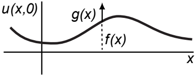
4.4. Ondas. D'Alembert y separación de variables

En 4.2 vimos que la solución general del **problema puro de valores iniciales** homogéneo

$$\boxed{(\mathrm{P}_1)\begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=0\,,\ x,t\in\mathbf{R}\\ u(x,0)=f(x)\,,\ u_t(x,0)=g(x)\end{cases}}$$



era $\boxed{u(x,t)=p(x+ct)+q(x-ct)}$, $p,q\in C^2$, y que la solución única de (P_1) venía dada por:

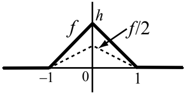
$$\boxed{u(x,t)=\tfrac{1}{2}\big[f(x+ct)+f(x-ct)\big]+\tfrac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(s)\,ds}$$ **fórmula de D'Alembert**

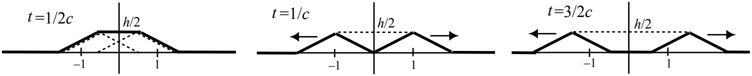
Su solución es suma de dos ondas que viajan a velocidad c, una hacia las x crecientes y otra hacia las decrecientes. A la vista de D'Alembert, llamando $G(x)\equiv\frac{1}{2c}\int_0^x g(s)\,ds$:

$q(x)=\frac{1}{2}f(x)-G(x)$ va hacia la derecha y $p(x)=\frac{1}{2}f(x)+G(x)$ va hacia la izquierda.

Ej 1. Supongamos $f=0$ salvo una perturbación triángular en torno a 0 y que soltamos la cuerda sin impulso ($g=0$).

Dibujemos la solución para diferentes t. Bastará trasladar las dos ondas que viajan en sentidos opuestos $\big[$aquí ambas son $\frac{1}{2}f(x)$ $\big]$:





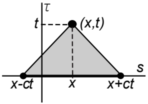
Ha sido fácil dibujar la solución [mucho más cuesta dar su expresión analítica]. Los picos de la f inicial **siguen indefinidamente** y van también a velocidad c. Para que u sea solución (C^2), debe $f\in C^2$ y $g\in C^1$. Si es continua pero no C^2, como ésta, se llama 'solución débil'.

D'Alembert con fuerzas externas

Se prueba que la solución del problema $\boxed{(\mathrm{P}_2)\ \begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=F(x,t)\ ,\ x,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=f(x),\ u_t(x,0)=g(x) \end{cases}}$ es:

$$\boxed{u(x,t)=\frac{1}{2}\Big[f(x+ct)+f(x-ct)\Big]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(s)\,ds+\frac{1}{2c}\int_0^t\int_{x-c[t-\tau]}^{x+c[t-\tau]}F(s,\tau)\,ds\,d\tau}\quad \text{[DA]}$$

$u(x,t)$ sólo depende de los valores de f en $x-ct$ y $x+ct$ [puntos de corte con el eje x de las características que pasan por (x,t)] y de los de g en $[x-ct,x+ct]$. Al intervalo se le llama dominio de dependencia del punto (x,t) . Se prueba que el recinto de la integral doble es el triángulo limitado por $\tau=0$ y esas características. Así pues, para dar la solución u en un punto (x,t) se necesita sólo: i) los valores de F en el triángulo, ii) los de g en su base, iii) los de f en los dos puntos.



Ej 2. $\boxed{\begin{array}{l} u_{tt}-u_{xx}=2 \\ u(x,0)=x\ ,\ u_t(x,0)=3 \end{array}}$ Utilizando directamente la última fórmula [DA]:

$$u=\frac{1}{2}\Big[(x+t)+(x-t)\Big]+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}3\,ds+\frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-[t-\tau]}^{x+[t-\tau]}2\,ds\,d\tau=x+3t+2\int_0^t[t-\tau]\,d\tau=x+3t+t^2\,.$$

A veces es fácil hallar una solución particular v de la ecuación no homogénea y así evitar el cálculo de la integral doble, pues $w=u-v$ conduce a un problema más sencillo con $F=0$, (esto no se podrá hacer siempre si hay condiciones de contorno, pues podrían dejar de ser homogéneas). Por ejemplo si F depende sólo de x o de t se puede buscar $v(x)$ o $v(t)$:

$$-v_{xx}=2\ \to\ v=-x^2+Cx+K\ \to \text{ si } v(x)=-x^2,\ \ w \text{ cumple } \begin{cases} w_{tt}-w_{xx}=0 \\ w(x,0)=x+x^2,\,w_t(x,0)=3 \end{cases}$$

$$\to\ w=\frac{1}{2}\Big[(x+t)+(x+t)^2+(x-t)+(x-t)^2\Big]+\int_{x-t}^{x+t}3\,ds=x+x^2+t^2+3t\ \to\ u=x+3t+t^2.$$

$$v_{tt}=2\ \to\ v(t)=t^2+3t\ \to\ \begin{cases} w_{tt}-w_{xx}=0 \\ w(x,0)=x,\,w_t(x,0)=0 \end{cases}\ \to\ w=x\ \to\ u=x+3t+t^2\,.$$

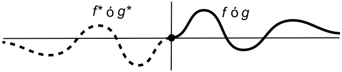
Cuerda semi-infinita

$$(P_3)\ \begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=0\ ,\ x\ge 0\ ,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=f(x)\ ,\ u_t(x,0)=g(x)\ ,\ u(0,t)=0 \end{cases}$$

[para que no esté rota, debe ser $f(0)=0$].

