4.5. Separación de variables para Laplace. Ideas de unicidad

Los problemas para Laplace son de contorno. Los dos más importantes son:

Problema de Dirichlet: $\boxed{(\mathrm{P}_D)\begin{cases}\Delta u = F & \text{en } D\\ u = f & \text{en } \partial D\end{cases}}$ **Problema de Neumann:** $\boxed{(\mathrm{P}_N)\begin{cases}\Delta u = F & \text{en } D\\ u_{\mathbf{n}} = f & \text{en } \partial D\end{cases}}$

con D abierto acotado y $u_{\mathbf{n}}$ derivada según el vector normal unitario exterior **n**.

Si la ecuación está describiendo una distribución estacionaria de temperaturas en una placa, en (P_D) fijamos la temperatura en el borde y en (P_N) el flujo de calor en dirección normal al borde. Los problemas de valores iniciales no se llevan bien con Laplace pues pueden no tener 'dependencia continua' (variando poco los datos, varían mucho las soluciones).

(P_D) es un problema bien planteado (en los apuntes se prueba su unicidad).

Pero **para que** (P_N) **pueda tener solución es necesario que** F **y** f **satisfagan la relación**:

$$\boxed{\iint_D F\,dx\,dy = \oint_{\partial D} f\,ds}$$ [basta aplicar el teorema de la divergencia a ∇u para verlo],

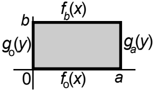
y si el problema de Neumann (P_N) **tiene solución, esta contiene una constante arbitraria.** Se dice que (P_N) 'tiene unicidad salvo constante', situación que es esperable, pues ecuación y condición de contorno sólo contienen derivadas.

Además se imponen a Laplace condiciones del tipo $u+au_{\mathbf{n}}=f$, $a>0$, y aparecen problemas mixtos con condiciones tipo Dirichlet en parte de ∂D, en otra parte de tipo Neumann... Todos tienen significado físico y **todos tienen solución única**.

Resolvemos problemas homogéneos y no homogéneos, en cartesianas y polares, de Dirichlet, de Neumann y mixtos. En cartesianas el problema de contorno será en x o en y según convenga, pero en polares será siempre en θ (para la EDO habitual, preferible a la de Euler en r).

Dirichlet homogéneo en un rectángulo

$$[\mathrm{P}_1]\ \begin{cases} \Delta u=0\,,\ \text{en } (0,a)\times(0,b) \\ u(x,0)=f_o(x)\,,\ u(x,b)=f_b(x) \\ u(0,y)=g_o(y)\,,\ u(a,y)=g_a(y) \end{cases}$$



Basta resolver los 4 problemas obtenidos anulando 3 de las 4 funciones y sumar las soluciones.

Resolvamos: $\begin{cases} \Delta u = 0\,,\ \text{en }\ (0,a)\times(0,b) \\ u(x,0)=f_o(x) \\ u(x,b)=u(0,y)=u(a,y)=0 \end{cases}$

$u(x,y)=X(x)Y(y)\ \rightarrow\ X''Y+XY''=0\ \rightarrow$

$-\frac{X''}{X}=\frac{Y''}{Y}=\lambda\ \rightarrow \begin{cases} X''+\lambda X=0\,,\ X(0)=X(a)=0 \\ Y''-\lambda Y=0\,,\ Y(b)=0 \end{cases}$

[poniendo $-\lambda$ salen $X''-\lambda X=0\,,\ Y''+\lambda Y=0$].

El problema para X tiene solución no trivial si $\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{a^2}\,,\ X_n=\left\{\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}\right\},\ n=1,2,\ldots$

Para esos λ_n es $Y_n=c_1\,e^{n\pi y/a}+c_2\,e^{-n\pi y/a}$, pero nos interesan las que cumplen $Y(b)=0$:

$$c_2=-c_1 e^{2n\pi b/a}\ \rightarrow\ Y_n=c_1 e^{n\pi b/a}\left(e^{n\pi[y-b]/a}-e^{n\pi[b-y]/a}\right)\ \rightarrow\ Y_n=\left\{\operatorname{sh}\frac{n\pi[b-y]}{a}\right\}$$

Probamos: $\boxed{u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\operatorname{sh}\frac{n\pi[b-y]}{a}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}}\rightarrow\ u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\operatorname{sh}\frac{n\pi b}{a}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}=f_o(x)$.

Suponiendo $f_o\in C^1$ a trozos, los c_n vienen dados por: $\boxed{c_n\operatorname{sh}\frac{n\pi b}{a}=\frac{2}{a}\int_0^a f_o(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}\,dx}$.

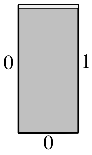
Análogos son los otros 3 problemas. Uno con estas mismas X_n y dos con las $Y_n=\left\{\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}\right\}$.

[En la práctica, anulando términos con cambios $w=u-v$, o menos subproblemas se llega a la solución. Lo único necesario para separar variables es que sea $u=0$ en $x=0\,,a$ o bien en $y=0\,,b$].

[En los apuntes se ve también aquí el problema no homogéneo de Dirichlet].

Ya dijimos que los problemas con parte Dirichlet y parte Neumann tienen todos solución única.

