# 4.3. Buenos problemas para la ecuación del calor

El problema de Cauchy no es adecuado a toda las EDPs. En la realidad salen condiciones mucho más variadas: iniciales y de contorno a la vez, o sólo de contorno... Conozcamos los principales problemas para el **calor** en dos variables. [Los de Laplace se describen en la sección 4.5]. Para cada uno habría que probar que tiene solución única y dependencia continua.

Para la **varilla infinita** el buen problema es: $\boxed{(\mathrm{P}_1) \begin{cases} u_t - k u_{xx} = F(x,t)\ ,\ x\in\mathbf{R}\ ,\ t>0 \\ u(x,0)=f(x)\ ,\ u \text{ acotada} \end{cases}}$ .

Basta un solo dato, la distribución inicial de temperaturas $f(x)$, para fijar las posteriores $\big[\, t=0$ es una característica y (P) no es un problema de valores iniciales típico$\big]$. Este problema se resuelve usando la transformada de Fourier.

Para la **varilla acotada** hay varias condiciones de contorno, con diferentes significados físicos. Si los extremos toman a lo largo del tiempo las **temperaturas dadas** $h_0(t)$ y $h_L(t)$ se tiene:

$$\boxed{(\mathrm{P}_2) \begin{cases} u_t - k u_{xx} = F(x,t)\ ,\ x\in(0,L),\ t>0 \\ u(x,0)=f(x)\ ,\ u(0,t)=h_0(t)\ ,\ u(L,t)=h_L(t) \end{cases}}\ .$$

Si lo que fijamos es el **flujo de calor** en los extremos obtenemos:

$$\boxed{(\mathrm{P}_3) \begin{cases} u_t - k u_{xx} = F(x,t)\ ,\ x\in(0,L),\ t>0 \\ u(x,0)=f(x)\ ,\ u_x(0,t)=h_0(t), u_x(L,t)=h_L(t) \end{cases}}$$

[En particular, si $h_0(t)=h_L(t)=0$, los extremos están **aislados**].

Combinando $u$ y $u_x$ se expresa la **radiación libre** de calor hacia un medio a temperatura dada:

$$\boxed{u(0,t)-au_x(0,t)=h_0(t) \ \text{ó}\ u(L,t)+bu_x(L,t)=h_L(t)\text{, con } a,b>0}\ .$$

[Si el extremo $x=L$ está más (menos) caliente que $h_L$ irradia (chupa) calor pues $u_x=(h_L-u)/b<0\ (>0)$ y el calor viaja en sentido opuesto al gradiente de las temperaturas. Es análogo lo que ocurre en el otro extremo].

$(\mathrm{P}_2)$ ó $(\mathrm{P}_3)$ (y los otros 7 problemas que aparecen combinando los 3 tipos de condiciones) están bien planteados. En los apuntes está probada la **unicidad**.

# Separación de variables para ecuación del calor homogénea

Obtenemos la solución (en forma de **serie de Fourier**) de varios problemas en **varillas finitas**. Empezamos resolviendo un **problema homogéneo** (lo son ecuación y condiciones de contorno):

$$\boxed{[\mathrm{P}_1]\ \begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0\,,\ x\in(0,L),\ t>0 \\ u(x,0)=f(x)\,,\ u(0,t)=u(L,t)=0 \end{cases}} \quad \begin{matrix}[\text{edp}]\\ [\text{ci}],[\text{cc}]\end{matrix}$$

**Busquemos soluciones de la forma** $u(x,t)=X(x)\,T(t)$ . Debe ser entonces:

$$XT' - kX''T = 0\,,\ \text{es decir,}\quad \frac{X''}{X} = \frac{T'}{kT} = -\lambda \quad \Big(\text{mejor que } \frac{kX''}{X} = \frac{T'}{T} = \lambda\Big)\,,$$

pues un miembro es función de $x$ y el otro de $t$ y por eso deben ser iguales a una constante.

Así obtenemos una EDO para $X(x)$ y otra para $T(t)$ : [eX] $X''+\lambda X=0$ , [eT] $T'+\lambda kT=0$ .

El producto de una solución de [eX] por otra de [eT] será solución de la [edp] para cualquier valor de $\lambda$ . Pero nos interesan sólo las soluciones que satisfacen las condiciones de contorno:

$u(0,t)=X(0)\,T(t)=0 \;\Rightarrow\; X(0)=0$ (si fuese $T(t)\equiv 0$ obtendríamos $u\equiv 0$
$u(L,t)=X(L)\,T(t)=0 \;\Rightarrow\; X(L)=0$ y no se cumpliría la condición inicial). $\rightarrow$

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0)=X(L)=0 \end{cases} \rightarrow\ \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}\,,\ \underset{n=1,2,\ldots}{X_n} = \Big\{\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\Big\} \rightarrow\ T' = -\frac{kn^2\pi^2}{L^2}T\,,\ T_n = \Big\{e^{-kn^2\pi^2 t/L^2}\Big\}\,.$$

Hemos deducido que para cada $n$ son soluciones de [edp] cumpliendo [cc] las funciones $T_nX_n$ .