D'Alembert exige funciones definidas $\forall x$ y f y g no lo están cuando $x<0$. ¿Cómo extender estas funciones a todo $\mathbf{R}$? Si llamamos f^* y g^* a sus extensiones se debe cumplir la condición:

$$u(0,t)=\tfrac{1}{2}\left[f^*(ct)+f^*(-ct)\right]+\tfrac{1}{2c}\int_{-ct}^{ct} g^*(s)\,ds=0\,,$$



luego f^* y g^* han de ser **impares respecto a** 0**,**
es decir, $f^*(-x)=-f^*(x)$, $g^*(-x)=-g^*(x)$.

Así pues, la solución de (P_3) es la del siguiente problema (para la cuerda infinita):

$$\begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=0\ , x,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=f^*(x), u_t(x,0)=g^*(x) \end{cases},\quad \boxed{u(x,t)=\tfrac{1}{2}\left[f^*(x+ct)+f^*(x-ct)\right]+\tfrac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g^*(s)\,ds}\ \text{[De]}$$

pues u cumple la ecuación, las condiciones iniciales para $x\ge 0$, y la de contorno. El problema del uso de [De] es que f^* y g^* tienen, en general, **diversas expresiones en distintos intervalos**.

Resolvamos ahora el problema más general con **fuerzas externas** y **extremo móvil**:

$$(P_4)\ \begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=F(x,t)\ ,\ x\ge 0,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=f(x)\ ,\ u_t(x,0)=g(x)\ ,\ u(0,t)=h_0(t) \end{cases}$$

[debe ahora ser $f(0)=h_0(0)$].

Primero **debemos hacer la condición de contorno homogénea**, hallando una v que la cumpla y haciendo $w=u-v$, ya que entonces será $w(0,t)=0$, aunque probablemente se complicarán la ecuación y el resto de condiciones. La v más clara (no siempre la mejor) es: $v(t)=h_0(t)$.

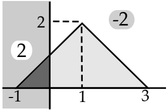
La solución del problema en w la dará [DA] si sustituimos sus f , g y F por las f^*, g^* y F^*, siendo ésta última la **extensión impar de** F **mirándola como función de** x .

Ejemplo de cuerda semi-infinita

Ej 3. $\boxed{\begin{array}{l} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\geq 0, t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0\,,\ u(0,t)=t^2 \end{array}}$ Hallemos primero simplemente $u(1,2)$.

Para anular la condición de contorno podemos usar la v citada:

$$w=u-t^2 \rightarrow \begin{cases} w_{tt}-w_{xx}=-2 \\ w(x,0)=w_t(x,0)=0 \\ w(0,t)=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} w_{tt}-w_{xx}=\left\{\begin{smallmatrix} 2\,,\ x<0 \\ -2\,,\ x>0 \end{smallmatrix}\right. \\ w(x,0)=w_t(x,0)=0 \end{cases} \rightarrow$$

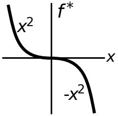


$$w(1,2)=\tfrac{1}{2}\iint_{\triangle}F^*=\tfrac{1}{2}\big[(2)\text{ área } +(-2)\text{ área } \big]=-3 \ \rightarrow\ u(1,2)=-3+4=1\,.$$

[Por ser constantes las F a integrar, nos hemos ahorrado el cálculo de integrales dobles.
Con otra F habría que hacer 3 integrales dobles, una para el triángulo y 2 para el trapecio].

Pero podríamos conseguir un problema sin F, haciendo el cambio con una v mejor. Tanteando se ve que $v=x^2+t^2$ cumple la condición y también la ecuación:

$$w=u-v \rightarrow \begin{cases} w_{tt}-w_{xx}=0 \\ w(x,0)=-x^2, w_t(x,0)=0 \\ w(0,t)=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} w_{tt}-w_{xx}=0\,,\ x,t\in\mathbf{R} \\ w(x,0)=f^*(x) \\ w_t(x,0)=0 \end{cases}$$



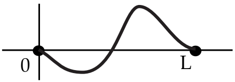
$$\rightarrow w(1,2)=\tfrac{1}{2}\big[f^*(3)+f^*(-1)\big]=-4 \rightarrow\ u(1,2)=5-4=1\,.$$

Con el segundo cambio no es difícil dar la $u(x,t)$ para todo $x,t\geq 0$ (con el primero costaría mucho). Está claro que hay que considerar **dos posibilidades**, pues, aunque $x+t$ es positivo, $x-t$ puede ser también negativo, y la f^* tiene expresiones distintas en cada caso:

$$w=\tfrac{1}{2}\big[f^*(x+t)+f^*(x-t)\big]=\begin{cases} -\frac{1}{2}(x+t)^2+\frac{1}{2}(x-t)^2=-2tx,\ x\leq t \\ -\frac{1}{2}(x+t)^2-\frac{1}{2}(x-t)^2=-x^2-t^2,\ x\geq t \end{cases} \rightarrow\ u=\begin{cases} (x-t)^2,\ x\leq t \\ 0\,,\ \ x\geq t \end{cases}.$$

[Como las ondas viajan a velocidad $c=1$ los puntos a distancia $\geq t$ debían estar parados en el instante t].

