,\mathrm{e}^{x^2}=1 \xrightarrow{x+1=v} p(v)=\mathrm{e}^{-(v-1)^2} \to u=\mathrm{e}^{x^2-(x+\frac{1}{y}-1)^2}=\mathrm{e}^{2x-\frac{2x}{y}+\frac{2}{y}-\frac{1}{y^2}-1}.$$

Estos cálculos han precisado de forma **única** la solución del problema de valores iniciales.

$\boxed{u(0,y)=y} \to p\big(\frac{1}{y}\big)=y \xrightarrow{1/y=v} p(v)=\frac{1}{v} \to u=\frac{y}{1+xy}\,\mathrm{e}^{x^2}$, que también parece ser **única**.

[Ninguna de las dos rectas $y=1$ o $x=0$ era tangente a ninguna característica].

$\boxed{u(x,-\frac{1}{x})=0}$ y $\boxed{u(x,-\frac{1}{x})=1}$. Ahora estamos imponiendo datos sobre una característica.

Para el primero: $p(0)\,\mathrm{e}^{x^2}=0$. Lo cumple toda $p\in C^1$ con $p(0)=0$. **Infinitas soluciones**.

Para el segundo: $p(0)\,\mathrm{e}^{x^2}=1$, $p(0)=\mathrm{e}^{-x^2}$. Imposible. **No tiene solución**.

Datos sobre característica dan lugar siempre a 0 **o** ∞ **soluciones** $\left[\begin{array}{c}\text{se acaba en } p(\text{cte})=\text{algo ,}\\ \text{que puede ser constante o no}\end{array}\right]$.

[Hay dos ejemplos más en los apuntes].

4.2. Clasificación de las EDPs de segundo orden

Consideremos [E] $L[u] \equiv \boxed{A\,u_{yy} + B\,u_{xy} + C\,u_{xx} + D\,u_y + E\,u_x + H\,u = F(x,y)}$,

con A, B, …, H constantes (A, B y C no todas nulas). Como en las de primer orden, quizás un buen **cambio de variable** mate términos de [E], de forma que resulte una ecuación resoluble.

$$\begin{cases} \xi = px+qy \\ \eta = rx+sy \end{cases} \rightarrow \quad \begin{array}{l} u_y = qu_\xi + su_\eta \\ u_x = pu_\xi + ru_\eta \end{array} , \quad \begin{array}{l} u_{yy} = q^2u_{\xi\xi} + 2qsu_{\xi\eta} + s^2u_{\eta\eta} \\ u_{xy} = pqu_{\xi\xi} + (ps+qr)u_{\xi\eta} + rsu_{\eta\eta} \\ u_{xx} = p^2u_{\xi\xi} + 2pru_{\xi\eta} + r^2u_{\eta\eta} \end{array} \rightarrow$$

$$\begin{aligned} &\left[q^2A+pqB+p^2C\right]u_{\xi\xi}+\left[2qsA+(ps+qr)B+2prC\right]u_{\xi\eta}+\left[s^2A+rsB+r^2C\right]u_{\eta\eta}+\cdots \\ &\qquad = A^*u_{\xi\xi}+B^*u_{\xi\eta}+C^*u_{\eta\eta}+\cdots = F(\xi,\eta) \end{aligned}$$

[los puntos son los términos en u_ξ , u_η y u].

Intentemos hacer $A^*=C^*=0$ eligiendo p,q,r,s adecuados. Debe ser: $\begin{array}{c} q^2A+pqB+p^2C=0 \\ s^2A+rsB+r^2C=0 \end{array}$.

Si $B^2-4AC>0$ y $A\neq 0$ podemos elegir $p=r=1$ y $q,s=\frac{1}{2A}\left[-B\mp\sqrt{B^2-4AC}\,\right]$.

Si $B^2-4AC=0$, q y s coinciden y sería $J=0$. Y si es <0 , q y s serían complejas.

Se ve que el signo de B^2-4AC no varía haciendo cambios de coordenadas. Todo lleva a definir:

Si $B^2-4AC \begin{array}{l} >0 \\ =0 \\ <0 \end{array}$ se dice, respectivamente, que la EDP [E] es **hiperbólica** / **parabólica** / **elíptica**

Encontremos la forma más sencilla en que podemos escribir [E] (**forma canónica**) en cada caso.

