Cálculo diferencial en $\mathbf{R}^n$

$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n$: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_1b_1+\cdots+a_nb_n=\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\phi$, $\|\mathbf{a}\|=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})^{1/2}$, $\underset{(n=3)}{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}$.

Segmento que une $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$: $\mathbf{x}=\mathbf{a}+t(\mathbf{b}-\mathbf{a})$, $t\in[0,1]$.

$B_r(\mathbf{a})\equiv\{\mathbf{x}:\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|<r\}$. $\mathbf{a}\in intA\subset\mathbf{R}^n$ si existe $B_r(\mathbf{a})\subset A$. $\partial A\equiv\{\mathbf{x}:\forall r, B_r(\mathbf{x})$ tiene puntos de A y de $\mathbf{R}^n\!-\!A\}$.

Campo escalar $f:D\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$. Gradiente $\nabla f=\big(\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\big)$ [perpendicular a $f(\mathbf{x})=C$].

$f\in C^n$ en A si sus derivadas parciales de orden n son continuas en todo $\mathbf{x}\in A$. $f\in C^2\Rightarrow f_{xy}=f_{yx}$.

Derivada de $f\in C^1$ en $\mathbf{a}\in intD$ según $\mathbf{v}$: $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a})=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(\mathbf{a}+h\mathbf{v})-f(\mathbf{a})}{h}=\nabla f(\mathbf{a})\cdot\mathbf{v}$ [direccional, si $\|\mathbf{v}\|=1$].

$f\in C^1$ en un entorno de $\mathbf{a}$ $\Rightarrow$ f diferenciable en $\mathbf{a}$ (tiene plano tangente) $\Rightarrow$ f continua en $\mathbf{a}$.

Plano tangente a la gráfica de $z=f(x,y)$ en (a,b): $z=f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)$.

Plano tangente a S en $(a,b,c)\in S$ dada por $F(x,y,z)=K$: $\nabla F(a,b,c)\cdot(x-a,y-b,z-c)=0$.

Función vectorial $\mathbf{c}(t)=\big(c_1(t),\dots,c_n(t)\big):\mathbf{R}\to\mathbf{R}^n$. $\mathbf{c}'(t)=\big(c_1'(t),\dots,c_n'(t)\big)$. Recta tangente: $\mathbf{x}=\mathbf{c}(t_o)+s\mathbf{c}'(t_o)$.

Campo vectorial $\mathbf{f}=(f_1,\dots,f_m):D\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$. Matriz diferencial o jacobiana de $\mathbf{f}$: $\mathbf{Df}(\mathbf{x})\equiv\begin{pmatrix}\partial f_1/\partial x_1&\cdots&\partial f_1/\partial x_n\\\cdots&\cdots&\cdots\\\partial f_m/\partial x_1&\cdots&\partial f_m/\partial x_n\end{pmatrix}$.

Regla de la cadena: $\mathbf{R}^p\xrightarrow{\mathbf{g}}\mathbf{R}^n\xrightarrow{\mathbf{f}}\mathbf{R}^m$, $\mathbf{g}$ diferenciable en $\mathbf{a}$, $\mathbf{f}$ diferenciable en $\mathbf{b}=\mathbf{g}(\mathbf{a})$ $\Rightarrow$ $\mathbf{D}(\mathbf{f}\circ\mathbf{g})(\mathbf{a})=\mathbf{Df}(\mathbf{b})\mathbf{Dg}(\mathbf{a})$.

[En particular: $f(\mathbf{c}(t))\to\frac{df}{dt}=\nabla f(\mathbf{c}(t))\cdot\mathbf{c}'(t)=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}$, $f\big(x(r,s),y(r,s)\big)\to\begin{matrix}f_r=f_xx_r+f_yy_r\\f_s=f_xx_s+f_yy_s\end{matrix}$].

$\operatorname{div}\mathbf{f}=\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial f_n}{\partial x_n}$, $\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$, $\operatorname{rot}\mathbf{f}=\nabla\times\mathbf{f}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\\partial/\partial x&\partial/\partial y&\partial/\partial z\\f&g&h\end{vmatrix}=\big(h_y-g_z\,,f_z-h_x\,,g_x-f_y\big)$.

