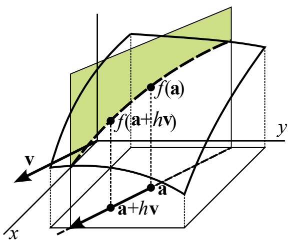
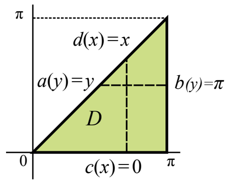
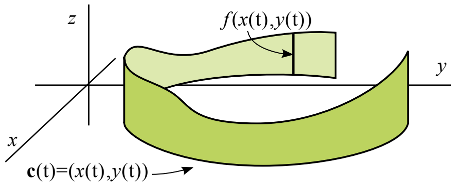
2021

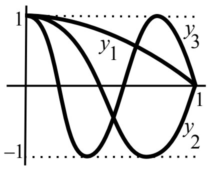
NOTAS DE MÉTODOS MATEMÁTICOS

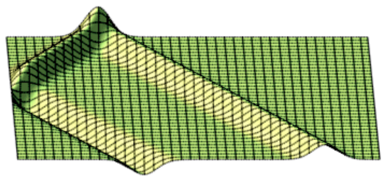
(ingeniería de materiales)

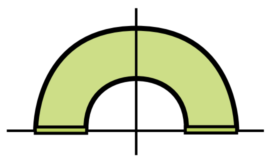












Pepe Aranda

pparanda@ucm.es

https://teorica.fis.ucm.es/pparanda

Departamento de Física Teórica

Facultad de Físicas. UCM

www.ucm.es/ft2mm

Índice

Bibliografía. Sobre estos apuntes

Introducción

1. Cálculo diferencial en R^n

1.1 Campos escalares y sus derivadas 1

1.2 Campos vectoriales. Regla de la cadena 8

2. Cálculo integral en R^n

2.1 Integrales múltiples. Cambios de variable 13

2.2 Integrales de línea 20

3. Ecuaciones diferenciales ordinarias

3.1 Algunas EDOs de primer orden resolubles 27

3.2 EDOs lineales de orden 2 resolubles elementalmente 29

3.3 Autovalores y autofunciones de problemas de contorno 33

3.4 Series de Fourier 37

4. Ecuaciones en derivadas parciales

4.1 EDPs de primer orden 41

4.2 Orden 2. Clasificación y problemas clásicos 43

4.3 Separación de variables. Ecuación del calor 47

4.4 Ondas. D'Alembert y separación de variables 52

4.5 Separación de variables para Laplace 57

5. Otros temas más allá del curso

5.1 Integrales de superficie 61

5.2 Soluciones de EDOs por medio de series 63

5.3 Problemas más complicados por separación de variables 66

5.4 La transformada de Fourier 70

Problemas I-VII

Problemas adicionales i-ix

Sobre estos apuntes

Versión 2021. Se cambian los problemas para incluir de los exámenes de los 2 últimos años. Retoques mayores se irán haciendo en los resúmenes para las clases que se irán publicando y actualizando a lo largo del curso.

Versión 2020. No cambiaron estas notas (sólo fechas y leves retoques), pero se crearon versiones resumidas de las secciones en formato horizontal para ser utilizados como transparencias en las clases.

Versión 2019. Abundantes cambios. Los principales: las secciones adicionales se fueron a un capítulo 5 final y se fusionaron los capítulos 3 y 4 (EDOs y problemas de contorno), aumentando, de paso, los ejemplos en varias secciones. También se cambiaron y añadieron ejemplos y explicaciones al (nuevo) 4. Los márgenes de los apuntes se redujeron ligeramente. Los problemas siguieron la nueva estructura y recogieron los de exámenes del previo. Hay 2 páginas de introducción, 60 de temas básicos, 12 de temas más allá del curso y los 7 habituales de problemas (sin contar los adicionales o del tema 5).

Versiones 2017 y 2018. Sólo cambios en los problemas, incluyendo como cada año los de exámenes de cada curso anterior y algunas pequeñas correcciones en teoría.

Versión 2016. Otra vez bastantes ejemplos nuevos. En el tema 1 más de curvas, de regla de la cadena y de repaso. En el 2, sobre todo de integrales de línea. Cada uno aumenta en 2 páginas. En el 3 se extienden las ecuaciones de primer orden y se acortan más las soluciones por series. En el 4 hay ejemplos nuevos de series de Fourier. Algún cambio en el 5 y bastante negrita para marcar diferencias entre homogénos y no homogéneos. La versión tiene 74 páginas de teoría (contando la introducción) y 7 de problemas (con cambios).