Cuerda finita (única resoluble por separación de variables)

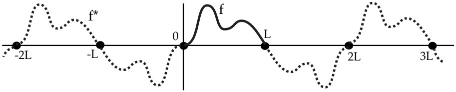


$$(\mathrm{P}_5)\ \begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=0\,,\ x\in[0,L],\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=f(x)\,,\ u_t(x,0)=g(x) \\ u(0,t)=u(L,t)=0 \end{cases}$$

[debe ser $f(0)=f(L)=0$].

Para hallar su solución única usando D'Alembert **extendemos f y g a $[-L,L]$ de forma impar respecto a 0 y luego de forma $2L$-periódica a todo $\mathbf{R}$**:

$$f^*(-x)=-f^*(x)\,,\ f^*(x+2L)=f^*(x)\quad,\quad g^*(-x)=-g^*(x)\,,\ g^*(x+2L)=g^*(x)\,.$$



[Entonces f^* y g^* también serán impares respecto a L y tendrán, en general, infinitas expresiones].

La solución de (P_5) se obtiene entonces aplicando [De] a $\begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=0\,,\ x,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=f^*(x)\,,\ u_t(x,0)=g^*(x) \end{cases}$.

Si queremos resolver $$\boxed{(\mathrm{P}_6)\ \begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=F(x,t)\,,\ x\in[0,L],\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=f(x)\,,\ u_t(x,0)=g(x) \\ u(0,t)=h_0(t)\,,\ u(L,t)=h_L(t) \end{cases}}$$ (**hay fuerzas externas y movemos los extremos**)

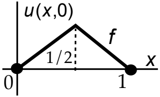
primero se halla una v que cumpla los datos de contorno y se hace $w=u-v$. Tanteando con funciones $v=a(t)x+b(t)$ se ve que una posible v es $\boxed{v(x,t)=\left[1-\frac{x}{L}\right]h_0(t)+\frac{x}{L}h_L(t)}$.

La solución del problema en w vuelve a venir dada por [DA], poniendo en vez de sus f, g y F, las extensiones impares y 2L-periódicas f^*, g^* y F^* (vista F como función de x).

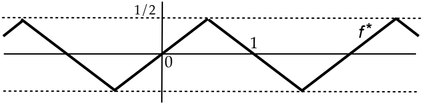
Ejemplo de cuerda finita

Ej 4.
$$\boxed{\begin{array}{l} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\in[0,1]\,,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=f(x)=\begin{cases} x\,, & 0\le x\le 1/2 \\ 1-x\,, & 1/2\le x\le 1\end{cases} \\ u_t(x,0)=u(0,t)=u(L,t)=0 \end{array}}$$

(Puede representar la pulsación de la cuerda de una guitarra).



Es muy complicado hallar explícitamente $u(x,t)=\frac{1}{2}\big[f^*(x+t)+f^*(x-t)\big]\ \forall x,t$ pues f^* tiene infinitas expresiones y habría que discutir en qué intervalos se mueven $x+t$ y $x-t$:

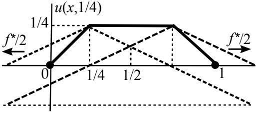


$$f^*(x)=\begin{cases} \;\cdots \\ -1-x, & -3/2\le x\le -1/2 \\ \;\;x\,, & -1/2\le x\le 1/2 \\ 1-x, & 1/2\le x\le 3/2 \\ x-2, & 3/2\le x\le 5/2 \\ \;\cdots \end{cases}$$

Algo más sencillo, pero aún largo, sería dar la solución para un t o un x fijo. Pero sí es muy fácil hallar u para un (x,t) dado. No se necesita siquiera la expresión de f^*. Por ejemplo:

$$u\big(\tfrac{1}{4},3\big)=\tfrac{1}{2}\big[f^*\big(\tfrac{13}{4}\big)+f^*\big(-\tfrac{11}{4}\big)\big]\underset{\substack{\uparrow \\ f^*\text{ es 2-periódica}}}{=}\tfrac{1}{2}\big[f^*\big(-\tfrac{3}{4}\big)+f^*\big(-\tfrac{3}{4}\big)\big]\underset{\substack{\uparrow \\ f^*\text{ es impar}}}{=}-f\big(\tfrac{3}{4}\big)=-\tfrac{1}{4}\,.$$

Tampoco se precisa la expresión de f^* (sí su gráfica) para hacer **dibujos**: basta trasladar a izquierda y derecha $\frac{1}{2}f^*$ y sumar . Por ejemplo, dibujemos $u\big(x,\frac{1}{4}\big)=\frac{1}{2}\big[f^*\big(x+\frac{1}{4}\big)+f^*\big(x-\frac{1}{4}\big)\big]$:



El máximo de la gráfica de $\frac{1}{2}f^*$ (la de f^* con la mitad de altura), se ha ido al ir hacia la izquierda hasta $(1/4,1/4)$ y al ir hacia la derecha a $(3/4,1/4)$.

Al sumar dos rectas con la misma pendiente sale otra con el doble, y al sumar dos con pendiente opuesta queda una constante.