Si $n=2$: $\mathbf{f}=(f,g)$, $\operatorname{div}\mathbf{f}=f_x+g_y$, $\Delta f=f_{xx}+f_{yy}=f_{rr}+\frac{1}{r}f_r+\frac{1}{r^2}f_{\theta\theta}$. $\operatorname{rot}(\nabla f)=\mathbf{0}$, $\operatorname{div}(\nabla\times\mathbf{f})=0$.

Cálculo integral en $\mathbf{R}^n$

Integrales dobles: f continua en $R=[a,b]\times[c,d]$ $\Rightarrow$ $\iint_R f=\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx=\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$.

c,d continuas en $[a,b]$, f continua en $D=\{(x,y):a\le x\le b, c(x)\le y\le d(x)\}$ $\Rightarrow$ $\iint_D f=\int_a^b\int_{c(x)}^{d(x)} f\,dy\,dx$

a,b continuas en $[c,d]$, f continua en $D=\{(x,y):c\le y\le b, a(y)\le x\le b(y)\}$ $\Rightarrow$ $\iint_D f=\int_c^d\int_{a(y)}^{b(y)} f\,dx\,dy$

Área de D: $A=\iint_D dx\,dy$. Volumen bajo $f(x,y)\ge 0$ en D: $V=\iint_D f\,dx\,dy$.

Cambios de variable: $\mathbf{g}$: $(u,v)\to\big(x(u,v),y(u,v)\big)$ de C^1, inyectiva en D^*, $\mathbf{g}(D^*)=D$ y f integrable. Entonces:
$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_{D^*}f\big(x(u,v),y(u,v)\big)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|du\,dv$, con $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}x_u&x_v\\y_u&y_v\end{vmatrix}$ [determinante jacobiano].

En particular: $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_{D^*}r\,f\big(r\cos\theta,r\operatorname{sen}\theta\big)\,dr\,d\theta$.

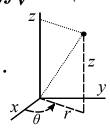
Integrales triples: f continua en $B=[a,b]\times[c,d]\times[p,q]$ $\Rightarrow$ $\iiint_B f=\int_p^q\int_c^d\int_a^b f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ (o las otras 5)

$V=\{(x,y,z):a\le x\le b, c\le y\le d(x), p(x,y)\le z\le q(x,y)\}$ $\Rightarrow$ $\iiint_V f=\int_a^b\int_{c(x)}^{d(x)}\int_{p(x,y)}^{q(x,y)}f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$.

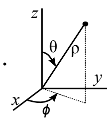
Volumen de $V=\iiint_V dx\,dy\,dz$. Masa de V: $M=\iiint_V D(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$, $D(x,y,z)$ densidad.

Cambios: $\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iiint_{V^*}f\big(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\big)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|du\,dv\,dw$.

Cilíndricas: $\begin{matrix}x=r\cos\theta\\y=r\operatorname{sen}\theta\\z=z\end{matrix}$ $\left[\begin{matrix}r\ge 0, 0\le\theta<2\pi\\\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right|=r\end{matrix}\right]$.



Esféricas: $\begin{matrix}x=\rho\operatorname{sen}\theta\cos\phi\\y=\rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\\z=\rho\cos\theta\end{matrix}$ $\left[\begin{matrix}\rho\ge 0, 0\le\theta\le\pi, 0\le\phi<2\pi\\\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)}\right|=\rho^2\operatorname{sen}\theta\end{matrix}\right]$.



Integrales de línea: $\mathbf{c}(t)$: $[a,b]\to\mathbf{R}^n$, C^1 a trozos, describiendo curva C . $L=\int_a^b\|\mathbf{c}'(t)\|\,dt$ longitud de C .

f campo **escalar**: $\int_C f\,ds\equiv\int_{\mathbf{c}}f\,ds\equiv\int_a^b f\big(\mathbf{c}(t)\big)\,\|\mathbf{c}'(t)\|\,dt$ [independiente de la parametrización].

$\mathbf{f}$ campo **vectorial**: $\int_{\mathbf{c}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_a^b\mathbf{f}\big(\mathbf{c}(t)\big)\cdot\mathbf{c}'(t)\,dt$ [salvo el signo, independiente de la parametrización].