Si es buena la serie $\boxed{u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{-kn^2\pi^2 t/L^2} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}}$ también lo hará. Falta imponer la [ci]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} = f(x) \;\Rightarrow\; \boxed{c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx\,,\ n=1,2,\ldots}$$

**La serie con estos $c_n$ es la solución de** $[\mathrm{P}_1]$ .

Observemos que $u(x,t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0\ \ \forall x\in[0,L]$ (**la varilla tiende a ponerse a $0$ grados**, como era de esperar).

# Condiciones de contorno no homogéneas

Si las **condiciones de contorno son no homogéneas, comenzaremos haciéndolas $0$ hallando una $v$ que las satisfaga y realizando un cambio de variable $w=u-v$**. Por ejemplo, para:

$$\boxed{[\mathrm{P}_2]\ \begin{cases} u_t - ku_{xx}=0\,,\ x\in(0,L),\ t>0 \\ u(x,0)=f(x)\,,\ u(0,t)=T_0\,,\ u(L,t)=T_L \end{cases}}\ ,\ T_0\,,\ T_L \text{ constantes,}$$

las cumple $v(x)=\left[1-\frac{x}{L}\right]T_0+\frac{x}{L}T_L$ . Con $w=u-v$ , nuestro problema pasa a ser uno como el [P$_1$]:

$$\begin{cases} w_t-kw_{xx}=0 \\ w(x,0)=f(x)-v(x) \\ w(0,t)=w(L,t)=0 \end{cases} \rightarrow\ u(x,t)=\left[1-\tfrac{x}{L}\right]T_0+\tfrac{x}{L}T_L+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\,\mathrm{e}^{-kn^2\pi^2t/L^2}\,\mathrm{sen}\,\tfrac{n\pi x}{L}=v+w\,,$$

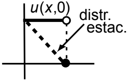
$$\text{con}\quad c_n=\tfrac{2}{L}\int_0^L\left[f(x)-v(x)\right]\mathrm{sen}\,\tfrac{n\pi x}{L}\,dx\,,\ n=1,2,\dots$$

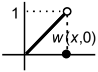
Como $w\to 0$ cuando $t\to\infty$, $v(x)$ es la **distribución estacionaria** de temperaturas hacia la que tienden las temperaturas en la varilla, independientemente de las condiciones iniciales.

[Si $T_0$ y $T_L$ dependen de $t$, la $v(x,t)$ de arriba sigue cumpliendo los datos de contorno, pero la ecuación para $w$ resulta ser no homogénea, del tipo de las que ahora veremos].

[Separando variables directamente en [P$_2$] se llega a $X(0)T(t)=T_1$ (y análoga para $x=L$), expresión de la que no se deduce absolutamente nada y por eso se debe buscar la $v$ ].

**Ej 1**. $\boxed{\begin{matrix} u_t-u_{xx}=0\,,\ x\in(0,1),\ t>0 \\ u(x,0)=1\,,\ u(0,t)=1,\ u(1,t)=0 \end{matrix}}\ \rightarrow\ v(x)=1-x\,.$




Operando se llega a $u(x,t)=1-x+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\,\mathrm{e}^{-n^2\pi^2t}\,\mathrm{sen}(n\pi x)$ .

[No importa que en $t=0$ no coincida el dato inicial con el de contorno en $x=1$ . Se prueba que las series solución del calor tienen infinitas derivadas para $t>0$ aunque $f$ sea discontinua, y para hallar la integral el valor en un punto no influye].

# Problema no homogéneo

Veamos cómo se resuelve un **problema no homogéneo con datos de contorno homogéneos** (si estos no lo fuesen empezaríamos como en [$P_2$] con un cambio $w=u-v$):

$$\boxed{[P_3]\ \begin{cases} u_t-ku_{xx}=F(x,t)\ ,\ x\in(0,\pi)\ ,\ t>0 \\ u(x,0)=f(x)\ ,\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}}$$

[Tomamos $L=\pi$ para abreviar las expresiones].

Las **autofunciones del problema homogéneo** [$P_1$] eran $\{\operatorname{sen} nx\}$ , $n=1,2,\ldots$ **Llevamos a la EDP** la siguiente serie, relacionada con ella y que ya satisface las condiciones de contorno:

$$\boxed{u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\operatorname{sen} nx}$$

donde las $T_n(t)$ son **funciones a determinar**.

[Con las $T_n=c_n\,e^{-kn^2t}$ de [$P_1$], la $u$ cumpliría la ecuación con $F\equiv 0$ . Se debe **dar más libertad a las** $T_n$ para obtener al meter la serie en la EDP una $F\not\equiv 0$ ].

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n'(t)+kn^2T_n(t)\right]\operatorname{sen} nx = F(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n(t)\operatorname{sen} nx \ \Rightarrow\ \boxed{T_n'+kn^2T_n=B_n(t)}\ .$$

con $B_n(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}F(x,t)\operatorname{sen} nx\,dx$ $\big[$desarrollo de $F(x,t)$ en senos para $t$ fijo$\big]$.

E imponiendo a la serie el **dato inicial** deducimos:

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\operatorname{sen} nx=f(x)\ \Rightarrow\ \boxed{T_n(0)=c_n}\,,\ \text{con}\ c_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\operatorname{sen} nx\,dx\ .$$

Resolviendo la EDO lineal **no homogénea** para $T_n$ con este dato inicial (con la fórmula de las lineales de primer orden o, a veces, por tanteo) hallamos la $T_n(t)$ y, con ello, la solución de [$P_3$].