Las complicaciónes de D'Alembert desaparecen sólo cuando las funciónes extendidas son las propias funciones iniciales, es decir, si son ellas mismas impares y periódicas. Si $f(x)=\operatorname{sen}\pi x$ fuese nuestra f, simplemente la solución $\forall x,t$ sería $u(x,t)=\frac{1}{2}\big[\operatorname{sen}(x+t)+\operatorname{sen}(x-t)\big]=\operatorname{sen}x\cos t$.

Separación de variables para ondas

Resolvamos el problema homogéneo para la cuerda con extremos fijos ya resuelta extendiendo los datos y aplicando D'Alembert. [Si no fuesen cero los datos de contorno se haría $w=u-v$ y en problemas no homogéneos se probarían series de autofunciones del homogéneo]

$$\boxed{(\mathrm{P}_5)\ \begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=0\,,\ x\in[0,L],\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=f(x),\ u_t(x,0)=g(x)\,,\ u(0,t)=u(L,t)=0 \end{cases}}$$

Separando variables $u=X(x)\,T(t)$ e imponiendo los datos de contorno obtenemos:

$$\frac{X''}{X}=\frac{1}{c^2}\frac{T''}{T}=-\lambda \ \rightarrow\ \begin{cases} X''+\lambda X=0\,,\ X(0)=X(L)=0\ \rightarrow\ \lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{L^2}\,,\ X_n=\left\{\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\right\} \\ T''+\lambda c^2T=0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad n=1,2,\dots \end{cases}$$

Para esos λ_n son las $T_n=k_n\cos\frac{n\pi ct}{L}+c_n\operatorname{sen}\frac{n\pi ct}{L}\,,\ n=1,2,\dots$

Probamos, pues: $\boxed{u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[k_n\cos\frac{n\pi ct}{L}+c_n\operatorname{sen}\frac{n\pi ct}{L}\right]\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}}$

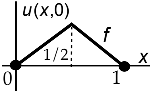
con k_n y c_n constantes que debemos determinar. Para que se cumplan los dos datos iniciales:

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}k_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}=f(x)\ \rightarrow\ \boxed{k_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx\,,\ n=1,2,\dots}\,.$$

$$u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi c}{L}c_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}=g(x)\ \rightarrow\ \boxed{c_n=\frac{2}{n\pi c}\int_0^L g(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx\,,\ n=1,2,\dots}\,.$$

Para ciertas cuestiones (valores, dibujos, ...) es mejor D'Alembert, pero la serie muestra mejor otras propiedades. Por ejemplo, u es $\frac{2L}{c}$ −periódica en t por serlo las T_n. Observemos además que la solución aparece como suma infinita de 'modos naturales de vibración' $\left[\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\right]$ cada uno vibrando con una frecuencia $\frac{n\pi c}{L}$ ('frecuencias naturales' de la cuerda). En términos acústicos el primer término da el tono fundamental (de frecuencia $\frac{\pi c}{L}$) y los demás son 'armónicos' (de frecuencia múltiplo de la anterior).

Ej 4*. $\boxed{\begin{array}{l} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\in[0,1]\,,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=f(x)=\begin{cases} x\,, & 0\le x\le 1/2 \\ 1-x\,, & 1/2\le x\le 1\end{cases} \\ u_t(x,0)=u(0,t)=u(L,t)=0 \end{array}}$ (Ejemplo 4 de antes que podía representar la pulsación de la cuerda de una guitarra).



Basta copiar las fórmulas halladas: $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} k_n \cos n\pi t \,\operatorname{sen} n\pi x$ (2-periódica),

con $k_n = 2\int_0^{1/2} x \operatorname{sen} n\pi x\, dx + 2\int_{1/2}^{1} (1-x) \operatorname{sen} n\pi x\, dx = \cdots = \frac{4}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}$ ($=0$ si n par).

[Pulsando la cuerda en el centro desaparecen los armónicos pares. También aquí todo sería muy simple si $f(x)=\operatorname{sen}\pi x$, pues no habría que hacer integrales: $u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} k_n \operatorname{sen} n\pi x = \operatorname{sen}\pi x \to k_1=1$ y resto $0 \to u=\cos t \operatorname{sen} x$].

Ej 5. $\boxed{\begin{array}{l} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\in[0,\pi]\,,\ t\in\mathbf{R} \\ u_t(x,0)=x,\ u(x,0)=u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{array}}$ a) Resolverla por separación de variables. b) Hallar $u(2,2)$ con D'Alembert (y comparar).

a) Rehacemos cálculos desde el principio. De los datos 0 se deduce $X(0)=X(\pi)=T(0)=0$.

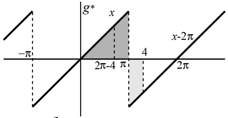
$$\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=X(\pi)=0 \end{cases} \to\ \lambda_n=n^2,\ X_n=\{\operatorname{sen} nx\}\,,\quad \begin{cases} T''+\lambda T=0 \\ T(0)=0 \end{cases} \to\ T_n=\{\operatorname{sen} nt\}\,,\ n=1,2,\ldots$$

$$u=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} nt \operatorname{sen} nx\,.\ \ u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n \operatorname{sen} nx = x \ \to\ u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n^2}\operatorname{sen} nt \operatorname{sen} nx\,.$$

pues $nc_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} nx\, dx = -\frac{2\cos n\pi}{n}$.

b) $u=\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g^*$, g^* extensión impar y 2π-periódica de x.

$$u(2,2)=\tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} s\, ds + \tfrac{1}{2}\int_{\pi}^{4}(s-2\pi)\, ds = 4-4\pi+\pi^2=(\pi-2)^2\,.$$



[Con 10 términos de la serie con $x=t=2$ se obtiene $u(2,2)\approx 1.3047$ y es $(\pi-2)^2\approx 1.3032$].

