1. Cálculo diferencial en $\mathbf{R}^n$

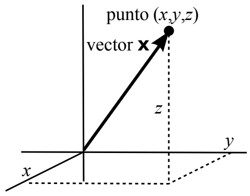
1.1 Campos escalares y sus derivadas

El espacio $\mathbf{R}^n$

$\mathbf{R}^n \equiv \{\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n) : x_k \in \mathbf{R}\}$ es un espacio vectorial de dimensión n con las operaciones: $\mathbf{x}+\mathbf{y}=(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$ y $k\mathbf{x}=(kx_1,\dots,kx_n)$, $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{R}^n$, $k\in\mathbf{R}$.

Si $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{R}^n$ se definen además el **producto escalar** de dos vectores $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=x_1y_1+\cdots+x_ny_n$, la **norma** o **módulo** del vector $\|\mathbf{x}\|=(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})^{1/2}=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$ y la **distancia** $d(\mathbf{x},\mathbf{y})=\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$.

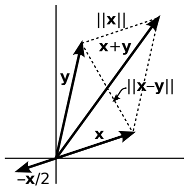
[Otras notaciones para los elementos de $\mathbf{R}^n$ son $\bar{x}$ o $\vec{x}$.]



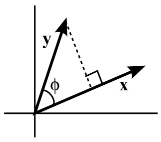
A cada elemento de $\mathbf{R}^n$ le llamaremos indistintamente **punto** o **vector** de $\mathbf{R}^n$. Casi todos nuestros ejemplos serán en $\mathbf{R}^2$ o $\mathbf{R}^3$ donde llamaremos $\mathbf{x}=(x,y)$ o $\mathbf{x}=(x,y,z)$. Un $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^2$ se puede ver como el punto de coordenadas cartesianas (x,y) o como el vector que une el origen $(0,0)$ con (x,y) [análogo en $\mathbf{R}^3$]. $\mathbf{R}$ es caso particular de $\mathbf{R}^n$ y a los números reales se les llama a veces **escalares**.

Las siguientes propiedades (menos las dos últimas) son facilísimas de demostrar:

$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}$, $(k\,\mathbf{x})\cdot\mathbf{y}=k\,(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})=\mathbf{x}\cdot(k\,\mathbf{y})$, $\mathbf{x}\cdot(\mathbf{y}+\mathbf{z})=\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}+\mathbf{x}\cdot\mathbf{z}$, $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}\geq 0$, $\|k\,\mathbf{x}\|=|k|\,\|\mathbf{x}\|$, $\|\mathbf{x}\|=0 \Leftrightarrow \mathbf{x}=\mathbf{0}$, $|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}|\leq\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|$ (desigualdad de Cauchy-Schwartz), $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|\leq\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|$ (desigualdad triangular).



Muchas definiciones y propiedades de arriba tienen significado geométrico claro. Suma es el vector diagonal del paralelogramo de lados $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$. O lo que es lo mismo, es el vector cuya punta es el punto donde acaba $\mathbf{x}$ si llevamos paralelamente su base al extremo de $\mathbf{y}$. La desigualdad triangular dice que la longitud de un lado de un triángulo es menor que la suma de las longitudes de los otros dos... (significado análogo en $\mathbf{R}^3$). En $\mathbf{R}$ el producto escalar pasa a ser el producto y la norma, el valor absoluto.

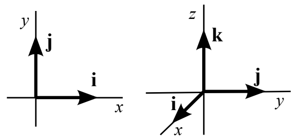


En $\mathbf{R}^2$ y en $\mathbf{R}^3$ hay una forma alternativa de expresar el producto escalar.

Se prueba que: $\boxed{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|\cos\phi}$, con ϕ ángulo que forman $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

De esto se deduce que $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=0$ cuando son perpendiculares.

A los vectores de la 'base canónica' de $\mathbf{R}^n$ los llamaremos $\{\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\}=\{(1,0,\dots,0),\dots,(0,0,\dots,1)\}$ y todo $\mathbf{x}$ se puede escribir como combinación lineal de ellos: $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n)=x_1\mathbf{e}_1+\cdots+x_n\mathbf{e}_n$.



En $\mathbf{R}^2$ habitualmente se escribe $\mathbf{e}_1=\mathbf{i}=(1,0)$ y $\mathbf{e}_2=\mathbf{j}=(0,1)$.