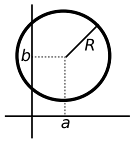
Si $\mathbf{f}=\nabla U$ [U potencial, $\mathbf{f}$ conservativo], $\int_{\mathbf{c}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=U(\mathbf{c}(b))-U(\mathbf{c}(a))$ [independiente del camino].

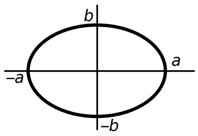
$\big(f(x,y),g(x,y)\big)$ conservativo $\Rightarrow$ $f_y\equiv g_x$. $\big(f(x,y,z),g(x,y,z),h(x,y,z)\big)$ conservativo $\Rightarrow$ $\operatorname{rot}\mathbf{f}\equiv\mathbf{0}$.

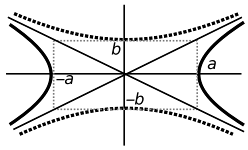
Teor. Green: $D\subset\mathbf{R}^2$, ∂D curva cerrada simple, $\mathbf{f}=(f,g)\in C^1(D)$ $\Rightarrow$ $\iint_D[\,g_x-f_y\,]\,dx\,dy=\oint_{\partial D}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}$.

Cónicas sencillas: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$.

$x^2+y^2=R^2 \rightarrow$
$\mathbf{c}(t)=(R\cos t, R\,\mathrm{sen}\,t)$,
paramétricamente.

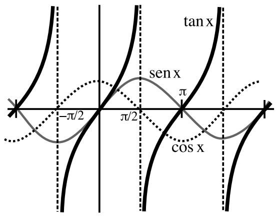






$y=ax^2+bx+c$
$x=ay^2+by+c$ parábolas.
$xy=C$ hipérbolas.

Algunas propiedades de las funciones trigonométricas



$\mathrm{sen}\,k\pi=\cos\frac{(2k-1)\pi}{2}=0$, $\cos k\pi=(-1)^k$, $\mathrm{sen}\,\frac{(2k-1)\pi}{2}=(-1)^{k+1}$.

$\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6}=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3}=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\arctan\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\pm\frac{\pi}{6}$, $\arctan(\pm 1)=\pm\frac{\pi}{4}$, $\arctan\left(\pm\sqrt{3}\right)=\pm\frac{\pi}{3}$.

$\mathrm{sen}(a\pm b)=\mathrm{sen}\,a\cos b\pm\cos a\,\mathrm{sen}\,b$, $\cos(a\pm b)=\cos a\cos b\mp\mathrm{sen}\,a\,\mathrm{sen}\,b$.

$\mathrm{sen}\,2a=2\,\mathrm{sen}\,a\cos a$, $\cos 2a=\cos^2 a-\mathrm{sen}^2 a$, • $\mathrm{sen}^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}$, $\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}$, $\mathrm{sen}^3 a=\frac{3\,\mathrm{sen}\,a-\mathrm{sen}\,3a}{4}$, $\cos^3 a=\frac{3\cos a+\cos 3a}{4}$.

$\mathrm{sen}\,a\ \mathrm{sen}\,b=\frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$, $\cos a\ \cos b=\frac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2}$, $\mathrm{sen}\,a\ \cos b=\frac{\mathrm{sen}(a+b)+\mathrm{sen}(a-b)}{2}$.

$[\mathrm{sen}\,x]'=\cos x$, $[\cos x]'=-\,\mathrm{sen}\,x$, $[\tan x]'=1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$, $[\arctan x]'=\frac{1}{1+x^2}$.

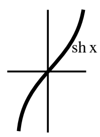
Para integrar $\mathrm{sen}^m\cos^n$ con m y n pares se usan las fórmulas •.

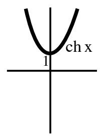
Si alguna de las dos e impar, son casi inmediatas [tras utilizar, tal vez, que $\mathrm{sen}^2+\cos^2=1$].

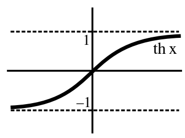
Las integrales $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$ se convierten en trigonométricas haciendo $x=a\,\mathrm{sen}\,u$.