Ej 6. $\boxed{\begin{array}{l} u_{tt}+2u_t-u_{xx}=(t+2)\operatorname{sen}x,\ x\in[0,\pi],\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=u_t(x,0)=u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{array}}$ Separando variables en la homogénea: $u=XT \to \frac{X''}{X}=\frac{T''+2T'}{T}=-\lambda \to$

$\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=X(\pi)=0 \end{cases} \to\ X_n=\{\operatorname{sen}nx\},\ n=1,2,\dots$ [y $T_n''+2T_n'+\lambda T_n=0$ que aquí no se usa].

Llevamos a la EDP: $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\operatorname{sen}nx \to \sum_{n=1}^{\infty}\big[T_n''+2T_n'+n^2T_n\big]\operatorname{sen}nx=\underbrace{(t+2)\operatorname{sen}x}_{\text{ya desarrollada}}$.

Además: $u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\operatorname{sen}nx=u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n'(0)\operatorname{sen}nx=0 \Rightarrow T_n(0)=T_n'(0)=0\ \forall n$.

Todas las EDOs son homogéneas con datos nulos (y es $T_n\equiv 0$) menos $\begin{cases} T_1''+2T_1'+T_1=t+2 \\ T_1(0)=T_1'(0)=0 \end{cases}$.

$$T_1=(c_1+c_2t)\,e^{-t}+t\ \big[\mu=-1 \text{ doble y } T_{1p}=At+B\big] \xrightarrow{d.i.} u(x,t)=t\left(1-e^{-t}\right)\operatorname{sen}x\,.$$

Reflexiones generales sobre el método de separación de variables.

Todos los problemas vistos estaban formados por una **EDP lineal** $L[u]=F$, con L lineal (es decir, $L[au_1+bu_2]=aL[u_1]+bL[u_2]$) y unas **condiciones adicionales lineales** también.

Siempre hemos tenido primero que garantizar que fueran **las condiciones de contorno** $=0$.

En los **problemas homogéneos** buscamos soluciones de la EDP que eran productos $u=XT$, y ello nos llevó a unas X_n autofunciones de un problema de contorno y unas T_n soluciones de otra EDO también homogénea. Construimos la serie $u(x,t)=\sum c_nT_n(t)X_n(x)$ y fijamos los c_n imponiendo la condición inicial (o las condiciones) y haciendo desarrollos de Fourier.

En los **no homogéneos** llevamos a la EDP una serie hecha con **productos de autofunciones** X_n **del homogéneo por funciones** $T_n(t)$ **a determinar**. Resolviendo la familia restultante de EDOs lineales no homogéneas, con los datos que se deducían de los iniciales, obtuvimos la solución.

17. Resolver $\begin{cases} u_{tt}-4u_{xx}=0\,,\ x\in[0,\pi]\,,\, t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=0\,,\ u_t(x,0)=\operatorname{sen}3x \\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$ **a]** Por separación de variables. **b]** Utilizando, razonadamente, D'Alembert.

3(sp20). a] Calcular la solución de $T''+T=2e^{-t}$ que cumple $T(0)=1\,,\ T'(0)=0$.

b] Resolver $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=2e^{-t}\operatorname{sen}x\,,\ x\in[0\,,\pi]\,,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=\operatorname{sen}x,\, u_t(x,0)=0,\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$. [Llevar serie con autofunciones del homogéneo a la EDP y a los datos iniciales y calcular la única $T_n(t)$ no nula].

20. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\in[0,2\pi]\,,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=\begin{cases} 2\operatorname{sen}x\,,\ x\in[0,\pi] \\ 0\ ,\ x\in[\pi,2\pi] \end{cases} \\ u_t(x,0)=u(0,t)=u(2\pi,t)=0 \end{cases}$. Dibujar $u(x,\pi)$ y hallar su expresión con D'Alembert. Resolver por separación de variables y comprobar.

16. Poner en forma canónica y resolver por diferentes caminos: b) $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=2x\,,\ x,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0 \end{cases}$.

19. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\geq 0\,,\, t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=0, u_t(x,0)=\begin{cases} 2x-x^2,\ x\in[0,2] \\ 0\ ,\ x\in[2,\infty) \end{cases},\ u(0,t)=0 \end{cases}$. Hallar: i) $u(5,2)$, ii) $u(3,2)$, iii) $u(1,2)$.

21. Resolver $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\in[0,\pi]\,,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=0\,,\ u_t(x,0)=x \\ u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=0 \end{cases}$. [Separar variables $u=XT$, hallar las X_n y las T_n, usando todos los datos $=0$, y calcular los coeficientes de una serie imponiendo el dato inicial no nulo].