Forma canónica en cada caso y primer ejemplo

Si es **hiperbólica**, en la página anterior hemos visto que se convierte con el cambio

$$\boxed{\begin{cases} \xi = x - \frac{B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}\, y \\ \eta = x - \frac{B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}\, y \end{cases}}$$

en $B^* u_{\xi\eta} + \cdots = F$. Como $(B^*)^2 > 0$, podemos escribir la **forma canónica** de las **hiperbólicas**: $\boxed{u_{\xi\eta} + \cdots = F^*(\xi,\eta)}$.

Las familias de rectas $\xi = K$, $\eta = K$ son las **características** de [E].

Si [E] es **parabólica**, sólo tenemos $\xi = x - \frac{B}{2A} = K$ [**una** familia de características]. Para esta ξ es $A^* = 0 \rightarrow B^* = 0$, pues $(B^*)^2 - 4A^*C^* = 0$. Como η se suele tomar $\eta = y$. Así haciendo

$$\boxed{\begin{cases} \xi = x - \frac{B}{2A}\, y \\ \eta = y \end{cases}}$$

y dividiendo por C^* se obtiene la **forma canónica** de las **parabólicas**: $\boxed{u_{\eta\eta} + \cdots = F^*(\xi,\eta)}$.

Si es **elíptica**, las ξ, η son complejas: $\frac{2Ax-By}{2A} \pm \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{4AC-B^2}}{2A}\, y$ (no hay características reales).

Pero se ve que $\boxed{\begin{cases} \xi = \frac{2Ax-By}{\sqrt{4AC-B^2}} \\ \eta = y \end{cases}}$ lleva [E] a la **forma canónica** de las **elípticas**:

$$\boxed{u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \cdots = F^*(\xi,\eta)}\,.$$

Ej 1. $\boxed{u_{yy} - 4u_{xy} + 5u_{xx} + u = 0}$ $B^2 - 4AC = -4 < 0$, elíptica. Con el cambio de arriba:

$$\begin{cases} \xi = x + 2y \\ \eta = y \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} u_y = 2u_\xi + u_\eta \\ u_x = u_\xi \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} u_{yy} = 4u_{\xi\xi} + 4u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \\ u_{xy} = 2u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta} \\ u_{xx} = u_{\xi\xi} \end{array}$$

Llevándolo a la ecuación se llega a la forma canónica: $\boxed{u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + u = 0}$.

Otro ejemplo y **formas canónicas resolubles**

Ej 2. $\boxed{4u_{yy}-4u_{xy}+u_{xx}=0} \rightarrow B^2-4AC=0 \rightarrow$ parabólica.

El cambio en este caso sería aquí $\xi = x+\frac{y}{2}$, o mejor (son las mismas características):

$$\begin{cases}\xi=2x+y\\ \eta=y\end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} u_y=u_\xi+u_\eta\\ u_x=2u_\xi\end{array} \rightarrow \begin{array}{l} u_{yy}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\\ u_{xy}=2u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}\\ u_{xx}=4u_{\xi\xi}\end{array} \rightarrow 4u_{\eta\eta}=0\,,\ \boxed{u_{\eta\eta}=0}\,,$$

fácil de resolver: $u_\eta=p(\xi)$, $u=\eta\,p(\xi)+q(\xi)$. La **solución general** de la EDP es:

$$\boxed{u(x,y)=y\,p(2x+y)+q(2x+y)}\,,\ \text{con } p \text{ y } q \text{ funciones } C^2 \text{ arbitrarias.}$$

Como en este caso, a veces es posible hallar elementalmente la **solución general** de [E] tras ponerla en forma canónica (en la mayoría, como en el ejemplo 1, será imposible).

Si sólo hay derivadas respecto a una de las variables: $\boxed{u_{\eta\eta}+E^*u_\eta+H^*u=F^*}$.

Esta lineal de orden 2 en η, se integra viendo la ξ como constante. Un par de constantes para cada ξ dan lugar a dos funciones arbitrarias de ξ en la solución. La ecuación es parabólica.