Ej 2. $\boxed{\begin{array}{l} u_{xx}+u_{yy}=0\,,\ (x,y)\in(0,1)\times(0,\pi) \\ u(x,0)=u_y(x,\pi)=u(0,y)=0,\ u(1,y)=1 \end{array}}$ Como en el [P_1], llevará $u(x,y)=X(x)Y(y)$ a



$$\left\{\begin{array}{l} Y''+\lambda Y=0\,,\ Y(0)=Y'(\pi)=0 \\ X''-\lambda X=0\,,\ X(0)=0 \end{array}\right. \to\ \lambda_n=\left(\tfrac{2n-1}{2}\right)^2,\ Y_n=\left\{\operatorname{sen}\tfrac{(2n-1)y}{2}\right\}.$$

Para esos λ es $X=c_1e^{(2n-1)x/2}+c_2e^{-(2n-1)x/2} \underset{X(0)=0}{\longrightarrow} c_2=-c_1\,,\ X_n=\left\{\operatorname{sh}\frac{(2n-1)x}{2}\right\}$.

Probamos entonces $u(x,y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sh}\frac{(2n-1)x}{2}\operatorname{sen}\frac{(2n-1)y}{2}$.

Para precisar las c_n imponemos el dato $u(1,y)=1$ que falta:

$$c_n \operatorname{sh}\tfrac{2n-1}{2}=\tfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\tfrac{(2n-1)y}{2}\,dy=\tfrac{4}{\pi(2n-1)}\left[1-\cos\tfrac{(2n-1)\pi}{2}\right]\ \to$$

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2n-1)\operatorname{sh}\frac{2n-1}{2}}\operatorname{sh}\frac{(2n-1)x}{2}\operatorname{sen}\frac{(2n-1)y}{2}\,.$$

Se prueba que las soluciones u de Laplace dadas por las series son realmente soluciones. Si los datos con C^1 a trozos (incluso si son discontinuos como en este ejemplo), la u tiene infinitas derivadas en el rectángulo abierto, es $\Delta u=0$ ahí y se toma el valor de contorno con continuidad para los puntos del borde en que los datos son continuos. La situación será totalmente análoga en el círculo. La situación es parecida a lo que ocurría con la ecuación del calor, pero no con la de ondas, en la que los picos iniciales se mantenían indefinidamente.

Problema de Neumann no homogéneo en un cuadrado

$$\boxed{[\mathrm{P}_2]\ \begin{cases} \Delta u = F(x,y)\,, & \text{en } (0,\pi)\times(0,\pi) \\ u_y(x,0)=u_y(x,\pi)=u_x(0,y)=u_x(\pi,y)=0 \end{cases}}$$

Sabemos que separando variables en $\Delta u=0$ salen $X''+\lambda X=0$, $Y''-\lambda Y=0$. Y los datos nos dan $X'(0)=X'(\pi)=0$, $Y'(0)=Y'(\pi)=0$. Podemos escoger $\{\cos nx\}$ ó $\{\cos ny\}$, $n=0,1,\dots$

Por ejemplo: $u(x,y)=X_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)\cos ny \ \rightarrow$

$$X_0''+\sum_{n=1}^{\infty}[X_n''-n^2X_n]\cos ny=\frac{B_0(x)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}B_n(x)\cos ny\,,\quad B_n(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}F(x,y)\cos ny\,dy\,.$$

Debemos resolver los infinitos problemas de contorno para EDOs:

$$X_0''=\tfrac{1}{2}B_0=\tfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}F(x,y)\,dy\,,\quad X_n''-n^2X_n=B_n\,,\ n\geq 1\,,\quad \text{con } X_n'(0)=X_n'(\pi)=0\,.$$

Las X_n si $n\geq 1$ quedan determinadas (el homogéneo, como vimos en 3.3, tiene sólo la $X\equiv 0$).
Pero $X_0''=0$, $X_0'(0)=X_0'(\pi)=0$ tiene soluciones no triviales $\big(\{1\}\big)$ y, según 3.3, para que haya solución para X_0 es necesario que sea $\int_0^{\pi}1\cdot B_0(x)\,dx=0$. Es decir, [P$_2$] **tiene solución sólo si** $\boxed{\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}F(x,y)\,dx\,dy=0}$ y entonces hay una C arbitraria (coherente con lo dicho en 4.2).

Ej 1. Resolvamos cuando $\boxed{F(x,y)=x-a}$. Sólo hay solución si $\iint_{\Box}F=0$, es decir, si $a=\frac{\pi}{2}$.

Entonces nos queda $X_0''=x-\frac{\pi}{2}$, pues, por suerte, $F(x,y)$ ya está desarrollada en $\{\cos ny\}$.

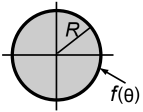
Por esta misma razón los B_n , y por tanto los X_n , son nulos si $n\geq 1$.

Integrando e imponiendo $X_0'(0)=X_0'(\pi)=0$ obtenemos $u(x,y)=\frac{1}{6}x^3-\frac{\pi}{4}x^2+C$.

$\big[$Si hubiéramos probado $u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}Y_n(y)\cos nx$ habría sido necesario desarrollar en serie$\big]$.

Laplace en polares. Dirichlet en un círculo.