Versión 2015. Bastantes pequeños cambios (también las fuentes de LaTeX). Además de los cambios habituales en problemas de cada curso los más importantes fueron:

Se incluyó en 1.1 un repaso de rectas y planos y se quitó la página informativa sobre Taylor y máximos. En 1.2 se cuentan antes las funciones vectoriales que el caso general de campos vectoriales. En el 2 se quitó teoría a cambio de ejemplos. Se introdujeron con más detalle cilíndricas y esféricas.

Las EDOs de primer orden fueron al principio del 3. Se acortaron las soluciones por series. En 4 cambiaron detalles intentando dejar más claro algún tema sencillo. Se llevaron a 5.6 (‘problemas más complicados por separación de variables’) los ejemplos no preguntables. La transformada del Fourier pasó a 5.7.

Versión 2014. El cambio más radical fue la fusión de los capítulos 5 y 6 en uno con todas las EDPs. El objetivo era presentar antes la separación de variables, que pocos llegaban a estudiar. En 5.3 se resuelve ya la ecuación del calor. La fórmula de D’Alembert se unió a la separación de variables para ondas en 5.4. 5.5 es para Laplace. La tranformada de Fourier fue al 5.6 y los problemas en más variables al 5.7 (secciones no exigidas en exámenes). Se incluyeron además más ejemplos en 5.1.

Los capítulos 1 y 2 aumentaron en dos páginas cada uno por la presencia de nuevos ejemplos (del tipo de los de exámenes): más curvas de nivel y derivadas direccionales, más integrales de línea... El 3 tuvo pequeños cambios y el 4 casi ninguno. Y se añadió un repaso de series, por si no se habían visto en Matemáticas I.

Los problemas como siempre se retocaron (bastante por la reorganización de temas), incluyendo exámenes y controles del curso anterior y retirando otros menos básicos. Aparecieron por primera vez los ‘problemas adicionales’ (de temas laterales). Novedad visual importante fueron los nuevos colores. Color verde claro para los ejemplos de temas exigibles . Y un color gris para ejemplos a título informativo .

Versión 2013. Para simplificar la asignatura (ante las dificultades del curso anterior), se quitaron los problemas más complicados y se pusieron otros más sencillos (entre ellos los de los exámenes). Se precisaron las secciones no preguntables, poniendo en gris sus titulares. Hubo bastantes cambios menores en teoría y de ejemplos por otros más elementales. El estudio de Legendre y Bessel y sus problemas de contorno viajó al final del curso.

Versión 2012. Primera de las ‘**Notas de Métodos Matemáticos (ingeniería de materiales)**’.

Parte de las notas son versión reducida de los ‘apuntes de métodos matemáticos II (EDPs)’ para esa asignatura del Grado en Física. Los capítulos 1 y 2 son un resumen de los apuntes de los de ‘Cálculo’ de ese grado. En 3 hay material de los ‘apuntes de ecuaciones diferenciales I’ (de un curso de la vieja Licenciatura en Física). Los problemas salieron del material de esos otras cursos.

Al elaborar las notas se tuvo en cuenta que la asignatura de la Ingeniería es de 3.5 horas por semana, frente a, por ejemplo, las 4 semanales de los Métodos Matemáticos II del grado. Y que además se debía ver el cálculo en varias variables. Y se supuso que las EDOs lineales se habían visto en ‘Matemáticas II’. Para hacer más ligeras las notas, se suprimieron demostraciones y ejemplos complicados. A pesar de todo, se prefirió dejar temas para contar a título informativo, no exigibles en los exámenes del curso.

Bibliografía

[L] Larson-Hostetler-Edwards. Cálculo y geometría analítica. McGraw-Hill

[M] Marsden-Tromba. Cálculo vectorial. Pearson Addison Wesley.

[B] Boyce-Di Prima. Ecuaciones diferenciales ordinarias y problemas con valores en la frontera. Limusa

[Si] Simmons. Ecuaciones diferenciales. McGraw-Hill

[H] Haberman. Ecuaciones en derivadas parciales con series de Fourier y problemas de contorno. Prentice Hall

[St] Stephenson. Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales. Reverté

Los dos primeros libros tratan el cálculo en $\mathbf{R}^n$ y están destinados a quienes quieran extender lo que figura en los dos primeros capítulos del curso (y en 5.1).