Si sólo aparece $u_{\xi\eta}$ y una derivada primera: $\boxed{u_{\xi\eta}+D^*u_\xi=F^*}$ o $\boxed{u_{\xi\eta}+E^*u_\eta=F^*}$.

La primera se resuelve haciendo $u_\xi=v$: la lineal $v_\eta+D^*v=F^*$ se resuelve viendo ξ como parámetro. La v contiene una función arbitraria de ξ. Al integrarla para hallar la u aparece otra arbitraria (de η). Es análogo si en vez de u_ξ aparece u_η. La ecuación es hiperbólica.

Ni la ecuación del calor u_t-u_{xx} ni ninguna elíptica son resolubles por este camino.

[En las EDOs de segundo orden había dos constantes arbitrarias, aquí dos funciones arbitrarias. Para aislar una única solución de la ecuación se deberán imponer dos funciones dato].

Otro ejemplo y el **problema de Cauchy**

Ej 3. $\boxed{u_{yy}+5u_{xy}+4u_{xx}+3u_y+3u_x=9}$ $\rightarrow$ $B^2-4AC=9$, hiperbólica.

$$\frac{B\mp\sqrt{B^2-4AC}}{2A}=\begin{matrix}1\\4\end{matrix}\rightarrow\begin{cases}\xi=x-y\\ \eta=x-4y\end{cases}\rightarrow\begin{matrix}u_y=-u_\xi-4u_\eta\\ u_x=u_\xi+u_\eta\end{matrix}\ ,\ \begin{matrix}u_{yy}=u_{\xi\xi}+8u_{\xi\eta}+16u_{\eta\eta}\\ u_{xy}=-u_{\xi\xi}-5u_{\xi\eta}-4u_{\eta\eta}\\ u_{xx}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\end{matrix}$$

Sustituyendo en la EDP se llega a: $u_{\xi\eta}+u_\eta=-1$, del segundo de los tipos citados.

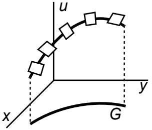
$$u_\eta=v\rightarrow v_\xi=-v-1\ ,\ v=p^*(\eta)\,\mathrm{e}^{-\xi}-1\rightarrow u(\xi,\eta)=p(\eta)\,\mathrm{e}^{-\xi}+q(\xi)-\eta$$

La solución general es: $\boxed{u(x,y)=p(x-4y)\,\mathrm{e}^{y-x}+q(x-y)+4y-x}$, p, q arbitrarias.

[La ecuación similar $u_{yy}+5u_{xy}+4u_{xx}+3u_x=9\rightarrow u_{\xi\eta}-\frac{1}{3}u_\eta-\frac{1}{3}u_\xi=-1$, no es resoluble].

¿Qué datos pedir a la [E] $L[u]=F$ de orden 2 para aislar una única solución? Para una EDO de orden 2 se daba el valor inicial de la solución y de su derivada. En una EDP de primer orden se daba el valor de u en toda una curva G (no característica). Cuando [E] era resoluble había dos funciones arbitrarias en la solución. Todo lleva a plantear el **Problema de Cauchy**:

Hallar la solución que tome unos valores dados de u y la derivada $u_{\mathbf{n}}$ en la dirección del **n** normal sobre una curva G del plano xy.



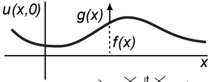
[Geométricamente: hallar la solución que contenga una curva dada y tenga unos planos tangentes dados. La $u_{\mathbf{n}}$ será casi siempre la u_x o la u_y].

Cuando G es el eje x se tiene el **problema de valores iniciales**: hallar la solución que cumple $u(x,0)=f(x)$, $u_y(x,0)=g(x)$. Y ocurre como en las de primer orden:

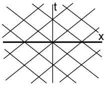
Teor. Si los datos f y g son derivables y el eje x no es una recta característica de la EDP, el problema de valores iniciales tiene solución única.