Se integran por partes $\int x^n\,\mathrm{sen}\,x\,dx$, $\int x^n\cos x\,dx$, $\int x^n e^{ax}dx$, $\int x^n\ln x\,dx$, ...

Funciones hiperbólicas







$\mathrm{sh}\,x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $\mathrm{ch}\,x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\mathrm{th}\,x=\frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x}$.

$[\mathrm{sh}\,x]'=\mathrm{ch}\,x$, $[\mathrm{ch}\,x]'=\mathrm{sh}\,x$, $[\mathrm{th}\,x]'=1-\mathrm{th}^2 x=\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$.

Ecuaciones diferenciales ordinarias

EDOs de primer orden: $\boxed{y'=f(x,y)}$ [f, f_y continuas en entorno de $(a,b)\Rightarrow$ solución única con $y(a)=b$].

Algunas ecuaciones resolubles: **Separables**: $y'=\frac{p(x)}{q(y)} \rightarrow \int q(y)\,dy=\int p(x)\,dx+C$.

Se convierten en separables: $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$, con $z=\frac{y}{x}$; $y'=f(ax+by)$, con $z=ax+by$.

Lineales: Homogénea $y'=a(x)y \rightarrow y=C\,e^{\int a(x)dx}$.

No homogénea $y'=a(x)y+f(x) \rightarrow y=Ce^{\int a(x)dx}+e^{\int a(x)dx}\int e^{-\int a(x)dx}f(x)dx$ [sgh + y_p].

Exactas: $M(x,y)+N(x,y)\,y'=0$ con $M=U_x$, $N=U_y$ [$M_y\equiv N_x$] $\rightarrow U(x,y)=C$.

EDOs lineales de orden 2: [n] $\boxed{y''+a(x)y'+b(x)y=f(x)}$, $a,b,f\in C(I)$. $|W|(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ wronskiano.

> Si $x_o\in I$, [n] tiene una sola solución con los datos iniciales $y(x_o)=y_o$, $y'(x_o)=y_o'$.
> Si y_1 , y_2 son soluciones de la homogénea ($f\equiv 0$) con $|W|(s)\neq 0$ para $s\in I$, la solución general de la homogénea es: $y=c_1y_1+c_2y_2$.
> Si y_p es una solución de [n], la solución general de [n] es: $y=c_1y_1+c_2y_2+y_p$.
> Una solución particular de [n] es: $y_p=y_2\int\frac{y_1 f}{|W|}dx-y_1\int\frac{y_2 f}{|W|}dx$ [fvc].
> Si $b(x)\equiv 0$, $y'=v$ lleva [n] a lineal de primer orden en v .
> y_1 solución de la homogénea $\Rightarrow y_2=y_1\int e^{-\int a\,dx}y_1^{-2}dx$ otra solución de la homogénea.

[Salvo en los casos conocidos las soluciones se calculan probando series de potencias en la ecuación].

Coeficientes constantes: $\boxed{y''+ay'+by=0}$ $\quad \mu^2+a\mu+b=0$

$\mu_1 \neq \mu_2$ reales $\longrightarrow y = c_1 e^{\mu_1 x} + c_2 e^{\mu_2 x}$
μ doble (real) $\longrightarrow y = (c_1+c_2x)\, e^{\mu x}$
$\mu = p \pm i\, q \longrightarrow y = (c_1 \cos qx + c_2 \operatorname{sen} qx)\, e^{px}$

Método de coeficientes indeterminados para hallar y_p de $y''+ay'+by=f(x)$:

Si $f(x)=p_m(x)$, p_m polinomio de grado m, y $\mu=0$ no autovalor hay solución particular $y_p=P_m(x)$. Si $\mu=0$ es autovalor de multiplicidad r, hay $y_p=x^r P_m(x)$.
Si $f(x)=e^{\mu x}p_m(x)$, p_m de grado m, y μ no autovalor hay solución $y_p=e^{\mu x}P_m(x)$. Si μ es autovalor de multiplicidad r, hay $y_p=x^r e^{\mu x}P_m(x)$.
Si $f(x)=e^{px}\big[p_j(x)\cos qx+q_k(x)\operatorname{sen} qx\big]$, p_j, q_k de grados j, k, y $p\pm i\, q$ no autovalor hay $y_p=e^{px}\big[P_m(x)\cos qx+Q_m(x)\operatorname{sen} qx\big]$ con P_m y Q_m de grado $m=\max\{j,k\}$. Si $p\pm i\, q$ es autovalor hay $y_p=x\, e^{px}\big[P_m(x)\cos qx+Q_m(x)\operatorname{sen} qx\big]$.