Y en $\mathbf{R}^3$, $\mathbf{e}_1=\mathbf{i}=(1,0,0)$, $\mathbf{e}_2=\mathbf{j}=(0,1,0)$, $\mathbf{e}_3=\mathbf{k}=(0,0,1)$.

Un vector se dice **unitario** si tiene norma 1. [$\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ lo son].

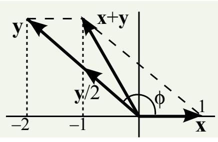
Si $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$, un $\mathbf{u}$ unitario con su misma dirección y sentido es $\mathbf{u}=\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$.

Sólo para $n=3$, se define el **producto vectorial** de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ como el **vector**:
$$\mathbf{x}\times\mathbf{y}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ x_1&x_2&x_3\\ y_1&y_2&y_3\end{vmatrix}.$$
[Es perpendicular a $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, su longitud es el área del paralelogramo que tiene por lados esos vectores y su sentido es el que sugiere $\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}$].

Ej 1. Sean $\mathbf{x}=(1,0)=\mathbf{i}$ e $\mathbf{y}=(-2,2)$. Entonces es:

$\mathbf{x}+\mathbf{y}=(-1,2)$. $\frac{1}{2}\mathbf{y}=(-1,1)$. $\|\mathbf{x}\|=1$, $\|\mathbf{y}\|=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$. $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=-2$.

[Como $\phi>\frac{\pi}{2}$ debía ser $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|\cos\phi<0$. De hecho es $\phi=\arccos\frac{-1}{\sqrt{2}}=\frac{3\pi}{4}$].



Ej 2. Si $\mathbf{x}=(1,0,2)$, $\mathbf{y}=(-2,1,3)$, su producto escalar es $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=4$. $\|\mathbf{x}\|=\sqrt{5}$, $\|\mathbf{y}\|=\sqrt{14}$.

$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|=\|(3,-1,-1)\|=\sqrt{11}$ nos proporciona la distancia entre los dos puntos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

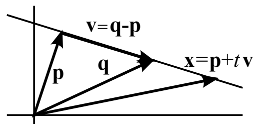
$$\mathbf{x}\times\mathbf{y}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ 1&0&2\\ -2&1&3\end{vmatrix}=(0-2)\,\mathbf{i}-(3+4)\,\mathbf{j}+(1-0)\,\mathbf{k}=(-2,-7,1).\quad \begin{matrix}(1,0,2)\cdot(-2,-7,1)=0\\ (-2,1,3)\cdot(-2,-7,1)=0\end{matrix}\ \text{(perpendicular).}$$

$\|\mathbf{x}\times\mathbf{y}\|=3\sqrt{6}$ nos da el área del parelogramo cuyos lados son los vectores.

Rectas y planos

En Cálculo en una variable, una **recta del plano** se suele escribir $y=mx+b$ ó $y=y_0+m(x-x_0)$, fijándonos en la pendiente m, la ordenada en el origen b o el punto (x_0,y_0) por el que pasa.

Veamos otras expresiones ahora utilizando vectores. La recta que pasa por los puntos $\mathbf{p}=(p_1,p_2)$ y $\mathbf{q}=(q_1,q_2)$ se puede escribir:



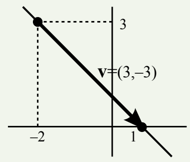
$$\mathbf{x}=\mathbf{p}+t(\mathbf{q}-\mathbf{p}) \quad \text{o} \quad \mathbf{x}=(1-t)\mathbf{p}+t\mathbf{q}\,,\ t\in\mathbf{R}\,.$$

$\big[$Para $t\in[0,1]$, $\mathbf{p}+t(\mathbf{q}-\mathbf{p})$ describe el segmento que une esos puntos$\big]$.

O dado $\mathbf{p}$ y el vector dirección $\mathbf{v}=(v_1,v_2)$ la recta es $\mathbf{x}=\mathbf{p}+t\mathbf{v}$, o en coordenadas: $\begin{cases} x=p_1+tv_1 \\ y=p_2+tv_2 \end{cases}$.

Ej 3. Describamos paramétricamente de varias formas el segmento que une $\mathbf{p}=(-2,3)$ y $\mathbf{q}=(1,0)$.

En cartesianas la recta se ve claro que es $y=1-x$. De aquí: $(t,1-t)$, $t\in[-2,1]$.