Ondas. D'Alembert. La cuerda finita

La de ondas es la única de las clásicas resoluble a partir de su forma canónica. Para la **cuerda infinita** es un problema bien planteado este problema de Cauchy:



problema puro de valores iniciales:
$$\boxed{\begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=F(x,t)\ ,\ x,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=f(x)\ ,\ u_t(x,0)=g(x)\end{cases}}$$



$B^2-4AC=4c^2$, hiperbólica. Características $x\pm ct=K$. El teorema dice que hay solución única (y hay dependencia continua). La resolvemos para $F\equiv 0$:

$$\begin{cases}\xi=x+ct\\ \eta=x-ct\end{cases},\ \begin{cases}u_{xx}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\\ u_{tt}=c^2[u_{\xi\xi}-2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}]\end{cases},\ -4c^2u_{\xi\eta}=0\,,\ \boxed{u_{\xi\eta}=0}$$ forma canónica →

$u_\xi=p^*(\xi)\ ,\ u=p(\xi)+q(\eta)$. La **solución general de la ecuación de ondas homogénea** es:

$$\boxed{u(x,t)=p(x+ct)+q(x-ct)}\ ,$$ con p y q funciones arbitrarias de C^2.

Imponiendo los datos: $\begin{cases}p(x)+q(x)=f(x)\\ cp'(x)-cq'(x)=g(x)\end{cases}\to\begin{cases}p'(x)+q'(x)=f'(x)\\ p'(x)-q'(x)=\frac{1}{c}g(x)\end{cases}$ p' y q' son las mismas derivadas ordinarias en ambas expresiones. ⟶

$$2p'(x)=f'(x)+\tfrac{1}{c}g(x)\ ,\ p(x)=\tfrac{1}{2}f(x)+\tfrac{1}{2c}\int_0^x g(s)\,ds+k\ ,\ q(x)=\tfrac{1}{2}f(x)-\tfrac{1}{2c}\int_0^x g(s)\,ds-k$$

$$\to\ \boxed{u(x,t)=\tfrac{1}{2}\big[f(x+ct)+f(x-ct)\big]+\tfrac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(s)\,ds}$$ **fórmula de D'Alembert**

Para la **cuerda finita** tiene solución única:
$$\boxed{\begin{cases}u_{tt}-c^2u_{xx}=F(x,t)\ ,\ x\in[0,L],t\in\mathbf{R}\\ u(x,0)=f(x)\ ,\ u_t(x,0)=g(x)\\ u(0,t)=h_0(t)\ ,\ u(L,t)=h_L(t)\end{cases}}$$ (Se trata en 4.4).

Sus extremos se mueven verticalmente según $h_0(t)$ y $h_L(t)$ [caso particular importante es que estén fijos $u(0,t)=u(L,t)=0$]. **Siempre que hay extremos hay condiciones de contorno**.

Problemas para la pizarra (2-5 de noviembre)

2. Hallar sus características y, con la regla de la cadena, escribirla en las variables (ξ,η), calcular su solución general y la única que satisface el dato que se indica:

a)(e21) $\begin{array}{l} yu_y - xu_x = xy^2 \\ u(x,2)=0 \end{array}$ b)(dc19) $\begin{array}{l} u_y - u_x = 2(x+y)u \\ u(x,x)=1 \end{array}$ c) $\begin{array}{l} u_y + u_x = u+x \\ u(x,0)=-x \end{array}$

3. Sea $2yu_y+xu_x = 4x^2y$. Hallar su solución general y la única que satisface $u(-2,y)=3y$. Precisar cuántas soluciones cumplen: i) $u\big(x,x^2\big)=0$, ii) $u\big(x,x^2\big)=x^4$.

4. Sea $(2x-y)u_y + xu_x = yu$. Resolver $\frac{dy}{dx}=\frac{2x-y}{x}$. **b]** Hallar la solución general y la única que cumple $u(1,y)=1$. Escribir 2 soluciones distintas que satisfagan $u(x,x)=\mathrm{e}^x$.

1*(c2n19). Escribir $u_{yy}-u_{xx}-2u_y+2u_x=4$ en forma canónica y hallar su solución general.

7. **a]** Hallar la solución general $y(x)$ de la EDO $y''+y=3$.
b] Escribir la EDP $u_{yy}-2u_{xy}+u_{xx}+u=x+y$ en forma canónica y calcular su solución general.
(nuevo) Hallar la que cumple los datos iniciales $u(x,0)=u_y(x,0)=0$.