Euler: $\boxed{x^2y''+axy'+by=0}$ $\quad \mu(\mu-1)+a\mu+b=0$

$\mu_1 \neq \mu_2$ reales $\longrightarrow y = c_1 x^{\mu_1} + c_2 x^{\mu_2}$
μ doble (real) $\longrightarrow y = (c_1+c_2 \ln x)\, x^{\mu}$
$\mu = p \pm q\, i \longrightarrow y = \big[c_1 \cos(q\ln x)+c_2 \operatorname{sen}(q \ln x)\big]\, x^p$

Una y_p de $x^2y''+axy'+by=h(x)$ se obtiene de la [fvc] (con $f(x)=h(x)/x^2$), o utilizando que con $x=e^s$ se convierte en $y''(s)+(a-1)y'(s)+by(s)=h(e^s)$.

Problemas de contorno para EDOs y serie de Fourier

$$(\mathrm{P_s}) \begin{cases} [py']'-qy+\lambda ry=0 \\ \alpha y(a)-\alpha' y'(a)=\beta y(b)+\beta' y'(b)=0 \end{cases}, \quad p\in C^1,\ q,r \text{ continuas, } p,r>0 \text{ en } [a,b],\quad |\alpha|+|\alpha'|,\ |\beta|+|\beta'|\neq 0.$$

Los $\lambda_n \to \infty$. Las $\{y_n\}$ son espacio vectorial de dimensión 1 y cada y_n tiene $n-1$ ceros en (a,b). $\langle y_n, y_m\rangle \equiv \int_a^b r\, y_n\, y_m\, dx = 0$, si $n\neq m$. Si $\alpha\cdot\alpha'\geq 0$, $\beta\cdot\beta'\geq 0$ y $q(x)\geq 0$ en $[a,b] \Rightarrow \lambda_n \geq 0$.

Para escribir $y''+a(x)y'+b(x)y=f(x)$ en forma autoadjunta, se multiplica por $e^{\int a}$.

El **no homogéneo** $(\mathrm{P_f}) \begin{cases} \big[p(x)y'\big]'+g(x)y=f(x) \\ \alpha y(a)-\alpha' y'(a)=\beta y(b)+\beta' y'(b)=0 \end{cases}$ tiene 1 solución cuando el homogéneo $(\mathrm{P_h})$ tiene sólo la solución $y\equiv 0$.
Cuando $(\mathrm{P_h})$ tiene soluciones no triviales $\{y_h\}$, $(\mathrm{P_f})$ tiene $\begin{matrix}\text{infinitas}\\ \text{ninguna}\end{matrix}$ según sea $\int_a^b f(x)\, y_h(x)\, dx \begin{matrix} =0 \\ \neq 0\end{matrix}$.

Si f es C^1 a trozos en $[a,b]$ la serie de Fourier $\sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x)$, con $c_n=\frac{\langle f, y_n\rangle}{\langle y_n, y_n\rangle}$, converge hacia $f(x)$ en los $x\in(a,b)$ en que f es continua y en los x en que es discontinua hacia $\frac{1}{2}\big[f(x^-)+f(x^+)\big]$.

Problemas separados conocidos para $\boxed{y''+\lambda y=0}$ (ya en forma autoadjunta, $r=1$, $q=0$):

	senos	**cosenos**	**senos impares**	**cosenos impares**
c. contorno	$y(0)=y(L)=0$	$y'(0)=y'(L)=0$	$y(0)=y'(L)=0$	$y'(0)=y(L)=0$
λ_n	$\frac{n^2\pi^2}{L^2}$, $n=1,2,\ldots$	$\frac{n^2\pi^2}{L^2}$, $n=0,1,2,\ldots$	$\frac{[2n-1]^2\pi^2}{2^2L^2}$, $n=1,2,\ldots$	$\frac{[2n-1]^2\pi^2}{2^2L^2}$, $n=1,2,\ldots$
y_n, $\langle y_n, y_n\rangle$	$\left\{\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\right\}$, $\frac{L}{2}$	$\left\{\cos\frac{n\pi x}{L}\right\}$, $\underset{(n=0)}{L}$ ó $\frac{L}{2}$	$\left\{\operatorname{sen}\frac{[2n-1]\pi x}{2L}\right\}$, $\frac{L}{2}$	$\left\{\cos\frac{[2n-1]\pi x}{2L}\right\}$, $\frac{L}{2}$