17. $\boxed{\begin{array}{l} u_{tt}-4u_{xx}=0\,,\ x\in[0,\pi]\,, t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=0\,,\ u_t(x,0)=\operatorname{sen}3x \\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{array}}$ **a]** $u(x,t)=XT\,,\ \frac{X''}{X}=\frac{T''}{4T}=-\lambda \to \begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=X(\pi)=0 \end{cases}$ $\to \lambda_n=n^2\,,\ n=1,2,\ldots\,,\ X_n=\{\operatorname{sen} nx\}\,.$

Y además $\begin{cases} T''+4\lambda T=0 \\ T(0)=0 \end{cases}$, $\mu^2+4n^2=0 \to T=c_1\cos 2nt+c_2\operatorname{sen}2nt \overset{d.i.}{\to} c_1=0\,,\ T_n=\{\operatorname{sen}2nt\}\,.$

Cumple la EDP, $u(x,0)=0$ y los datos de contorno la serie: $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\operatorname{sen}2nt\operatorname{sen}nx$.

Del otro dato inicial: $u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} 2nc_n\operatorname{sen}nx=\operatorname{sen}3x \to 6c_3=1$ y el resto de los $c_n=0$.

La solución es por tanto: $\boxed{u(x,t)=\frac{1}{6}\operatorname{sen}6t\operatorname{sen}3x}$ (fácil de comprobar).

b] $g(x)=\operatorname{sen}3x$ es impar y de periodo 2π y **su extensión g^* es ella misma**. D'Alembert da:

$$u=\frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t} g^*=\frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t}\operatorname{sen}3s\,ds=-\frac{\cos 3s}{12}\Big]_{x-2t}^{x+2t}=\frac{1}{12}\Big[\underbrace{\cos(3x-6t)}_{cc+ss}-\underbrace{\cos(3x+6t)}_{cc-ss}\Big]=\frac{\operatorname{sen}6t\operatorname{sen}3x}{6}\,.$$

3(sp20). a] $\mu=\pm\mathrm{i}$. $T_p=A\mathrm{e}^{-t}\to A=1,\ T=c_1\cos t+c_2\operatorname{sen}t+\mathrm{e}^{-t}$. $\begin{array}{l} c_1+1=1\,,\ c_1=0 \\ c_2-1=0\,,\ c_2=1 \end{array}$. $T=\mathrm{e}^{-t}+\operatorname{sen}t$.

b] $u(x,t)=XT \to \begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=X(\pi)=0 \end{cases}$ [formulario y datos de contorno] $\to X_n=\{\operatorname{sen}nx\}\,,\ n=1,2,\ldots$

Probamos en la EDP: $u=\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\operatorname{sen}nx \to \sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n''+n^2T_n\right]\operatorname{sen}nx=2\mathrm{e}^{-t}\operatorname{sen}x$ (ya desarrollada en senos)

Los datos inciales: $u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)\operatorname{sen}nx=\operatorname{sen}x$ (desarrollada), $u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} T_n'(0)\operatorname{sen}nx=0$

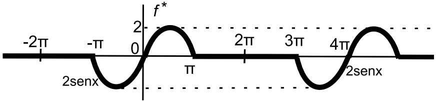
$\to T_1(0)=1\,,\ T_1'(0)=0$ y para $n>1$ se deduce que $T_n(0)=T_n'(0)=0 \to T_{n\geq 1}\equiv 0$.

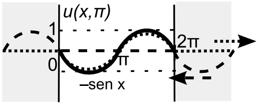
Basta resolver $\begin{cases} T_1'+T_1=2\mathrm{e}^{-t} \\ T_1(0)=1,\ T_1'(0)=1 \end{cases}$ (hecho en **a]**). La solución es $\boxed{u(x,t)=\left(\mathrm{e}^{-t}+\operatorname{sen}t\right)\operatorname{sen}x}$.

20. $$\boxed{\begin{array}{l} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\in[0,2\pi],\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=\begin{cases} 2\,\mathrm{sen}\,x\,,\ x\in[0,\pi] \\ 0\ \ ,\ \ x\in[\pi,2\pi]\end{cases} \\ u_t(x,0)=u(0,t)=u(2\pi,t)=0 \end{array}}$$

$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f^*(x+t)+f^*(x-t)\right]$, con f^* extensión impar y 4π-periódica de f. Para dibujar $u(x,\pi)$ basta llevar $\frac{1}{2}f$ a izquierda y derecha π unidades y sumar las gráficas.

[Sólo queda lo que va a la derecha con la mitad de altura].





Si $x\in[0,2\pi]$ siempre $x+\pi\in[\pi,3\pi]$, $x-\pi\in[-\pi,\pi]$ (en él $f^*(x)=2\,\mathrm{sen}\,x$, por ser impar):

$$u(x,\pi)=\tfrac{1}{2}\left[f^*(x+\pi)+f^*(x-\pi)\right]=\tfrac{1}{2}\left[0+2\,\mathrm{sen}(x-\pi)\right]=\boxed{-\,\mathrm{sen}\,x}\quad\forall x\in[0,2\pi]\,.$$