8. Dar la solución general de la ecuación de ondas $u_{tt}-4u_{xx}=4$, $x,t\in\mathbf{R}$. Hallar, a partir de ella y usando algún otro camino, la solución que cumple $u(x,0)=u_t(x,0)=0$.

soluciones problemas pizarra (2N)

2. a) $\boxed{yu_y-xu_x=xy^2}$ $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}\,,\ y=C\mathrm{e}^{-\ln x}=\frac{C}{x}\,,\ \boxed{xy=C}$. Características.

$$\begin{cases}\xi=xy\\ \eta=y\end{cases}\to\begin{cases}u_y=xu_\xi+u_\eta\\ u_x=yu_\xi\end{cases},\ u_\eta=xy=\xi\,,\ u=p(\xi)+\xi\,\eta=\boxed{p(xy)+xy^2}\,.$$

Peor: $\begin{cases}\xi=xy\\ \eta=x\end{cases}\to\begin{cases}u_y=xu_\xi\\ u_x=yu_\xi+u_\eta\end{cases}\to\ u_\eta=-y^2=-\frac{\xi^2}{\eta^2}\,,\ u=p(\xi)+\frac{\xi^2}{\eta}=p(xy)+xy^2\,.$

Con el dato: $u(x,2)=p(2x)+4x=0\to p(v)=-2v,\ \ u(x,y)=xy^2-2xy=\boxed{xy(y-2)}\,.$

b) $\boxed{u_y-u_x=2(x+y)u}$ $\underset{\text{características}}{\frac{dy}{dx}=-1\,,\ y+x=C\,.}$ $\begin{cases}\xi=y+x\\ \eta=y\end{cases}\to\begin{cases}u_y=u_\xi+u_\eta\\ u_x=u_\xi\end{cases},\ u_\eta=2\xi u\,,\ u=p(\xi)\,\mathrm{e}^{2\xi\eta}\,,$

$u(x,y)=p(y+x)\,\mathrm{e}^{2y^2+2xy}.$

O bien: $\begin{cases}\xi=y+x\\ \eta=x\end{cases}\to\begin{cases}u_y=u_\xi\\ u_x=u_\xi+u_\eta\end{cases}\to-u_\eta=2\xi u\,,\ u=q(\xi)\,\mathrm{e}^{-2\xi\eta}=q(y+x)\,\mathrm{e}^{-2xy-2x^2}.$

Con el dato: $u(x,x)=p(2x)\,\mathrm{e}^{4x^2}=1\to p(v)=\mathrm{e}^{-v^2},\ u(x,y)=\mathrm{e}^{2y^2+2xy-y^2-2xy-x^2}=\boxed{\mathrm{e}^{y^2-x^2}}\,.$

O bien: $u(x,x)=q(2x)\,\mathrm{e}^{-4x^2}=1\to p(v)=\mathrm{e}^{v^2},\ u(x,y)=\mathrm{e}^{y^2+2xy+x^2-2xy-2x^2}\nearrow$

c) $\boxed{u_y+u_x=u+x}$ $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1}\ \to\ y-x=C\,.$ Más corto: $\begin{cases}\xi=y-x\\ \eta=x\end{cases}\to\begin{cases}u_y=u_\xi\\ u_x=-u_\xi+u_\eta\end{cases}\to$

$u_\eta=u+x=u+\eta\,.\ \ u=p(\xi)\mathrm{e}^\eta+\mathrm{e}^\eta\int\mathrm{e}^{-\eta}\eta\,d\eta=p(\xi)\,\mathrm{e}^\eta-\eta-1\,,\ \boxed{u(x,y)=p(y-x)\,\mathrm{e}^x-x-1}\,.$

[o probando $u_p=A\eta+B$].