Dirichlet $\boxed{[\mathrm{P}_D]\ \begin{cases}\Delta u = u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0\,,\ \text{en } r<R \\ u(R,\theta)=f(\theta)\,,\ \ \theta\in[0,2\pi)\end{cases}}$



$$u(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)\ \to\ \frac{r^2R''+rR'}{R}=-\frac{\Theta''}{\Theta}=\lambda\ \to\ \begin{cases}\Theta''+\lambda\Theta=0\\ r^2R''+rR'-\lambda R=0\end{cases}$$

Parece no haber condiciones para Θ, pero está claro que la solución **debe ser 2π-periódica en** θ, es decir, debe ser $\Theta(0)=\Theta(2\pi)$, $\Theta'(0)=\Theta'(2\pi)$. Para el problema periódico sabemos que:

$$\lambda_n=n^2\,,\ n=0,1,2,\dots,\ \ \Theta_0(\theta)=\{1\}\,,\ \ \Theta_n(\theta)=\{\cos n\theta,\operatorname{sen} n\theta\}\,.$$

Las R asociadas a esos autovalores son (ecuaciones de Euler con $\mu^2-n^2=0$):

$$R_0(r)=c_1+c_2\ln r\,,\ \ R_n(r)=c_1r^n+c_2r^{-n}\ \text{si}\ n\geq 1\,.$$

Para ser C^2 la solución debe estar **acotada cuando** $r\to 0$ (y físicamente es también necesario), así pues $c_2=0$ en ambos casos. Probamos, pues:

$$\boxed{u(r,\theta)=\frac{a_o}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}r^n\big[a_n\cos n\theta+b_n\operatorname{sen} n\theta\big]}\ \to\ \frac{a_o}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}R^n\big[a_n\cos n\theta+b_n\operatorname{sen} n\theta\big]=f(\theta)$$

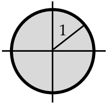
$$\to\ \boxed{a_n=\frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi}f(\theta)\cos n\theta\,d\theta\,,\ n=0,1,\dots,\ \ b_n=\frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi}f(\theta)\operatorname{sen} n\theta\,d\theta\,,\ n=1,2,\dots}$$

Como siempre, si el problema fuera no homogéneo llevaríamos a la EDP y al dato de contorno la serie con autofunciones del homogéneo:

$$u(r,\theta)=a_0(r)+\sum_{n=1}^{\infty}\big[a_n(r)\cos n\theta+b_n(r)\operatorname{sen} n\theta\big]\,.$$

Ejemplo de Dirichlet no homogéneo en un círculo

Ej 3. $\boxed{\begin{array}{l} u_{rr}+\frac{u_r}{r}+\frac{u_{\theta\theta}}{r^2}=4\,,\ r<1 \\ u(1,\theta)=\operatorname{sen}2\theta \end{array}}$ $\quad u=a_0(r)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[a_n(r)\cos n\theta+b_n(r)\operatorname{sen} n\theta\right]\rightarrow$



$$a_0''+\tfrac{1}{r}a_0'+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\left[a_n''+\tfrac{1}{r}a_n'-\tfrac{n^2}{r^2}a_n\right]\cos n\theta+\left[b_n''+\tfrac{1}{r}b_n'-\tfrac{n^2}{r^2}b_n\right]\operatorname{sen} n\theta\Big)=\underset{\text{constante ya desarrollada}}{4}\,,$$

Hay que resolver las ecuaciones: $ra_0''+a_0'=4r\,,\ \ r^2a_n''+ra_n'-n^2a_n=0\,,\ \ r^2b_n''+rb_n'-n^2b_n=0\,.$

La condición $u(1,\theta)=\operatorname{sen}2\theta$ impone: $a_n(1)=0\ \forall n;\ \ b_2(1)=1\,;\ \ b_n(1)=0\,,\ n\neq 2\,.$

La acotación cuando $r\rightarrow 0$ será la otra condición necesaria para preisar la solución de cada EDO de orden 2. Para a_0 necesitamos una solución particular, que se puede dar con la **fvc**:

$$\begin{vmatrix} 1 & \ln r \\ 0 & 1/r \end{vmatrix}=\frac{1}{r}\ \ ,\ \ a_{0p}=\ln r\int\frac{1\cdot 4\,dr}{1/r}-\int\frac{\ln r\cdot 4\,dr}{1/r}=\cdots=r^2\,.$$

o, mejor, tanteando una $a_{0p}=Ar^2$ ($a_{0p}=Ae^{2s}$ y no autovalor) $\rightarrow 2A+2A=4\,,\ A=1$. Así pues:

$$a_0=c_1+c_2\ln r+r^2\xrightarrow{\text{acotada}}c_2=0\xrightarrow{a_0(1)=0}c_1=-1\,,\qquad b_2=c_1r^2+c_2r^{-2}\xrightarrow{\text{acotada}}c_2=0\xrightarrow{b_2(1)=1}c_1=1\,.$$

Podemos asegurar además que el resto de a_n y b_n son cero (0 es claramente solución y no hay más por tener un problema de Dirichlet solución única). La solución del problema es:

$\boxed{u(r,\theta)=r^2-1+r^2\operatorname{sen}2\theta}$ $\quad$ [Se podría escribir en cartesianas: $u=(x+y)^2-1$].