$$u=XT\ \to\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=X(2\pi)=0\end{cases},\ \lambda_n=\frac{n^2}{4}\,,\ X_n=\left\{\mathrm{sen}\,\frac{nx}{2}\right\},\ n=1,2,\dots\ \text{y}\ \begin{cases} T'+\lambda T=0 \\ T'(0)=0\end{cases}\to T_n=\left\{\cos\frac{nt}{2}\right\}.$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos\frac{nt}{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{nx}{2}\ \to\ u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\,\mathrm{sen}\,\frac{nx}{2}=\begin{cases}2\,\mathrm{sen}\,x\,,\ x\in[0,\pi] \\ 0\ \ ,\ \ x\in[\pi,2\pi]\end{cases}\ \to$$

$$c_n=\frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi}2\,\mathrm{sen}\,x\,\mathrm{sen}\,\frac{nx}{2}\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos\left(\tfrac{n}{2}-1\right)x-\cos\left(\tfrac{n}{2}+1\right)x\right]dx\underset{n\neq 2}{=}\frac{1}{\pi}\left[\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{n}{2}-1\right)\pi}{\frac{n}{2}-1}-\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{n}{2}+1\right)\pi}{\frac{n}{2}+1}\right]$$

$$=\frac{2\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{2}}{\pi}\left[\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n-2}\right]=-\frac{8\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{2}}{\pi(n^2-4)}=\begin{cases}0\,,\ n=2m \\ \frac{8}{\pi}\frac{(-1)^m}{(2m-1)^2-4}\,,\ n=2m-1\end{cases}.$$ Y es $c_2=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[1-\cos 2x]\,dx=1$.

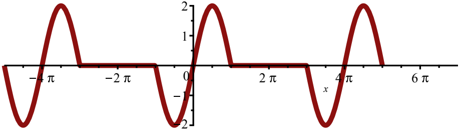
$$\boxed{u=\cos t\,\mathrm{sen}\,x+\frac{8}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m-1)^2-4}\cos\frac{(2m-1)t}{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{(2m-1)x}{2}}$$

$\to\ u(x,\pi)=-\,\mathrm{sen}\,x$, pues $\cos\pi=-1$, $\cos\frac{(2m-1)\pi}{2}=0$.

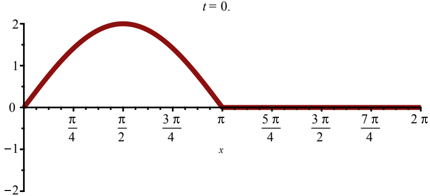
Definiendo la extensión (función a cachitos) y creando el dibujo animado (está en el campus):

problema 20

```
> f:=x->piecewise(-5*Pi<x and x<-3*Pi,2*sin(x),
   -3*Pi<x and x<-Pi,0,-Pi<x and x<Pi,2*sin(x),Pi<x and x<3*Pi,0,
   3*Pi<x and x<5*Pi,2*sin(x),5*pi<x and x<7*Pi,0):
  plot(f(x),x=-5*Pi..7*Pi,thickness=3);
```

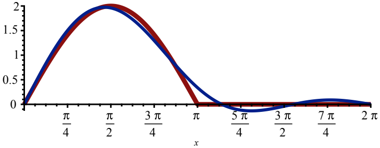



```
> with(plots):u:=t->1/2*(f(x-t)+f(x+t)):
  animate(plot,[u(t),x=0..2*Pi],t=0..4*Pi,thickness=3,frames=201);
```

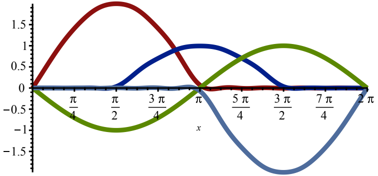


```
> Xn:=sin(n*x/2):
  cn:=int(f(x)*Xn,x=0..2*Pi)/Pi assuming n::integer:
  c2:=int(f(x)*sin(x),x=0..2*Pi)/Pi:S:=k->sum(cn*Xn,n=1..k):
  [c2,cn,S(5)];plot([f(x),S(3)],x=0..2*Pi,thickness=[3,2,2]);
```

$$\left[1,\ -\frac{8\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\left(n^2-4\right)\pi},\ \frac{8\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{3\pi}+\sin(x)+\frac{8\sin\left(\frac{3x}{2}\right)}{5\pi}-\frac{8\sin\left(\frac{5x}{2}\right)}{21\pi}\right]$$




```
> v:=t->cos(t)*sin(x)+8/Pi*sum((-1)^m/((2*m-1)^2-4)*
   cos((2*m-1)*t/2)*sin((2*m-1)*x/2),m=1..9):
  plot([v(0),v(Pi/2),v(Pi),v(2*Pi)],x=0..2*Pi,thickness=3);
```



16. b) $\boxed{\begin{array}{l} u_{tt}-u_{xx}=2x\,,\ x,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0 \end{array}}$ Las características de la ecuación de ondas son: $\left\{\begin{array}{l}\xi=x+t\\ \eta=x-t\end{array}\right.$.

$$\left\{\begin{array}{l} u_{xx}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta} \\ u_{tt}=u_{\xi\xi}-2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta} \end{array}\right. ,\ -4u_{\xi\eta}=2x \stackrel{\xi+\eta=2x}{\longrightarrow} \boxed{u_{\xi\eta}=-\tfrac{\xi+\eta}{4}}$$ forma canónica.