$\Big[$O bien: $\begin{cases}\xi=y-x\\ \eta=y\end{cases},\ \begin{cases}u_y=u_\xi+u_\eta\\ u_x=-u_\xi\end{cases}\to\ u_\eta=u+x=u+\eta-\xi\,.\ u=p(\xi)\,\mathrm{e}^\eta+\xi\overset{||}{-}\eta-1\Big].$

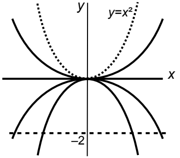
Dato inicial: $u(x,0)=p(-x)\,\mathrm{e}^x-x-1=-x\,,\ p(-x)=\mathrm{e}^{-x},\ p(v)=\mathrm{e}^v\,,\ \boxed{u(x,y)=\mathrm{e}^y-x-1}\,.$

$\Big[$Comprobamos: $u(x,0)=-x$, y además: $u_y+u_x=\mathrm{e}^y-1=\mathrm{e}^y-x-1+x=u+x\Big].$

más soluciones de EDPs de primer orden

3. $\boxed{2yu_y+xu_x=4x^2y}$ $\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x}\rightarrow y=C\,\mathrm{e}^{\int(2/x)}=Cx^2$. $\left\{\begin{array}{l}\xi=yx^{-2}\\ \eta=y\end{array}\right.\rightarrow\left\{\begin{array}{l}u_y=x^{-2}u_\xi+u_\eta\\ u_x=-2yx^{-3}u_\xi\end{array}\right.\rightarrow$

$2yu_\eta=4x^2y$, $u_\eta=2x^2=\frac{2\eta}{\xi}$, $u=\frac{\eta^2}{\xi}+p(\xi)$. $\boxed{u(x,y)=x^2y+p\big(\frac{y}{x^2}\big)}$



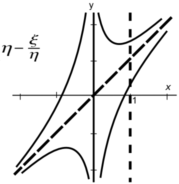
O bien $\left\{\begin{array}{l}\xi=yx^{-2}\\ \eta=x\end{array}\right.$, $u_\eta=4xy=4\xi\eta^3\rightarrow u=\xi\eta^4+p(\xi)=x^2y+p\big(\frac{y}{x^2}\big)$.

Dato: $4y+p\big(\frac{y}{4}\big)=3y$, $p\big(\frac{y}{4}\big)=-y$, $p(v)=-4v$, $\boxed{u(x,y)=x^2y-\frac{4y}{x^2}}$.

[Solución única pues $x=-2$ no tangente a las características].

Imponiendo $u(x,x^2)=x^4+p(1)=0$ no habría solución y con $u(x,x^2)=x^4$ habría infinitas].

4. a] $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}+2\rightarrow y=\frac{C}{x}+\frac{1}{x}\int 2x\,dx=\frac{C}{x}+x$, $x(y-x)=C$.



b] $\boxed{(2x-y)u_y+xu_x=yu}$. $\left\{\begin{array}{l}\xi=xy-x^2\\ \eta=x\end{array}\right.$, $u_\eta=\frac{y}{x}u=\big(1+\frac{\xi}{\eta^2}\big)u$, $u=p(\xi)\,\mathrm{e}^{\eta-\frac{\xi}{\eta}}$

$u=p(xy-x^2)\,\mathrm{e}^{2x-y}$. $u(1,y)=p(y-1)\,\mathrm{e}^{2-y}=1$, $p(v)=\mathrm{e}^{v-1}$,

$\boxed{u(x,y)=\mathrm{e}^{xy-x^2+2x-y-1}=\mathrm{e}^{(x-1)(y-x+1)}}$ [Única por no ser tangente $x=1$ a las características].

$\Big[$Bastante más largo haciendo $\left\{\begin{array}{l}\xi=xy-x^2\\ \eta=y\end{array}\right.$ $\dots\Big]$

Comprobando: $u(1,y)=\mathrm{e}^0$. $u_y=(x-1)\,\mathrm{e}^{\cdot\cdot}$, $u_x=(y-2x+2)\,\mathrm{e}^{\cdot\cdot}$, $(2x^2-2x-xy+y+xy-2x^2+2x)\,\mathrm{e}^{\cdot\cdot}=y\,\mathrm{e}^{\cdot\cdot}$.

c] $u(x,x)=p(0)\,\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x\rightarrow p(0)=1$. Cada p derivable que lo cumpla nos da una solución.
Hay infinitas soluciones (es dato sobre una característica).
Por ejemplo, tomando $p(v)\equiv 1$ y $p(v)=\mathrm{e}^v$ aparecen $u=\mathrm{e}^{2x-y}$ y $u=\mathrm{e}^{xy-x^2+2x-y}$.