[Sólo trabajando **en círculos o coronas circulares aparece el problema periódico**. En otros aparece el que indiquen las condiciones de contorno para Θ, que figurarán explícitamente (como en varios de los siguientes). **La acotación sigue exigiéndose cuando el origen esté en el borde del recinto**, pero será sustituido por condiciones explícitas si no es así].

Uno homogéneo con **condiciones mixtas** (y nuevas condiciones de contorno) que exige integrar.

Ej 5. $\boxed{\begin{array}{l}\Delta u=0\,,\ \text{en}\ \ r<1\,,\ 0<\theta<\pi\\ u_r(1,\theta)=\theta,\ u(r,0)=u_\theta(r,\pi)=0\end{array}}$ $\left\{\begin{array}{l}\Theta''+\lambda\Theta=0\\ \Theta(0)=\Theta'(\pi)=0\end{array}\right.$, $\lambda_n=\frac{(2n-1)^2}{4}$, $\Theta_n=\left\{\operatorname{sen}\frac{2n-1}{2}\,\theta\right\}$, $n=1,2,\ldots$

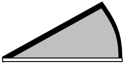
$$\to\ r^2R''+rR-\lambda_nR=0\,,\ R=c_1r^{n-\frac12}+c_2r^{-n+\frac12}\xrightarrow{R\text{ acot.}}R_n=\left\{r^{n-\frac12}\right\},\ u=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\,r^{n-\frac12}\operatorname{sen}\frac{2n-1}{2}\,\theta\,.$$

$$u_r(1,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\,\frac{2n-1}{2}\operatorname{sen}\frac{2n-1}{2}\,\theta=\theta\,,\ c_n=\frac{2}{2n-1}\,\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\theta\operatorname{sen}\frac{2n-1}{2}\,\theta\,d\theta=\cdots$$

$$\to\ u=\frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}\,r^{n-\frac12}\operatorname{sen}\frac{2n-1}{2}\,\theta\,.$$

Otro problema (mixto) no homogéneo y que no exige integrar. Se buscan como siempre lo primero las autofuciones del homogéneo:

Ej 6. $\boxed{\begin{array}{l}\Delta u=r^2\cos3\theta\,,\ r<2\,,\ 0<\theta<\frac{\pi}{6}\\ u(2,\theta)=u_\theta(r,0)=u\left(r,\frac{\pi}{6}\right)=0\end{array}}$ $\left\{\begin{array}{l}\Theta''+\lambda\Theta=0\\ \Theta'(0)=\Theta\left(\frac{\pi}{6}\right)=0\end{array}\right.$ $\to$



$$\lambda_n=9(2n-1)^2\,,\ \Theta_n=\left\{\cos3(2n-1)\,\theta\right\},\ n=1,2,\ldots\ \to\ u(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}R_n(r)\cos3(2n-1)\,\theta$$

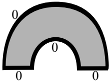
$$\to\ \sum_{n=1}^{\infty}\left[R_n''+\frac1r R_n'-\frac{9(2n-1)^2}{r^2}R_n\right]\cos3(2n-1)\,\theta=r^2\cos3\theta$$

$$\to\ \left\{\begin{array}{l}r^2R_1''+rR_1'-9R_1=r^4\\ R_1\ \text{acotada en}\ 0\,,\ R_1(2)=0\end{array}\right.\xrightarrow{R_p=Ar^4}R_1=c_1r^3+c_2r^{-3}+\frac17r^4\xrightarrow{\text{c.c.}}R_1=\frac17\left[r^4-2r^3\right].$$

Concluimos que la solución (única) es $u(r,\theta)=\frac17\left[r^4-2r^3\right]\cos3\theta$.

El recinto de este último problema de **Dirichlet no homogéneo** no toca el origen. La acotación se sustituye por un dato explícito sobre $r=1$ y todas las condiciones de contorno están a la vista:

Ej 7. $\boxed{\begin{array}{l}\Delta u = \operatorname{sen}\theta\,,\quad 1<r<2\,,\ 0<\theta<\pi \\ u(1,\theta)=u(2,\theta)=u(r,0)=u(r,\pi)=0\end{array}}$ Las autofunciones del homogéno las da:



$$\begin{cases}\Theta''+\lambda\Theta=0\\ \Theta(0)=\Theta(\pi)=0\end{cases} \to\ \lambda_n=n^2\,,\ \Theta_n=\{\operatorname{sen} n\theta\}\,,\ n=1,2,\dots \to\ u(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}R_n(r)\operatorname{sen} n\theta\,.$$

[La serie de cosenos y senos del Ej 3. no cumple los datos de contorno (no hay periodicidad)].

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big[R_n''+\tfrac{1}{r}R_n'-\tfrac{n^2}{r^2}R_n\Big]\operatorname{sen} n\theta=\operatorname{sen}\theta \quad \text{[ya desarrollada en senos].}$$

[Si fuese una $F(r,\theta)$ cualquiera, se desarrollaría en senos, viendo la r como constante].

Las dos condiciones para las R_n salen de las otras condiciones de contorno:

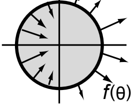
$$\sum_{n=0}^{\infty}R_n(1)\operatorname{sen} n\theta=\sum_{n=0}^{\infty}R_n(2)\operatorname{sen} n\theta=0\ \Rightarrow\ R_n(1)=R_n(2)=0\ \ \forall n\,.$$

Sólo tendrá solución no nula $r^2R_1''+rR_1'-R_1=r^2$ con los datos de contorno nulos de arriba.