Los dos siguientes son esencialmente de EDOs, con lo que serían adecuados para ir más allá del capítulo 3 (y la sección 5.2). En particular, el [B] está muy bien para estudiar los problemas de contorno y las series de Fourier, y también tiene una buena introducción a las EDPs.

Los dos últimos son de EDPs y desarrollan, por tanto, el capítulo 4 (y 5.3 y 5.4). Los problemas de contorno para EDOs se suelen estudiar también en libros de EDPs. El [H] es un libro gordo (aunque de nivel no muy complicado) y trata muchos más temas de EDPs que los de estas notas. El [St] tiene pocas páginas.

[Estas notas pueden ser utilizadas y citadas por cualquiera sin ningún problema, siempre que no haga negocio con ellas].

Introducción

Estas notas tienen en esencia tres partes. Una primera con una versión resumida del **cálculo diferencial e integral en varias variables** (capítulos 1 y 2). Otra (la más corta) con la teoría de las **ecuaciones diferenciales ordinarias** (EDOs) y de sus **problemas de contorno**. Y una tercera con el estudio de las **ecuaciones en derivadas parciales** (EDPs).

En el **capítulo 1** se estudia el **cálculo diferencial en $\mathbf{R}^n$**. La sección 1.1 trata los **campos escalares** (funciones f de $\mathbf{R}^n$ en $\mathbf{R}$), viendo el significado de sus **derivadas parciales y direccionales**, y de su **gradiente** ∇f, sobre todo para $n=2$. En 1.2 se estudian los **campos vectoriales** ($\mathbf{f}$ de $\mathbf{R}^n$ en $\mathbf{R}^m$) y, en particular, las **funciones vectoriales** ($n=1$) que describen curvas, se presenta la **regla de la cadena** (que se utilizará en el curso) y se definen **divergencia**, **laplaciano** y **rotacional** ($\nabla\cdot\mathbf{f}$, Δf y $\nabla\times\mathbf{f}$).

El **capítulo 2** está dedicado al **cálculo integral en $\mathbf{R}^n$**. En 2.1 se estudian las **integrales dobles y triples de campos escalares** y se ve la ulilidad para su cálculo de los **cambios de variable** (en particular, a polares en el plano). En 2.2 se hacen **integrales de línea** (a lo largo de curvas) de campos escalares y vectoriales, se estudian las integrales que no dependen del camino y se presentan los teoremas de **Green** y de la **divergencia** en el plano.

El **capítulo 3** trata las **ecuaciones diferenciales ordinarias**. En 3.1 las de **primer orden**. En 3.2 las **lineales de segundo orden** $y''+a(x)y'+b(x)y=f(x)$, viendo los pocos casos en que son **resolubles elementalmente** (coeficientes constantes y Euler, sobre todo). Los **problemas de contorno para EDOs** se estudian en 3.3. Veremos que para deteminados valores (**autovalores**) de la constante λ que aparece, la homogénea tendrá infinitas soluciones no triviales (**autofunciones**). [Con valores iniciales siempre hay una sola solución]. Se darán ideas también sobre problemas no homogéneos. Estudiaremos en 3.4 las **series de Fourier** (desarrollos de funciones como sumas infinitas de autofunciones, que casi siempre serán senos o cosenos). Todo será utilizado resolviendo EDPs por separación de variables.

El **capítulo 4** trata ya las **ecuaciones en derivadas parciales**, en las que aparecen derivadas parciales de una función incógnita de varias variables. Todas las que veremos serán **lineales** y en **dos variables** (para simplificar, aunque la realidad tiene habitualmente más dimensiones). Una **solución** será una función $u(x,y)\in C^2$ que llevada a la ecuación la convierte en una identidad. Tras ver brevemente las de primer orden, trataremos EDPs **de segundo orden** (con derivadas de orden 2 o menor):

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+D\frac{\partial u}{\partial y}+E\frac{\partial u}{\partial x}+Hu=F(x,y)\ .$$

Entre ellas se encuentran muchas ecuaciones de la física. En concreto las tres clásicas (que tienen propiedades muy diferentes y que escribimos aquí en su versión general para n variables):

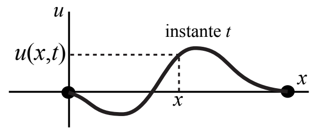
Ondas $u_{tt}-c^2\Delta u=F$. **Calor** $u_t-k\,\Delta u=F$. **Laplace** $\Delta u=F$.