Como se ve, en general, para los problemas no homogéneos hay que hacer dos desarrollos en serie y resolver EDOs no homogéneas (frente al único desarrollo y las EDOs homogénas de los homogéneos).

## Problemas para la varilla con extremos aislados

Primero el homogéneo: $\boxed{[\mathrm{P}_4]\ \begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0\,,\ x\in(0,L),\ t>0 \\ u(x,0)=f(x)\,,\ u_x(0,t)=u_x(L,t)=0 \end{cases}}$ .

Separando variables aparecen las mismas EDOs del problema [$\mathrm{P}_1$] (claro, es la misma EDP). Pero ahora cambian las condiciones de contorno de la $X$:

$$\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X'(0)=X'(L)=0 \end{cases} \to\ \lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{L^2}\ ,\ n=0,1,2,\dots\ ,\ X_n=\left\{\cos\frac{n\pi x}{L}\right\}\ \left[X_0=\{1\}\right].$$

Llevando estos valores de $\lambda$ a $T'=-\lambda kT$ se tienen las $T_n=\left\{\mathrm{e}^{-kn^2\pi^2t/L^2}\right\}$ $\left[\,T_0=\{1\}\,\right]$.

Siguiendo como en [$\mathrm{P}_1$], probamos la serie: $\boxed{u(x,t)=\frac{c_o}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\,\mathrm{e}^{-kn^2\pi^2t/L^2}\cos\frac{n\pi x}{L}}$ .

Para cumplir la condición inicial $u(x,0)=\frac{c_o}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos\frac{n\pi x}{L}=f(x)$ , los $c_n$ deben ser los coeficientes de la serie en cosenos de $f$: $\boxed{c_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx\,,\ n=0,1,\dots}$ .

De nuevo la solución se puede ver como la suma de una distribución estacionaria $\frac{c_o}{2}=\frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx$ y otra que tiende a $0$ cuando $t\to\infty$. Era esperable que toda la varilla (aislada) tendiese al valor medio de las temperaturas iniciales.

Para resolver un problema **no homogéneo** con estas condiciones en la $u_x$, se prueba, como se hace siempre, una serie construida con las **autofunciones del homogéneo** que hemos hallado:

$$\boxed{u(x,t)=T_0(t)+\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\cos\frac{n\pi x}{L}}\ ,$$

y se resuelven las EDOs que aparecen, con los datos que se deducen del dato inicial de la EDP.

# Un ejemplo con **condiciones con $u_x$ no homogéneas**

Para las condiciones de contorno $u_x(0,t)=F_0(t)$ , $u_x(L,t)=F_L(t)$ (flujo dado en los extremos), no se puede encontrar (en general) una $v(x,t)$ que sea una recta (se pueden probar parábolas) y, al hacer $w=u-v$ , la ecuación en $w$ que resulta es normalmente no homogénea.

**Ej 2**. $\boxed{\begin{array}{l} u_t - u_{xx} = 0\,,\ x\in(0,1),\ t>0 \\ u(x,0)=0\,,\ u_x(0,t)=0\,, u_x(1,t)=2 \end{array}}$ Tanteando con $v=Ax^2+Bx$ obtenemos que $v=x^2$ cumple las condiciones de contorno. Y haciendo $w=u-x^2$ se tiene el problema:

$$\begin{cases} w_t-w_{xx}=2 \\ w(x,0)=-x^2 \\ w_x(0,t)=w_x(1,t)=0 \end{cases} \to\ w=T_0(t)+\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\cos n\pi x \ \to\ T_0'+\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n'+n^2\pi^2T_n\right]\cos n\pi x=2$$

[ 2 ya desarrollada en cosenos].

Del dato inicial: $u(x,0)=T_0(0)+\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\cos n\pi x=-x^2=-\frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}\cos n\pi x$ , pues

$$a_0=-2\int_0^1 x^2dx=-\tfrac{2}{3}\,,\quad a_n=-2\int_0^1 x^2\cos n\pi x\,dx=\tfrac{2x^2}{n\pi}\operatorname{sen} n\pi x\Big]_0^1-\tfrac{4}{n\pi}\int_0^1 x\operatorname{sen} n\pi x\,dx$$

$$=-\tfrac{4x}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\Big]_0^1+\tfrac{4}{n^2\pi^2}\int_0^1\cos n\pi x\,dx\,.$$

Resolvemos: $\begin{cases} T_0'=2 \\ T_0(0)=-\frac{1}{3} \end{cases} \to\ T_0=2t-\frac{1}{3}\,,\quad \begin{cases} T_n'+n^2\pi^2T_n=0 \\ T_n(0)=a_n \end{cases} \to\ T_n=a_n e^{-n^2\pi^2t}.$

La solución (única) es, por tanto: $u(x,t)=2t+x^2-\frac{1}{3}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\,e^{-n^2\pi^2t}\cos n\pi x$ .

$\big[$ $u\to\infty$ si $t\to\infty$ pues $u_x=2$ significa que por la derecha metemos constantemente calor$\big]$.