$R_{1p}=Ar^2$ [$\lambda=2$ no autovalor] $\to A=\frac{1}{3} \to\ R_1=c_1r+c_2r^{-1}+\frac{1}{3}r^2 \xrightarrow{\text{c.c.}} c_1=-\frac{7}{9}\,,\ c_2=\frac{4}{9}\,.$

La solución es, por tanto: $u(r,\theta)=\big(\frac{1}{3}r^2-\frac{7}{9}r+\frac{4}{9}r^{-1}\big)\operatorname{sen}\theta\,.$

Neumann $\boxed{[\mathrm{P}_N]\ \begin{cases}\Delta u = 0\,,\ \text{en } r<R\\ u_r(R,\theta)=f(\theta)\,,\ \theta\in[0,2\pi)\end{cases}}$



Todo como Dirichlet, hasta la $u(r,\theta)$ que se prueba: $\boxed{u(r,\theta)=\frac{a_o}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} r^n\big[a_n\cos n\theta+b_n\,\mathrm{sen}\,n\theta\big]}$,

pero cambia la condición final: $u_r(R,\theta)=0+\sum_{n=1}^{\infty} nR^{n-1}\big[a_n\cos n\theta+b_n\,\mathrm{sen}\,n\theta\big]=f(\theta)\ \to$

$$\boxed{a_n=\frac{1}{n\pi R^{n-1}}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos n\theta\,d\theta\ ,\ \ b_n=\frac{1}{n\pi R^{n-1}}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,\mathrm{sen}\,n\theta\,d\theta\ ,\ n=1,2,\dots}$$

siempre que no tenga término independiente el desarrollo en senos y cosenos de $f(\theta)$.

Es decir, debe ser $\boxed{\int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\theta=0}$. Además (se va al derivar) a_o **queda indeterminado**

[Confirma visto en la primera página: Neumann tiene unicidad salvo constante y debía ser $\oint_{\partial D} f\,ds=\iint_D F\,dxdy=0$].

Ej 4. $\boxed{\begin{array}{l}\Delta u = 0\ \text{ en } r<1\,,\ 0<\theta<\pi\\ u_r(1,\theta)=\cos^3\theta,\, u_\theta(r,0)=u_\theta(r,\pi)=0\end{array}}$ Las ecuaciones para Θ y R que salen de $u=R\Theta$ son conocidas:

$$\begin{cases}\Theta''+\lambda\Theta=0\\ \Theta'(0)=\Theta'(\pi)=0\end{cases} \to\ \lambda_n=n^2\,,\ \Theta_n(\theta)=\big\{\cos n\theta\big\}\,,\ n=0,1,2,\dots\ \to$$

$$r^2R''+rR-n^2R=0\ \to\ \begin{array}{l}R_0=c_1+c_2\ln r\xrightarrow{R\text{ acot.}}R_0=\{1\}\\ R_n=c_1r^n+c_2r^{-n}\longrightarrow R_n=\big\{r^n\big\}\end{array}\ \to\ u(r,\theta)=a_o+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,r^n\cos n\theta\,.$$

$$u_r(1,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n\cos n\theta=\cos^3\theta=\tfrac{3}{4}\cos\theta+\tfrac{1}{4}\cos 3\theta\ \to\ a_1=\tfrac{3}{4}\,,\ a_3=\tfrac{1}{12}\,,\ \forall a_0\,,\ \text{el resto } 0$$

$$\to\ u(r,\theta)=C+\tfrac{3}{4}r\cos\theta+\tfrac{1}{12}r^3\cos 3\theta\,,\ \forall C\,.$$

23. Resolver: a) $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 \text{ en } (0,\pi)\times(0,\pi) \\ u(\pi,y)=5+\cos y \\ u(0,y)=u_y(x,0)=u_y(x,\pi)=0 \end{cases}$, b) $\begin{cases} \Delta u=y\cos x \text{ en } (0,\pi)\times(0,1) \\ u_x(0,y)=u_x(\pi,y)=0 \\ u_y(x,0)=u_y(x,1)=0 \end{cases}$.

4*(e21). Hallar un término de la serie solución de $\begin{cases} \Delta u=0\,,\ r<1\,,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2} \\ u(1,\theta)=\cos\theta\,,\ u(r,0)=u\big(r,\frac{\pi}{2}\big)=0 \end{cases}$.

27. Resolver por separación de variables a) $\begin{cases} \Delta u=0\,,\ 1<r<2 \\ u(1,\theta)=0,\ u(2,\theta)=1+\operatorname{sen}\theta \end{cases}$

24. Resolver y comprobar: b) $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0\,,\ r<1\,,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2} \\ u(1,\theta)=\cos 2\theta\,,\ u_\theta(r,0)=u_\theta\big(r,\frac{\pi}{2}\big)=0 \end{cases}$.

29. Resolver: $r^2R''+rR'-\frac{1}{4}R=7r^3$ y $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=7r\cos\frac{\theta}{2}\,,\ r<1\,,\ 0<\theta<\pi \\ u(1,\theta)=u_\theta(r,0)=u(r,\pi)=0 \end{cases}$.