Podemos utilizar D'Alembert directamente:

$$u(x,t)=\tfrac{1}{2}\int_0^t\int_{x-[t-\tau]}^{x+[t-\tau]} 2s\,ds\,d\tau=\int_0^t\big[\tfrac{s^2}{2}\big]_{x-[t-\tau]}^{x+[t-\tau]}d\tau=\int_0^t 2x[t-\tau]\,d\tau=x\big[-(t-\tau)^2\big]_0^t=\boxed{xt^2}\,.$$

O, por ser $v=-\frac{1}{3}x^3$ solución de la EDP, con $w=u-v$ tendremos una homogéna más fácil:

$$\left\{\begin{array}{l} w_{tt}-w_{xx}=0 \\ w(x,0)=x^3/3,\ w_t(x,0)=0 \end{array}\right. \to\ w=\tfrac{1}{6}\big[(x+t)^3+(x-t)^3\big]=\tfrac{1}{3}x^3+xt^2\,,\ u=w+v=xt^2\,.$$

Mucho peor es calcularla con la forma canónica de arriba. Resumiendo algo los cálculos:

$$u_\xi=-\tfrac{1}{4}\xi\eta-\tfrac{1}{8}\eta^2+p(\xi)\,,\ u=-\tfrac{1}{8}\xi\eta(\xi+\eta)+p(\xi)+q(\eta)=\tfrac{1}{4}(xt^2-x^3)+p(x+t)+q(x-t)\,,$$

$$u_t=-\tfrac{xt}{2}+p'(x+t)-q'(x-t)\stackrel{d.i.}{\to}\left\{\begin{array}{l} u(x,0)=-x^3/4+p(x)+q(x)=0 \\ u_t(x,0)=p'(x)-q'(x)=0\to p(x)=q(x) \end{array}\right. \nearrow\ p(x)=q(x)=\tfrac{x^3}{8}\uparrow$$

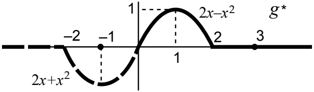
[No tiene sentido separar variables, pues es en todo $\mathbf{R}$ y no hay condiciones de contorno y, por tanto, ni autofunciones ni series de Fourier que son la base del método].

19. $\boxed{\begin{array}{l} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\geq 0\,, t\in\mathbf{R} \\ u_t(x,0)=\left\{\begin{smallmatrix} 2x-x^2,\ x\in[0,2] \\ 0\,,\ x\in[2,\infty) \end{smallmatrix}\right. \\ u(x,0)=u(0,t)=0 \end{array}}$ La solución es $u(x,t)=\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g^*(s)\,ds$, con g^* extensión impar de g a todo $\mathbf{R}$: $g^*(x)=\begin{cases} 2x+x^2 & \text{si } x\in[-2,0] \\ 2x-x^2 & \text{si } x\in[0,2] \\ 0 & \text{en el resto de } \mathbf{R} \end{cases}$.

Entonces: i) $u(5,2)=\frac{1}{2}\int_3^7 g^*=\frac{1}{2}\int_3^7 0\,ds=\boxed{0}$.

ii) $u(3,2)=\frac{1}{2}\int_1^5 g^*=\frac{1}{2}\int_1^2(2s-s^2)\,ds=\boxed{\frac{1}{3}}$.

iii) $u(1,2)=\frac{1}{2}\int_{-1}^3 g^* \underset{g^*\text{ impar}}{=} \frac{1}{2}\int_1^2(2s-s^2)\,ds=\boxed{\frac{1}{3}}$.



21. $\boxed{\begin{array}{l} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\in[0,\pi], t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=0\,,\ u_t(x,0)=x \\ u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=0 \end{array}}$ $u=X(x)\,T(t)\,,\ \frac{X''}{X}=\frac{T''}{T}=-\lambda \to \left\{\begin{smallmatrix} X''+\lambda X=0 \\ X'(0)=X'(\pi)=0 \end{smallmatrix}\right.$ $\to \lambda_n=n^2, n=0,1,\dots,\ X_n=\{\cos nx\}$ $\left[\text{con } X_0=\{1\}\right]$.

Y además $\left\{\begin{smallmatrix} T''+\lambda T=0 \\ T(0)=0 \end{smallmatrix}\right.$, $\mu^2+n^2=0 \to$ $\begin{array}{l} T=c_1+c_2t \to T_0=\{t\} \\ T=c_1\cos nt+c_2\operatorname{sen} nt \to T_n=\{\operatorname{sen} nt\}\,,\ n\geq 1 \end{array}$

Satisface EDP, $u(x,0)=0$ y datos de contorno la serie: $u(x,t)=\frac{c_0}{2}t+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\operatorname{sen} nt\cos nx$.

El otro dato inicial da: $u_t(x,0)=\frac{c_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}nc_n\cos nx=x \to c_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\pi$, y si $n\geq 1$:

$$c_n=\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx=\frac{2x}{n^2\pi}\operatorname{sen} nx\Big]_0^{\pi}-\frac{2}{n^2\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sen} nx\,dx=\frac{2}{n^3\pi}\left[(-1)^n-1\right]$$ (se anula si n par).

Luego $\boxed{u=\frac{\pi}{2}t-\frac{4}{\pi}\left[\operatorname{sen} t\cos x+\frac{1}{27}\operatorname{sen} 3t\cos 3x+\cdots\right]}=\frac{\pi}{2}t-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2n-1)t}{(2n-1)^3}\cos(2n-1)x$.