**Ej 3**. $\boxed{\begin{array}{l} u_t-u_{xx}=t\,\text{sen}\,x,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\,t>0 \\ u(x,0)=u(0,t)=u_x\left(\frac{\pi}{2},t\right)=0 \end{array}}$ Hallamos las **autofunciones del homogéneo** que da $X''+\lambda X=0$ junto a las $X(0)=X'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ de los datos de contorno. Son $X_n=\left\{\text{sen}(2n-1)x\right\},\ n=1,2,\dots$

Probamos: $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\,\text{sen}(2n-1)x \to \sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n'+(2n-1)^2T_n\right]\text{sen}(2n-1)x=t\,\text{sen}\,x$.

La $F(x,t)$ de la derecha ya está desarrollada en esas autofunciones (no se necesita integrar).

Hemos obtenido las ecuaciones ordinarias: $T_1'+T_1=t$ y $T_n'+(2n-1)^2T_n=0,\ n>1$.

Además, del dato inicial deducimos: $u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\,\text{sen}(2n-1)x=0 \to T_n(0)=0\ \forall n$.

La única $T_n\not\equiv 0$ sale de: $\begin{cases} T_1'+T_1=t \\ T_1(0)=0 \end{cases} \to T_1=Ce^{-t}+e^{-t}\int e^t t\,dt=Ce^{-t}+t-1$ $\left[\text{o } T_{np}=At+B\right]$.

Imponiendo $T_1(0)=0$, hallamos $T_1$ y la solución única: $u(x,t)=(e^{-t}+t-1)\,\text{sen}\,x$.

[La 'serie solución' sólo tiene un término. Esto ocurre cuando $f$ o $F$ son autofunciones o sumas de ellas. Si el dato inicial fuese $u(x,0)=f(x)$ o la ecuación $u_t-u_{xx}=F(x,t)$, deberíamos desarrollarlas haciendo las correspondientes integrales].

**Ej 6**. $\boxed{\begin{array}{l} u_t-\frac{1}{2t}u_{xx}=3\,\text{sen}\,2x,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\ t>1 \\ u(x,1)=u(0,t)=u\left(\frac{\pi}{2},t\right)=0 \end{array}}$ Haciendo $u=XT$ en la homogénea: $\frac{X''}{X}=\frac{2tT'}{T}=-\lambda,\ \begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=X\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \end{cases} \to \{\text{sen}\,2nx\}$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\,\text{sen}\,2nx \xrightarrow{\text{EDP}} \sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n'+\frac{2n^2}{t}T_n\right]\text{sen}\,2nx=3\,\text{sen}\,2x.$$

Y del inicial $u(x,1)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(1)\,\text{sen}\,2nx=0 \to T_n(1)=0\ \forall n$. Sólo es no nula la solución de:

$\begin{cases} T_1'+\frac{2}{t}T_1=3 \\ T_1(1)=0 \end{cases}$, $T_1=\frac{C}{t^2}+\frac{1}{t^2}\int 3t^2dt=\frac{C}{t^2}+t \xrightarrow{d.i.} C=-1$. La solución es $u(x,t)=\left[t-\frac{1}{t^2}\right]\text{sen}\,2x$.

# Otra EDP distinta y unas condiciones de contorno complicadas

**Ej 5**. $\boxed{\begin{array}{l} u_t - u_{xx} + 2u = 0\,,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\ t>0 \\ u(x,0)=\cos 5x,\ u_x(0,t)=u(\pi/2,t)=0 \end{array}}$ [El término $+2u$ describe una pérdida de calor a lo largo de la varilla]. Separando:

$$u=XT \to \frac{X''}{X}=\frac{T'}{T}+2=-\lambda \ \left[\begin{array}{l}\text{damos el 2 a la } T \text{ para}\\ \text{tener la clásica para } X\end{array}\right] \to \left\{\begin{array}{l} X''+\lambda X=0\,,X'(0)=X\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \\ T'=-(2+\lambda)T \end{array}\right.$$

$\to\ \lambda_n=(2n-1)^2,\ X_n=\left\{\cos(2n-1)x\right\},\ T_n=\left\{\mathrm{e}^{-[2+(2n-1)^2]\,t}\right\},\ n=1,2,..$ Por tanto:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\mathrm{e}^{-[2+(2n-1)^2]\,t}\cos(2n-1)x \ \to\ u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\cos(2n-1)x=\cos 5x \ \to$$

$c_3=1$, resto $0$. Así pues, $u=\mathrm{e}^{-27\,t}\cos 5x$ .

**Ej 4**. $\boxed{\begin{array}{l} u_t-ku_{xx}=0\,,\ x\in(0,1)\,,\ t>0 \\ u(x,0)=x,\ u_x(0,t)-u(0,t)=0, u_x(1,t)=1 \end{array}}$ **Hacemos las condiciones de contorno homogéneas**. Tanteando: $v=x+1$ .

$$\xrightarrow{w=u-v} \left\{\begin{array}{l} w_t-kw_{xx}=0\,,\ w(x,0)=-1 \\ w_x(0,t)-w(0,t)=w_x(1,t)=0 \end{array}\right. \to\ T'=-\lambda kT \ \text{ y } \ \left\{\begin{array}{l} X''+\lambda X=0 \\ X'(0)-X(0)=X'(1)=0 \end{array}\right. .$$

Es $\lambda\geq 0$. Si $\lambda=0$: $X=c_1+c_2x \to \left\{\begin{array}{l} c_2-c_1=0 \\ c_2=0 \end{array}\right.$ no autovalor.