4b(s20). Resolver $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0\,,\ r<1\,,\ 0<\theta<\frac{\pi}{3} \\ u(1,\theta)=\operatorname{sen}3\theta\,,\ u(r,0)=u\big(r,\frac{\pi}{3}\big)=0 \end{cases}$ por separación de variables.

6(d19). a] Hallar la solución general de $R''+\frac{1}{r}R'=4$ (haciendo $R'=v$ o mirándola como ecuación de Euler).

b] Resolver $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=4\,,\ r<1\,,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2} \\ u(1,\theta)=3\,,\ u_\theta(r,0)=u_\theta\big(r,\frac{\pi}{2}\big)=0 \end{cases}$. [Llevar serie con autofunciones del homogéneo a la EDP y precisar la única R_n no nula usando otros datos de contorno].

23. a) $\boxed{\begin{array}{l}\Delta u=0\,,\ (x,y)\in(0,\pi)\times(0,\pi)\\ u(\pi,y)=5+\cos y\,,\ u(0,y)=u_y(x,0)=u_y(x,\pi)=0\end{array}}$ $u=XY\ \to$

$$\begin{array}{l}Y''+\lambda Y=0\,,\ Y'(0)=Y'(\pi)=0\to\lambda_n=n^2,\ Y_n=\{\cos ny\},\ n\geq 0.\\ X''-n^2X=0\,,\ X(0)=0\to X_0=\{x\}\ \text{y}\ X_n=\{\operatorname{sh} nx\}\ \text{si}\ n>0\,.\end{array}\to u=c_0x+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\operatorname{sh} nx\cos ny$$

$$\to u(x,\pi)=c_0\pi+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\operatorname{sh} n\pi\ \cos ny=5+\cos y\ \to\ \boxed{u(x,y)=\frac{5x}{\pi}+\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh}\pi}\cos y}\,.$$

b) $\boxed{\begin{array}{l}\Delta u=y\cos x,\ (x,y)\in(0,\pi)\times(0,1)\\ u_x(0,y)=u_x(\pi,y)=u_y(x,0)=u_y(x,1)=0\end{array}}$ $u(x,y)=Y_0(y)+\sum_{n=1}^{\infty}Y_n(y)\cos nx\ \to$

$$Y_0'+\sum_{n=1}^{\infty}\left[Y_n''-n^2Y_n\right]\cos nx=y\cos x\ \text{ y además }\ Y_n'(0)=Y_n'(1)=0\ \to$$

$$\begin{array}{l}Y_1''-Y_1=y\\ Y_1'(0)=Y_1'(1)=0\end{array}\to Y_1=c_1e^y+c_2e^{-y}-y\xrightarrow{c.c.}Y_1=\frac{e^y-e^{1-y}}{1+e}-y\,.\ \text{ Los } Y_n\equiv 0\ \text{ para } n\geq 2\,.$$

Al ser Neumann sale (al resolver $Y_0''=0+$ c.c.) una C arbitraria: $\boxed{u=C+\left[\frac{e^y-e^{1-y}}{1+e}-y\right]\cos x}$.

4*(e21). $\boxed{\begin{array}{l}\Delta u=0\,,\ r<1\,,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\\ u(1,\theta)=\cos\theta,\ u(r,0)=u\big(r,\frac{\pi}{2}\big)=0\end{array}}$ $\xrightarrow{u=R\Theta}\left\{\begin{array}{l}\Theta''+\lambda\Theta=0\\ \Theta(0)=\Theta\big(\frac{\pi}{2}\big)=0\end{array}\right.,\ \lambda_n=4n^2,\ \Theta_n=\{\operatorname{sen} 2n\theta\}$.

Y además: $r^2R''+rR'-\lambda R=0\ \xrightarrow{\lambda=\lambda_n}\ \mu=\pm 2n\,,\ R=c_1r^{2n}+c_2r^{-2n}\ \xrightarrow{R\text{ acotada}}R_n=\{r^{2n}\}\,,\ n=1,2,\dots$

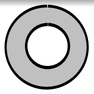
$$u=\sum_{n=1}^{\infty}b_nr^{2n}\operatorname{sen} 2n\theta\to u(1,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\operatorname{sen} 2n\theta=\cos\theta\,,\ b_n=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos x\operatorname{sen} 2nx\,dx\,.$$

Y si $n=1$, $b_1=\frac{8}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos^2x\operatorname{sen} x\,dx=-\frac{8}{3\pi}\cos^3x\Big]_0^{\pi/2}=\frac{8}{3\pi}$. $\boxed{u(r,\theta)=\frac{8}{3\pi}r^2\sin 2\theta+\cdots}$.