más soluciones pizarra (3-5N)

1*. $u_{yy}-u_{xx}-2u_y+2u_x=4$. $\underset{\text{hiperbólica}}{B^2-4AC=0}$ $\begin{cases}\xi=x+y\\ \eta=x-y\end{cases}\to\begin{cases}u_y=u_\xi-u_\eta\\ u_x=u_\xi+u_\eta\end{cases},\ \begin{cases}u_{yy}=u_{\xi\xi}-2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\\ u_{xx}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\end{cases}$

$\to\ \underset{\text{forma canónica}}{\boxed{u_{\xi\eta}-u_\eta=-1}}$. $u_\eta=v\to v_\xi=v-1$, $v=p^*(\eta)\,e^\xi+1\to u=p(\eta)\,e^\xi+q(\xi)+\eta$,

$\boxed{u(x,y)=p(x-y)\,e^{x+y}+q(x+y)+x-y}$ solución general

7. a] $\boxed{y''+y=3}$. $\mu=\pm i$. $y_p=3$ a ojo ($y_p=A\to A=3$). $\boxed{y=c_1\cos x+c_2\,\text{sen}\,x+3}$.

b] $\boxed{u_{yy}-2u_{xy}+u_{xx}+u=x+y}$ $\underset{\text{parabólica}}{B^2-4AC=0}$ $\begin{cases}\xi=x+y\\ \eta=y\end{cases}\to\begin{cases}u_y=u_\xi+u_\eta\\ u_x=u_\xi\end{cases},\ \begin{cases}u_{yy}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\\ u_{xy}=u_{\xi\xi}+u_{\xi\eta}\\ u_{xx}=u_{\xi\xi}\end{cases}$

$\to\ u_{\eta\eta}+u=x+y$, $\boxed{u_{\eta\eta}+u=\xi}$ forma canónica . $\mu=\pm i$, $u_p=\xi\ \to$

$u=p(\xi)\cos\eta+q(\xi)\,\text{sen}\,\eta+\xi=\boxed{p(x+y)\cos y+q(x+y)\,\text{sen}\,y+x+y}$ solución general

$\begin{cases}u(x,0)=p(x)+x=0\to p(x)=-x\downarrow\\ u_y(x,0)=p'(x)+q(x)+1=0\quad q(x)=0\end{cases}\to\ \boxed{u(x,y)=(x+y)(1-\cos y)}$.

8. $\boxed{u_{tt}-4u_{xx}=4}$ Ondas: $\begin{cases}\xi=x+2t\\ \eta=x-2t\end{cases},\ \begin{cases}u_{xx}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\\ u_{tt}=4u_{\xi\xi}-8u_{\xi\eta}+4u_{\eta\eta}\end{cases},\ \boxed{u_{\xi\eta}=-\frac{1}{4}}$ **forma canónica**

$u_\xi=-\frac{\eta}{4}+p^*(\xi)$, $u=-\frac{\xi\eta}{4}+p(\xi)+q(\eta)$, $u=t^2-\frac{1}{4}x^2+p(x+2t)+q(x-2t)$, $u_t=2t+2p'-2q'$

$\xrightarrow{d.i.}\begin{cases}u(x,0)=-x^2/4+p(x)+q(x)=0\\ u_t(x,0)=2p'(x)-2q'(x)=0\to p(x)=q(x)\end{cases}\nearrow\ p(x)=q(x)=\frac{x^2}{8}\xrightarrow{\cdots}\boxed{u=2t^2}$.

Más corto es hallar una solución de la EDP: $v=2t^2$. Con $w=u-v$ se convierte en la fácil:

$\begin{cases}w_{tt}-w_{xx}=0\\ w(x,0)=w_t(x,0)=0\end{cases}$ (casualidad que sea tan sencilla) $\to\ w=0\ \to\ u=w+v=2t^2$.

O D'Alembert no homogénea: $u(x,t)=\frac{1}{4}\int_0^t\int_{x-2[t-\tau]}^{x+2[t-\tau]}4\,ds\,d\tau=\int_0^t 4[t-\tau]\,d\tau=\boxed{2t^2}$.