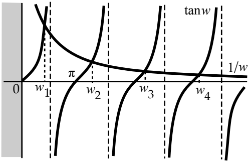
Si $\lambda>0$: $X=c_1\cos wx+c_2\,\mathrm{sen}\, wx \ \to \left\{\begin{array}{l} c_2w-c_1=0 \\ c_2\cos w-c_1\,\mathrm{sen}\, w=0 \end{array}\right. \to\ c_1=wc_2=\frac{\cos w}{\mathrm{sen}\, w}c_2 \ \to$

$c_2(\cos w-w\,\mathrm{sen}\, w)=0\,,\ \tan w_n=\frac{1}{w_n}\,,\ \lambda_n=w_n^2\,.$

Son entonces $X_n=\left\{\cos w_n(x-1)\right\}$ y $T_n=\left\{\mathrm{e}^{-\lambda_n kt}\right\}\ \to$

$$w=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\mathrm{e}^{-w_n^2kt}\cos w_n(x-1)\,.\ \ w(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} c_nX_n(x)=-1 \to$$

$$c_n=-\frac{\int_0^1 X_n}{\int_0^1 X_n^2}=\frac{-\frac{1}{w}\,\mathrm{sen}\, w_n}{\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{sen}\, 2w_n}{4w_n}}=-\frac{4\,\mathrm{sen}\, w_n}{2w_n+\mathrm{sen}\, 2w_n}\,.\ \ u(x,t)=w+x+1\,.$$




La distribución estacionaria hacia la que tienden las temperaturas en la varilla es la $v$ del cambio: $u\xrightarrow{t\to\infty}x+1$ .

**Ej 7**. $\boxed{\begin{array}{l} u_t-u_{xx}-4u_x-4u=0\,,\ x\in(0,\pi),\ t>0 \\ u(x,0)=e^{-2x},\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{array}}$ $u=XT \to \frac{T'}{T}=\frac{X''+4X'}{X}+4=-\lambda \to$ más corto ahora aquí

$\begin{cases} X''+4X'+(4+\lambda)X=0 \\ X(0)=X(\pi)=0 \end{cases}$ (en forma autoadjunta $\left[e^{4x}X'\right]'+4\,e^{4x}X+\lambda\,e^{4x}X=0$) y $T'+\lambda T=0$.

Hay que resorver el problema de contorno (y debemos mirar los $\lambda<0$). $\mu=-2\pm\sqrt{-\lambda}$.

$\lambda<0$: $X=c_1e^{(-2+p)x}+c_2e^{(-2-p)x} \xrightarrow{cc} X\equiv 0$. $\lambda=0$: $X=(c_1+c_2x)\,e^{-2x} \xrightarrow{cc} X\equiv 0$.

$\lambda>0$: $X=(c_1\cos wx+c_2\operatorname{sen} wx)\,e^{-2x}$, $\begin{array}{c} c_1=0 \\ c_2e^{-2\pi}\operatorname{sen} w\pi=0 \end{array}$, $\underset{n=1,2,\dots}{\lambda_n=n^2}$, $X_n=\left\{e^{-2x}\operatorname{sen} nx\right\}$.

Probamos pues la solución: $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\,e^{-n^2t}e^{-2x}\operatorname{sen} nx$. Sólo falta el dato inicial:

$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\,e^{-2x}\operatorname{sen} nx=e^{-2x}$ (•). Aunque hay atajos seguimos con la teoría general:

Para calcular los $c_n$ necesitamos hallar $\langle X_n,X_n\rangle=\int_0^{\pi} e^{4x}e^{-4x}\operatorname{sen}^2 nx\,dx=\frac{\pi}{2}$, y además:

$\langle e^{-2x},X_n\rangle=\int_0^{\pi} e^{4x}e^{-2x}e^{-2x}\operatorname{sen} nx\,dx=-\frac{1}{n}\cos nx\Big]_0^{\pi}=\frac{1-(-1)^n}{n}$ ($=0$ si $n$ par).

Por tanto, la solución es: $u(x,t)=\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2m-1}\,e^{-(2m-1)^2t}e^{-2x}\operatorname{sen}(2m-1)x$.

El primero atajo es observar que (•) equivale a $\sum_{n=1}^{\infty} c_n\operatorname{sen} nx=1 \to c_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sen} nx\,dx$.

Otro es hacer un cambio del tipo $u=e^{pt+qx}w$ para simplificar la ecuación. Tanteando:

$u=e^{-2x}w \to \begin{cases} w_t-w_{xx}=0 \\ w(x,0)=1,\ w(0,t)=w(\pi,t)=0 \end{cases}$, primer problema la sección.

**10.** Sea $\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0\,,\ x\in(0,\pi),\ t>0 \\ u(x,0)=0\,,\ u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=1 \end{cases}$. [La $v$ del cambio salta a la vista].

**14. a]** Desarrollar $f(x)=\frac{\pi}{2}-x$ en serie de autofunciones del problema $\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=X(\pi)=0 \end{cases}$.

**b]** Resolver $\begin{cases} u_t - u_{xx} = \operatorname{sen} x\,,\ x\in(0,\pi)\,,\ t>0 \\ u(x,0)=\frac{\pi}{2}-x,\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$. [Llevar serie con autofunciones del homogéneo a la EDP y al dato inicial y calcular las infinitas $T_n(t)$ no nulas].