La teoría avanzada de las EDPs viene a ser la generalización del estudio de estas tres, que son ejemplos respectivos de los grandes tipos en que se clasifican: **hiperbólicas**, **parabólicas** y **elípticas**.

Casi nunca se puede dar la solución general de una EDP (por eso, muchas veces las soluciones serán series). Con cambios de variable la hallaremos en 4.1 para algunas de **primer orden** (y aparecerá una función arbitraria de las **características**, soluciones de una EDO ligada a la EDP) y en 4.2 para pocas de **segundo** (con dos funciones arbitrarias). Para la **cuerda infinita** se llegará aquí a una fórmula (de **D'Alembert**) para sus soluciones (en 4.4 se le sacará jugo). Veremos qué condiciones adicionales (iniciales o de contorno) se imponen a las EDPs para tener **solución única**.

En 4.3, tratando el calor, se introduce el método de **separación de variables** para resolver las EDPs clásicas **homogéneas y no homogéneas** (se abordan de forma diferente) y en diferentes coordenadas. Los recintos deben ser sencillos (y **acotados**, al menos, en una de las variables). Se supone la solución como producto de funciones de cada variable, lo que lleva a resolver EDOs en cada una de ellas, alguna, al menos, con condiciones de contorno. Las soluciones acaban siendo series de Fourier. La técnica es la misma en ondas (4.4) y en Laplace (4.5), con ligeras novedades que se irán estudiando.

Describamos el significado físico de las EDPs clásicas en dos variables. La ecuación de la **cuerda vibrante** (de ondas unidimensional) describe las oscilaciones de una cuerda elástica, tensa y fija en sus extremos. Se supone que sus oscilaciones son siempre transversales y de pequeña amplitud. Se prueba que si $u(x,t)$ representa el desplazamiento vertical del punto de abscisa x en el instante t, la función $u(x,t)$ satisface la EDP:



$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t)$$

donde $c^2 = T_o/\rho$, con T_o fuerza de tensión en los extremos, ρ masa por unidad de longitud y $F(x,t)$ fuerza externa que actúa sobre el punto x en el instante t. Para determinar la evolución de una cuerda dada, se fijará la posición de la cuerda y la distribución de velocidades verticales en el instante inicial, es decir, $u(x,0)$ y $u_t(x,0)$. También se deberá de tener en cuenta que está fija en los extremos $x=0$ y $x=L$, o sea, que $u(0,t)=u(L,t)=0$. El modelo matemático de esta cuerda ideal es sólo una simplificación de la realidad, como las siguientes.

La distribución de temperaturas a lo largo del tiempo en una varilla delgada (que podemos suponer unidimensional) viene regida por la **ecuación del calor**:

$$u_t - k\,u_{xx} = 0$$

donde $u(x,t)$ es la temperatura del punto x en el instante t y $k>0$ es una constante que mide la capacidad de conducir calor de la varilla. Si hay fuentes de calor en el interior de la varilla aparece una $F(x,t)$ en el segundo miembro de la ecuación. A diferencia de la de ondas, aquí basta conocer sólo la distribución inicial de temperaturas $u(x,0)$ (junto con las condiciones de contorno, que pueden ser de varios tipos) para precisar la solución.

Puede describir la **ecuación de Laplace**:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

entre otras situaciones físicas, la distribución estacionaria de temperaturas en una placa bidimensional o la posición de equilibrio de una membrana. La existencia de fuentes de calor en el interior o de fuerzas actuando sobre la membrana aportaría una F en el segundo miembro. Frente a las ecuaciones anteriores que describían la evolución de un sistema a lo largo del tiempo, ésta describe situaciones estacionarias y las condiciones que se le imponen a ella serán siempre de contorno.

En el **capítulo 5** final se tratan resumidamente cuatro temas que no son objeto de exámenes en el curso. En 5.1 se introducen las **integrales de superficie** (de campos escalares y vectoriales) y se ven los teoremas de **Stokes** y de la **divergencia** en el espacio. En 5.2 se resuelven EDOs lineales mediante **series de potencias** (único método posible en muchas ocasiones). En 5.3 resolveremos por separación de variables problemas con **EDOs nuevas** (como las de Legendre y Bessel, resolubles siguiendo la sección anterior) y algún problema en **tres** variables. Se utiliza en 5.4 la **transformada de Fourier** para resolver EDPs en **recintos no acotados** (en particular, la del calor en la recta infinita).