Soluciones Laplace V3 (homogéneos y cortos, el primero periódico)

27. a) $\boxed{\begin{array}{l}\Delta u=0\,,\ 1<r<2\\ u(1,\theta)=0\,,\ u(2,\theta)=1+\text{sen}\,\theta\end{array}}$ Sabemos que: $\left\{\begin{array}{l}\Theta''+\lambda\Theta=0\\ \Theta\ \ 2\pi\text{-per.}\end{array}\right.\to \lambda_n=n^2,$

$\Theta_n=\{\cos n\theta,\,\text{sen}\,n\theta\}\,,\ n=0,1,2,\dots$



$$\to\ r^2R''+rR'-n^2R=0\,,\ \mu=\pm n\ \to\ \begin{array}{l}R_0=c_1+c_2\ln r\ \xrightarrow[R(1)=0]{}\ R_0=\{\ln r\}\\ R_n=c_1r^n+c_2r^{-n}\ \longrightarrow\ R_n=\{r^n-r^{-n}\}\end{array}\ \to$$

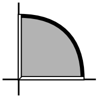
$u(r,\theta)=a_0\ln r+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(r^n-r^{-n}\right)[a_n\cos n\theta+b_n\,\text{sen}\,n\theta]$. Imponiendo el último dato:

$u(2,\,\theta)=a_0\ln 2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(2^n-\frac{1}{2^n}\right)[a_n\cos n\theta+b_n\,\text{sen}\,n\theta]=1+\text{sen}\,\theta\to a_0=\frac{1}{\ln 2}\,,\,b_1=\frac{2}{3}$ y resto 0.

$$u(r,\theta)=\tfrac{\ln r}{\ln 2}+\tfrac{2}{3}\left(r-\tfrac{1}{r}\right)\text{sen}\,\theta\,.$$

24. b) $\boxed{\begin{array}{l}u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0\,,\ \ r<1\,,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\\ u(1,\,\theta)=\cos 2\theta\,,\ u_\theta(r,0)=u_\theta\left(r,\,\frac{\pi}{2}\right)=0\end{array}}$ $\xrightarrow{u=R\Theta}\left\{\begin{array}{l}\Theta''+\lambda\Theta=0\ \text{(formulario)}\\ \Theta'(0)=\Theta'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\end{array}\right.$

y $u_\theta(r,0)\overset{\uparrow}{=}R(r)\Theta'(0)=0$, ...



$\to\ \lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{(\pi/2)^2}=4n^2,\ \Theta_n=\{\cos 2n\theta\}\,,\ n=0,1,2,\dots\ \left[\,\Theta_0=\{1\}\,\right]$ y además

$r^2R''+rR'-\lambda R=0\,,\ \mu=\pm 2n\,,\ R$ acotado $\to R_n=\{r^{2n}\}$ [También si $n=0,\ c_1+c_2\ln r\to\{1\}$].

Luego cumple casi todo la serie $u(r,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}\cos 2n\theta$. Sólo le falta:

$u(1,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}\cos 2n\theta=0+\cos 2\theta+0+\cdots\to a_2=1$ y demás $a_{2n}=0$. $\boxed{u=r^2\cos 2\theta}$

[Si fuese una $f(\theta)$ cualquiera, tendríamos que integrar: $a_0=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}f(\theta)\,d\theta,\ \ a_n=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}f(\theta)\cos 2n\theta\,d\theta$].

Comprobando: $u_r=2r\cos 2\theta\,,\ u_{rr}=2\cos 2\theta\,,\ u_{\theta\theta}=-4r^2\cos 2\theta\,,\ \Delta u=[2+2-4]\cos 2\theta=0\,,$

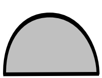
$u(1,\theta)=\cos 2\theta\,,\ \ u_\theta=-2r^2\text{sen}\,2\theta$ se anula si $\theta=0$ y si $\theta=\frac{\pi}{2}$.

29. $\boxed{r^2R''+rR'-\frac{1}{4}R=7r^3}$ Euler. $\mu(\mu-1)+\mu-\frac{1}{4}=0 \;\to\; \mu=\pm\frac{1}{2}\,,\; R=c_1r^{1/2}+c_2r^{-1/2}+R_p\,.$

$$\begin{vmatrix} r^{1/2} & r^{-1/2} \\ r^{-1/2}/2 & -r^{-3/2}/2 \end{vmatrix}=-\frac{1}{r}\,,\; R_p=-r^{-1/2}\!\int\frac{r^{1/2}\cdot 7r}{1/r}+r^{1/2}\!\int\frac{r^{-1/2}\cdot 7r}{1/r}=\big(\tfrac{14}{5}-2\big)r^3\,.\; R=c_1r^{1/2}+c_2r^{-1/2}+\frac{4r^3}{5}\,.$$

O mejor, $R_p=Ar^3$ $\big(R_p=A\mathrm{e}^{3s}$ en la de coeficientes constantes$\big)$ $\to\; 6A+3A-\frac{A}{4}=7\,,\; A=\frac{4}{5}\uparrow$

$$\boxed{\begin{array}{l} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=7r\cos\frac{\theta}{2}\,,\; r<1\,,\; 0<\theta<\pi \\ u(1,\theta)=u_\theta(r,0)=u(r,\pi)=0 \end{array}}$$

$u=R\Theta \;\to\; \begin{cases} \Theta''+\lambda\Theta=0 \\ \Theta'(0)=\Theta(\pi)=0 \end{cases} \;\to$ 

$\lambda_n=\frac{(2n-1)^2}{4},\; \Theta_n=\big\{\cos\frac{(2n-1)\theta}{2}\big\}\,,\; n=1,2,\ldots$

Llevando $u(r,\theta)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}R_n(r)\cos\frac{(2n-1)\theta}{2}$ a la EDP:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big[R_n''+\frac{1}{r}R_n'-\frac{(2n-1)^2}{4r^2}R_n\Big]\cos\frac{(2n-1)\theta}{2}=7r\cos\frac{\theta}{2}\ \text{(ya desarrollada)}.$$

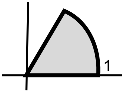
Del dato otro de contorno $u(1,\theta)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}R_n(1)\cos\frac{(2n-1)\theta}{2}=0$ deducimos que $R_n(1)=0\;\forall n$.