**12.** Sea $\begin{cases} u_t - 8tu_{xx} = 0\,,\ x\in(0,\pi)\,,\ t>0 \\ u(x,0)=f(x)\,,\ u_x(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$, con **a]** $f(x)=\cos\frac{x}{2}$, **b]** $f(x)=\frac{\pi}{4}$.

Hallar la solución en el caso **a]** y los 2 primeros términos no nulos de la serie en el **b]**.

**15.** Resolver: b) $\begin{cases} u_t - u_{xx} + u = \mathrm{e}^{-2t},\ x\in(0,\pi)\,,\ t>1 \\ u(x,0)=\cos x\,,\ u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=0 \end{cases}$.

**11. b]** Resolver $\begin{cases} u_t - 4(1+2t)\,u_{xx} = 0\,,\ x\in(0,\pi)\,,\ t>0 \\ u(x,0)=1\,,\ u(0,t)=u_x(\pi,t)=0 \end{cases}$

**13(e21). a]** Hallar la solución de $T' = -4tT + \mathrm{e}^{-2t^2}$ que cumple $T(0)=0$.

**b]** Resolver el problema no homogéneo $\begin{cases} u_t - tu_{xx} = \mathrm{e}^{-2t^2}\operatorname{sen} 2x\,,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\ t>0 \\ u(x,0)=0\,,\ u(0,t)=u\left(\frac{\pi}{2},t\right)=0 \end{cases}$.

**5(dc19). a]** Hallar el desarollo de $f(x)=\pi x$ en las autofunciones del problema $\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X'(0)=X'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \end{cases}$.

**b]** Para $\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\,,\ t>0 \\ u(x,0)=\pi x,\ u_x(0,t)=u_x\left(\frac{\pi}{2},t\right)=0 \end{cases}$, hallar 2 términos no nulos de su serie solución.

**10.** $\boxed{\begin{array}{l} u_t-u_{xx}=0\,,\ x\in(0,\pi),\ t>0 \\ u(x,0)=0\,,\ u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=1 \end{array}}$ $v=x$ cumple las condiciones de contorno. $\xrightarrow{w=u-x}\begin{cases} w_t-w_{xx}=0 \\ w(x,0)=-x\,,\ w_x(0,t)=w_x(\pi,t)=0 \end{cases}\to$

$\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X'(0)=X'(\pi)=0 \end{cases}\to \lambda_n=n^2,\ X_n=\{\cos nx\}\,,\ n=0,1,\dots,$ y además $T'+\lambda T=0\to T_n=\{e^{-n^2t}\}$.

$$w=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,e^{-n^2t}\cos nx \;\to\; u(x,0)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx=-x\,,\ a_n=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx\ \dots$$

$$u(x,t)=x-\frac{\pi}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2m-1)^2}\,e^{-(2m-1)^2t}\cos(2m-1)x$$

**14. a]** El formulario da las $X_n=\{\operatorname{sen} nx\}\,,\ n=1,2,\dots,$ y la fórmula para $c_n=\frac{2}{L}\int_0^L f\,X_n\,dx$:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\Big(\frac{\pi}{2}-x\Big)\operatorname{sen} nx\,dx=\Big[\frac{2x-\pi}{n\pi}\cos nx\Big]_0^{\pi}+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx=\frac{(-1)^n+1}{n}\;\to\;\frac{\pi}{2}-x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\operatorname{sen} 2nx\,.$$

**b]** $u=XT\;\to\;\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=X(\pi)=0 \end{cases}\to X_n=\{\operatorname{sen} nx\}$ de antes. [Y además $T'+\lambda T=0$ que ahora no usamos].

Llevamos $u=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\operatorname{sen} nx$ a la EDP no homogénea y al dato inicial para hallar los $T_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\big[T_n'+n^2T_n\big]\operatorname{sen} nx=\operatorname{sen} x\,.\quad u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\operatorname{sen} nx=\frac{\pi}{2}-x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\operatorname{sen} 2nx\;\to\;\begin{array}{l} T_{2n-1}(0)=0 \\ T_{2n}(0)=\frac{1}{n}\end{array}$$

Son no nulos $\begin{cases} T_1'+T_1=1 \\ T_1(0)=0 \end{cases}\to T_1=Ce^{-t}+\underbrace{1}_{T_p\text{ a ojo}}\xrightarrow{d.i.}C=-1$ y $\begin{cases} T_{2n}'+4n^2T_{2n}=0 \\ T_{2n}(0)=\frac{1}{n} \end{cases}\to T_{2n}=\frac{1}{n}e^{-4n^2t}$.

$$\boxed{u=\big(1-e^{-t}\big)\operatorname{sen} x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,e^{-4n^2t}\operatorname{sen} 2nx}=\big(1-e^{-t}\big)\operatorname{sen} x+e^{-4t}\operatorname{sen} 2x+\frac{1}{2}\,e^{-16t}\operatorname{sen} 4x+\cdots$$

**12.** $\boxed{\begin{array}{l} u_t-8t\,u_{xx}=0\,,\ x\in(0,\pi)\,,\ t>0 \\ u(x,0)=f(x)\,,\ u_x(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{array}}$ con **a]** $f(x)=\cos\frac{x}{2}$, **b]** $f(x)=\frac{\pi}{4}$.