Por tanto, en estos cuatro casos es $c_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\, y_n(x)\, dx$ (poniendo $\frac{c_0}{2}$ en la series de cosenos).

Condiciones **periódicas**: $y(-L)=y(L)$, $y'(-L)=y'(L) \longrightarrow y_n=\left\{\cos\frac{n\pi x}{L}, \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\right\}$, $n=0,1,\ldots$ $\big[\, y_0=\{1\}\,\big]$.

La serie en **senos y cosenos** de $f(x)$ en $[-L,L]$: $f(x)=\frac{a_o}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big[a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\Big]$, con $a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\, dx$, $n=0,1,2,\ldots$, $b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\, dx$, $n=1,2,\ldots$, converge a $f(x)$ en los x en que su extensión $2L$-periódica es continua (y en los otros x hacia $\frac{1}{2}\big[f(x^-)+f(x^+)\big]$).
La serie en $\begin{matrix}\textbf{senos}\\ \textbf{cosenos}\end{matrix}$ converge hacia la extensión $\begin{matrix}\textbf{impar}\\ \textbf{par}\end{matrix}$ y $2L$-periódica de la f.

EDPs de primer orden

$\boxed{A(x,y)\,u_y+B(x,y)\,u_x=H(x,y)\,u+F(x,y)}$ $\quad \frac{dy}{dx}=\frac{A(x,y)}{B(x,y)} \to$ características $\xi(x,y)=K$.

$$\begin{cases}\xi=\xi(x,y)\\ \eta=y\end{cases} \to \; A\,u_\eta=H\,u+F \quad ; \quad \begin{cases}\xi=\xi(x,y)\\ \eta=x\end{cases} \to \; B\,u_\eta=H\,u+F\ .$$

EDPs de 2° orden

$$\boxed{Au_{yy}+Bu_{xy}+Cu_{xx}+Du_y+Eu_x+Hu=F} \quad \begin{cases}\xi=px+qy\\ \eta=rx+sy\end{cases} \to \begin{array}{l} u_{yy}=q^2u_{\xi\xi}+2qs\,u_{\xi\eta}+s^2u_{\eta\eta}\\ u_{xy}=pq\,u_{\xi\xi}+(ps+qr)u_{\xi\eta}+rs\,u_{\eta\eta}\\ u_{xx}=p^2u_{\xi\xi}+2pr\,u_{\xi\eta}+r^2u_{\eta\eta}\end{array}$$

Hiperbólicas $(B^2-4AC>0)$

$$\begin{cases}\xi=x-\frac{B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}\,y\\ \eta=x-\frac{B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}\,y\end{cases} \to \boxed{u_{\xi\eta}+\cdots=F^*}$$

Parabólicas $(B^2-4AC=0)$

$$\begin{cases}\xi=x-\frac{B}{2A}\,y\\ \eta=y\end{cases} \to \boxed{u_{\eta\eta}+\cdots=F^*}$$

Elípticas $(B^2-4AC<0)$

$$\begin{cases}\xi=\frac{2Ax-By}{\sqrt{4AC-B^2}}\\ \eta=y\end{cases} \to \boxed{u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\cdots=F^*}$$

Formas canónicas resolubles: $\boxed{u_{\eta\eta}+E^*u_\eta+H^*u=F^*}$, $\boxed{u_{\xi\eta}+D^*u_\xi=F^*}$, $\boxed{u_{\xi\eta}+E^*u_\eta=F^*}$.