Y además las soluciones han de estar acotadas en $r=0$. Sólo será no nula la R_1, solución de:

$$\begin{cases} r^2R_1''+rR_1'-\frac{1}{4}R_1=7r^3 \\ R_1 \text{ acotada},\; R_1(1)=0 \end{cases} \xrightarrow{\mathbf{a}],\,ac.} R_1=c_1r^{1/2}+\frac{4}{5}r^3 \xrightarrow{R_1(1)=0} c_1=-\frac{4}{5}\,.$$

La solución es: $\boxed{u(r,\theta)=\frac{4}{5}\big[r^3-r^{1/2}\big]\cos\frac{\theta}{2}}\,.$

s20. $\boxed{\begin{array}{l} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0\,,\ r<1\,,\ 0<\theta<\frac{\pi}{3} \\ u(1,\theta)=\text{sen}\,3\theta\,,\ u(r,0)=u\big(r,\frac{\pi}{3}\big)=0 \end{array}}$ El formulario da las ecuaciones que aparecen separando variables y con los datos de contorno:



$$u=R\Theta\ \to\ \begin{cases}\Theta''+\lambda\Theta=0\\ \Theta(0)=\Theta(\pi/3)=0\end{cases},\ \lambda_n=9n^2\,,\ \Theta_n=\{\text{sen}\,3n\theta\}\,,\ n=1,2,\dots\ \to$$

$$r^2R''+rR'-9n^2R=0\,,\ R=c_1r^{3n}+c_2r^{-3n}\xrightarrow{R\text{ acot.}}R_n=\big\{r^{3n}\big\}\,,\ n=1,2,\dots\ u=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\,r^{3n}\,\text{sen}\,3n\theta\,.$$

Es $u(1,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\text{sen}\,3n\theta=\text{sen}\,3\theta\to c_1=1$ y resto $c_n=0$. $u(r,\theta)=r^3\,\text{sen}\,3\theta$ solución.

d19. $\boxed{R''+\frac{1}{r}R'=4}\xrightarrow{R'=v}v'=-\frac{v}{r}+4\,,\ \mathrm{e}^{\int a}=\mathrm{e}^{-\ln r}=\frac{1}{r}\,.\ v=\frac{C}{r}+\frac{1}{r}\int 4r=\frac{C}{r}+2r\,,\ \boxed{R=K+C\ln r+r^2}\,.$

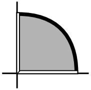
O bien, $r^2R''+rR'=4r^2$, $\mu(\mu-1)+\mu=0$, $\mu=0$ doble, $R=c_1+c_2\ln r+R_p$. Usando la **fvc**:

$\begin{vmatrix}1 & \ln r\\ 0 & 1/r\end{vmatrix}=\frac{1}{r}\,,\ R_p=\ln r\int\frac{1\cdot 4}{1/r}-\int\frac{\ln r\cdot 4}{1/r}=$ [partes] $=2r^2\ln r-2r^2\ln r+r^2=r^2\,.\ \boxed{R=c_1+c_2\ln r+r^2}\,.$

O mejor, $R_p=Ar^2$ ($R_p=A\mathrm{e}^{2s}$ en la de coeficientes constantes) $\to\ 2A+2A=4\,,\ A=1\ \nearrow$

$\boxed{\begin{array}{l} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=4\,,\ r<1,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2} \\ u(1,\,\theta)=3\,,\ u_\theta(r,0)=u_\theta\big(r,\frac{\pi}{2}\big)=0 \end{array}}\ \xrightarrow{u=R\Theta}\begin{cases}\Theta''+\lambda\Theta=0\\ \Theta'(0)=\Theta'\big(\frac{\pi}{2}\big)=0\end{cases},\ \lambda_n=4n^2\,,$

$\Theta_n=\big\{\cos 2n\theta\big\}\,,\ n=0,1,\dots\ \big[\ \Theta_0=\{1\}\ \big]$



$$u(r,\theta)=R_0(r)+\sum_{n=1}^{\infty}R_n(r)\cos 2n\theta\ \to\ R_0''+\frac{1}{r}R_0'+\sum_{n=1}^{\infty}\Big[R_n''+\frac{1}{r}R_n'-\frac{4n^2}{r^2}R_n\Big]\cos 2n\theta=4\,.$$

Del otro dato $u(1,\theta)=R_0(1)+\sum_{n=1}^{\infty}R_n(1)\cos 2n\theta=3$ sale $R_0(1)=3$ y las otras $R_n(1)=0$.

Y además las soluciones han de estar acotadas en $r=0$. Sólo será no nula la R_0, solución de:

$$\begin{cases}R_0''+\frac{1}{r}R_0'=4\\ R_0\ \text{acotada},\ R_0(1)=3\end{cases}\xrightarrow{\mathbf{a}],\,ac.}R_0=K+r^2\xrightarrow{R_0(1)=3}K=2\ \to\ \boxed{u(r,\theta)=2+r^2}\,.$$