$u=XT\,,\ \frac{T'}{8tT}=\frac{X''}{X}=-\lambda \ \to \ \begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X'(0)=X(\pi)=0 \end{cases}\,,\ \lambda_n=\frac{(2n-1)^2}{4}\,,\ n=1,2,\dots,\ X_n=\left\{\cos\frac{(2n-1)x}{2}\right\}.$

Y además $T'=-8\lambda tT=-2(2n-1)^2tT \ \to \ T_n=\left\{\mathrm{e}^{-(2n-1)^2t^2}\right\}$.

Probamos $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\,\mathrm{e}^{-(2n-1)^2t^2}\cos\frac{(2n-1)x}{2}$, y falta $u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos\frac{(2n-1)x}{2}=f(x)$.

Para **a]** claramente $c_1=1$ y resto $c_n=0 \ \to \ \boxed{u(x,t)=\mathrm{e}^{-t^2}\cos\frac{x}{2}}$ (fácilmente comprobable).

En **b]** debemos desarrollar: $c_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi}{4}\cos\frac{(2n-1)x}{2}\,dx=\frac{1}{2n-1}\,\mathrm{sen}\,\frac{(2n-1)x}{2}\Big]_0^{\pi}=\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$.

Luego $\boxed{u(x,t)=\mathrm{e}^{-t^2}\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-9t^2}\cos\frac{3x}{2}+\cdots}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\,\mathrm{e}^{-(2n-1)^2t^2}\cos\frac{(2n-1)x}{2}$.

**15.** b) $\boxed{\begin{array}{l} u_t-u_{xx}+u=\mathrm{e}^{-2t} \\ u(x,0)=\cos x,\ u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=0 \end{array}} \xrightarrow{u=XT} \frac{X''}{X}=\frac{T'}{T}+1=-\lambda\,,\ \begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X'(0)=X'(\pi)=0 \end{cases}\,,\ \{\cos nx\}.$

$u(x,t)=T_0(t)+\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\cos nx \xrightarrow{\text{EDP}} T_0+T_0'+\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n'+T_n+n^2T_n\right]\cos nx=\mathrm{e}^{-2t}$ (ya desarrollada).

Sale del dato inicial $u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\cos nx=\cos x$: $T_1(0)=1$ y $T_n(0)=0$ si $n\neq 1$.

Son no nulas: $\begin{cases} T_0'+T_0=\mathrm{e}^{-2t} \\ T_0(0)=0 \end{cases} \to \ T_0(t)=C\,\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-t}\int\mathrm{e}^{t}\mathrm{e}^{-2t}dt=\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} \xrightarrow{T_0(0)=0} C=1\,,$

$\begin{cases} T_1'+2T_1=0 \\ T_1(0)=1 \end{cases} \to \ T_1=C\mathrm{e}^{-2t} \xrightarrow{d.i.} T_1(t)=\mathrm{e}^{-2t}$. La solución es: $\boxed{u=\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{-2t}\cos x}$.

**11. b]** $\boxed{\begin{array}{l} u_t-4(1+2t)u_{xx}=0,\ x\in(0,\pi),\ t>0 \\ u(x,0)=1\ ,\ u(0,t)=u_x(\pi,t)=0 \end{array}}$ $u=XT \to \frac{X''}{X}=\frac{T'}{(4+8t)T}=-\lambda \to$

$\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=X'(\pi)=0 \end{cases}$, $\lambda_n=\frac{(2n-1)^2}{4}$ , $X_n=\left\{\text{sen}\,\frac{(2n-1)x}{2}\right\}$. $T'+\lambda(4+8t)T=0$ , $T_n=\left\{\mathrm{e}^{-(2n-1)^2(t+t^2)}\right\}$ .

Probamos: $u=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\mathrm{e}^{-(2n-1)^2(t+t^2)}\,\text{sen}\,\frac{(2n-1)x}{2}$ . Dato inicial $u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\,\text{sen}\,\frac{(2n-1)x}{2}=1$

$$\to\ c_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\text{sen}\,\frac{(2n-1)x}{2}x\,dx=-\frac{4}{\pi(2n-1)}\cos\frac{(2n-1)x}{2}\Big]_0^{\pi}=\frac{4}{\pi(2n-1)}\ .$$

Por tanto, la solución es: $u(x,t)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\,\mathrm{e}^{-(2n-1)^2(t+t^2)}\,\text{sen}\,\frac{(2n-1)x}{2}$ .

**13(e21). a]** $T'=-4tT+\mathrm{e}^{-2t^2}$. $T=C\,\mathrm{e}^{-2t^2}+\mathrm{e}^{-2t^2}\int\mathrm{e}^{2t^2}\mathrm{e}^{-2t^2}dt=C\,\mathrm{e}^{-2t^2}+t\,\mathrm{e}^{-2t^2}\xrightarrow{di}\boxed{T(t)=t\,\mathrm{e}^{-2t^2}}$.