Separación de variables para calor

Tienen solución única $\begin{cases}u_t-ku_{xx}=F(x,t),\ x\in(0,L),\ t>0\\ u(x,0)=f(x)\ ,\ \text{c.contorno físicas}\end{cases}$.

$$\begin{array}{l}u(0,t)=h_0(t)\\ u(L,t)=h_L(t)\end{array} ; \quad \begin{array}{l}u_x(0,t)=h_0(t)\\ u_x(L,t)=h_L(t)\end{array} ; \quad \begin{array}{l}u(0,t)-au_x(0,t)=h_0(t)\\ u(L,t)+bu_x(L,t)=h_L(t)\end{array} ,\ a,b>0$$

[temperaturas o flujo dados o radiación libre]

Separando variables en la homogénea: $u_t-ku_{xx}=0$, $u=XT \;\to\; X''+\lambda X=0$, $T'+\lambda kT=0$.

En problemas no homogéneos se prueban series de autofunciones del homogéneo, con $T_n(t)$ que se determinan llevando la serie a la ecuación con F desarrollada y usando el dato inicial.

Si las condiciones de contorno no son homogénas hay que hacer un cambio de variable $w=u-v$.

En particular $v(x,t)=\big[1-\frac{x}{L}\big]h_0(t)+\frac{x}{L}h_L(t)$ satisface $v(0,t)=h_0(t)$, $v(L,t)=h_L(t)$.

Ecuación de ondas

La solución única de $\begin{cases}u_{tt}-c^2u_{xx}=F(x,t)\ ,\ x,t\in\mathbf{R}\\ u(x,0)=f(x)\ ,\ u_t(x,0)=g(x)\end{cases}$ es:

$$\boxed{u(x,t)=\tfrac{1}{2}\big[f(x+ct)+f(x-ct)\big]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(s)\,ds+\frac{1}{2c}\int_0^t\int_{x-c[t-\tau]}^{x+c[t-\tau]}F(s,\tau)\,ds\,d\tau}$$

Si $F=0$, $\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2c}\int_0^x g$ viaja hacia la derecha y $\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2c}\int_0^x g$ hacia la izquierda.

$$\begin{cases}u_{tt}-c^2u_{xx}=F,\ x\ge0,t\in\mathbf{R}\\ u(x,0)=f\ ,\ u_t(x,0)=g\\ u(0,t)=0\end{cases} ,\quad \begin{cases}u_{tt}-c^2u_{xx}=F,\ x\in[0,L],t\in\mathbf{R}\\ u(x,0)=f\ ,\ u_t(x,0)=g\\ u(0,t)=u(L,t)=0\end{cases} \to \begin{cases}u_{tt}-c^2u_{xx}=F^*(x,t)\ ,\ x,t\in\mathbf{R}\\ u(x,0)=f^*(x),\ u_t(x,0)=g^*(x)\end{cases}$$

f^*, g^*, F^* extensiones impares de $f(x)$, $g(x)$, $F(x,t)$ respecto a $x=0$ ó a $x=0$ y $x=L$.

Separando variables: $u_{tt}-c^2u_{xx}=0$, $u=XT \;\to\; X''+\lambda X=0$, $T''+\lambda c^2T=0$.

Separación de variables para Laplace

$\begin{cases}\Delta u=F\ \text{en}\ D\\ u=f\ \text{en}\ \partial D\end{cases}$ solución única. Unicidad salvo constante $\begin{cases}\Delta u=F\ \text{en}\ D\\ u_{\mathbf{n}}=f\ \text{en}\ \partial D\end{cases}$ si $\iint_D F\,dxdy=\oint_{\partial D} f\,ds$.

Separando variables en cartesianas: $u_{xx}+u_{yy}=0$, $u=XY \;\to\; X''\pm\lambda X=0$, $Y''\mp\lambda Y=0$.

En polares: $u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0$, $u=R\Theta \;\to\; \Theta''+\lambda\Theta=0$, $r^2R''+rR'-\lambda R=0$.

En círculos y coronas se exige periodicidad. Si el recinto incluye el origen, acotación de la R .

En particular, en un **círculo** $r<R$ es: $\lambda_n=n^2$, $\Theta_n=\big\{\cos n\theta,\operatorname{sen} n\theta\big\}$, $R_n=\{r^n\}$, $n=0,1,\ldots$