**b]** $\begin{cases} u_t-tu_{xx}=\mathrm{e}^{-2t^2}\text{sen}\,2x \\ u(x,0)=u(0,t)=u\left(\frac{\pi}{2},t\right)=0 \end{cases}$ $\xrightarrow{u=XT}\frac{T'}{tT}=\frac{X''}{X}=-\lambda$ , $X(0)T(t)=X\left(\frac{\pi}{2}\right)T(t)=0\to\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=X\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \end{cases}$

$\to\lambda_n=4n^2,\ X_n=\{\text{sen}\,2nx\}$ , $n=1,2,\ldots$ [Y $T'=-\lambda tT$ que no se usa].

$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\,\text{sen}\,2nx$ al dato inicial: $u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\,\text{sen}\,2nx=0\ \Rightarrow\ T_n(0)\ \forall n$.

Y a la EDP: $\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n''+4n^2tT_n\right]\text{sen}\,2nx=\mathrm{e}^{-2t^2}\text{sen}\,2x\to T_1''+4tT_1=\mathrm{e}^{-2t^2},\ T_n''+4n^2tT_n=0$ , $n>1$ .

La única $T_n$ no nula es $T_1$ que, según **a]**, nos da esta solución: $\boxed{u(x,t)=t\,\mathrm{e}^{-2t^2}\text{sen}\,2x}$.

**5(dc19). a]** En formulario $\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X'(0)=X'\big(\frac{\pi}{2}\big)=0 \end{cases} \to \lambda_n=4n^2\,,\ n=0,1,\dots,\ X_n=\{\cos 2nx\}\ \ \big[X_0=\{1\}\big].$

$$\pi x = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos 2nx \ \to\ a_0=\frac{2}{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\pi x\,dx = 2x^2\Big]_0^{\pi/2}=\frac{\pi^2}{2}\,.$$ Y para $n>0$:

$$a_n=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\pi x\cos 2nx\,dx=\frac{2x\,\mathrm{sen}\,2nx}{n}\Big]_0^{\pi/2}-\frac{2}{n}\int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}\,2nx\,dx=\frac{\cos 2nx}{n^2}\Big]_0^{\pi/2}=\frac{(-1)^n-1}{n^2}\ \ \Big[\begin{smallmatrix}=0 \text{ si}\\ n\ \text{par}\end{smallmatrix}\Big].$$

**b]** $X'(0)T(t)=X'\big(\frac{\pi}{2}\big)T(t)=0 \to \begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X'(0)=X'(\pi/2)=0 \end{cases},\ \lambda_n=4n^2,\ n=0,1,\dots\ X_n=\{\cos 2nx\}\,.$

Y además $T'=-\lambda T=-4n^2T \ \to\ T_n=\big\{\mathrm{e}^{-4n^2t}\big\}\ \ \big[T_0=\{1\}\big]$. [Ecuaciones para $X$ y $T$ en el formulario].

Probamos $u(x,t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,\mathrm{e}^{-4n^2t}\cos 2nx$, y sólo falta $u(x,0)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos 2nx=\pi x$.

La solución es, por **a]**: $\boxed{u(x,t)=\frac{\pi^2}{4}-2\mathrm{e}^{-4t}\cos 2x-\cdots}=\frac{\pi^2}{4}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\,\mathrm{e}^{-4(2n-1)^2t}}{(2n-1)^2}\cos(4n-2)x\,.$

**3(cnv19).** Resolver **a]** $T'=-\frac{1}{t}T+2,\ T(1)=0$ y **b]** $\begin{cases} u_t-\frac{1}{t}u_{xx}=2\,\mathrm{sen}\,x\,,\ x\in\big(0,\frac{\pi}{2}\big)\,,\ t>0 \\ u(x,1)=\mathrm{sen}\,3x\,,\ u(0,t)=u_x\big(\frac{\pi}{2},t\big)=0 \end{cases}.$

**a]** $\mathrm{e}^{\int a}=\mathrm{e}^{-ln t}=\frac{1}{t}\ \to\ T=\frac{C}{t}+\frac{1}{t}\int 2t\,dt=\frac{C}{t}+t\xrightarrow{d.i.} t-\frac{1}{t}\,.$

**b]** $u=XT\ \to\ \frac{X''}{X}=\frac{tT'}{T}=-\lambda \to \begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=X'\big(\frac{\pi}{2}\big)=0 \end{cases} \to X_n=\{\mathrm{sen}(2n-1)x\}\,,\ n=1,2,\dots \to$

$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\,\mathrm{sen}\,nx \to \sum_{n=1}^{\infty}\Big[T_n'+\frac{(2n-1)^2}{t}T_n\Big]\mathrm{sen}(2n-1)x=2\,\mathrm{sen}\,x$ (ya desarrollada en senos impares).

Del dato incial; $u(x,1)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(1)\,\mathrm{sen}(2n-1)x=0$ (también desarrollada). Son no nulos:

$\begin{cases} T_1'+\frac{1}{t}T_1=2 \\ T_1(1)=0 \end{cases} \xrightarrow{\mathbf{a]}} T_1=t-\frac{1}{t}\,.\ \ \begin{cases} T_3'=-\frac{9}{t}T_3 \\ T_3(1)=1 \end{cases} \to\ T_3=\frac{1}{t^9}\,.\qquad \boxed{u(x,t)=\big(t-\frac{1}{t}\big)\,\mathrm{sen}\,x+\frac{1}{t^9}\mathrm{sen}\,3x}\,.$