De la expresión de arriba, como $\mathbf{v}=\mathbf{q}-\mathbf{p}=(3,-3)$, deducimos otra parametrización:

$$\mathbf{p}+t\mathbf{v}=(-2+3t,3-3t)\,,\ t\in[0,1]\,.$$

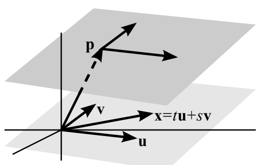
O intercambiando los papeles de $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$: $\mathbf{q}+t(\mathbf{p}-\mathbf{q})=(1-3t,3t)$, $t\in[0,1]$.

[Las 2 primeras expresiones describen el segmento, al crecer t, en el mismo sentido y la tercera en el opuesto].

Las ecuaciones vectoriales de las **rectas en el espacio** son las mismas, pero con 3 coordenadas:

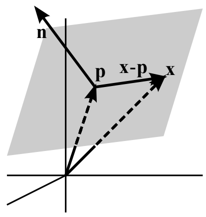
$\begin{cases} x=p_1+tv_1 \\ y=p_2+tv_2 \\ z=p_3+tv_3 \end{cases}$. Eliminando la t: $\dfrac{x-p_1}{v_1}=\dfrac{y-p_2}{v_2}=\dfrac{z-p_3}{v_3}$ [interpretando que el numerador es 0 si se anula su denominador].

La ecuación general de un **plano en el espacio** es $\boxed{ax+by+cz=d}$ [Con a,b,c no las tres cero. Si $d=0$ pasa por el origen].



Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son dos vectores (no múltiplo uno de otro), $\mathbf{x}=t\mathbf{u}+s\mathbf{v}$, $t,s\in\mathbf{R}$ describe el plano que contiene esos vectores y pasa por el origen.

$\mathbf{x}=\mathbf{p}+t\mathbf{u}+s\mathbf{v}$ es otro plano, paralelo al otro y que pasa por $\mathbf{p}$ (y los puntos $\mathbf{p}+\mathbf{u}$ y $\mathbf{p}+\mathbf{v}$).



Un plano quedará también determinado conocidos un punto $\mathbf{p}$ suyo y un vector $\mathbf{n}$ normal (perpendicular) al plano pues entonces: $\boxed{(\mathbf{x}-\mathbf{p})\cdot\mathbf{n}=0}$.

Si $\mathbf{n}=(a,b,c)$, desarrollando: $a(x-p_1)+b(y-p_2)+c(z-p_3)=0$, que se puede poner $ax+by+cz=-ap_1-bp_2-cp_3$. Comparando con la ecuación escrita arriba, concluimos que un **vector normal** a un plano $ax+by+cz=d$ es el vector (a,b,c).

Ej 4. Demos varias expresiones para la recta que pasa por los puntos $\mathbf{p}=(1,2,-8)$ y $\mathbf{q}=(7,5,1)$.

Un vector dirección es $\mathbf{v}=\mathbf{q}-\mathbf{p}=(6,3,9)$, y la recta es: $\mathbf{p}+t\mathbf{v}=(1+6t,2+3t,-8+9t)$, $t\in\mathbf{R}$.

O con un vector más bonito $\mathbf{u}=(2,1,3)$ y $\mathbf{q}$ en vez de $\mathbf{p}$: $\mathbf{q}+t\mathbf{u}=(7+2t,5+t,1+3t)$, $t\in\mathbf{R}$.

Eliminando t, por ejemplo, de la segunda: $\begin{cases} x=7+2t \\ y=5+t \\ z=1+3t \end{cases} \to \dfrac{x-7}{2}=y-5=\dfrac{z-1}{3}$.

Y eligiendo dos pares de términos (nosotros los primero = tercero y segundo = tercero) obtenemos la recta como intersección de dos planos:

$$3x-21=2z-2\,,\ 3y-15=z-1\,, \text{ es decir, } \begin{cases} 3x-2z=19 \\ 3y-z=14 \end{cases}.$$

Ej 5. Hallemos la ecuación del plano que pasa por $\mathbf{p}=(3,2,-1)$, $\mathbf{q}=(1,-1,3)$ y $\mathbf{r}=(3,-2,4)$.

Es perpendicular al plano, por ejemplo, $(\mathbf{q}-\mathbf{p})\times(\mathbf{r}-\mathbf{p})=(-2,-3,4)\times(0,-4,5)=(1,10,8)$.

El plano es, por tanto: $1(x-3)+10(y-2)+8(z+1)=0$, es decir, $x+10y+8z=15$.

Más largo es eliminar t y s de $\mathbf{x}=t(\mathbf{q}-\mathbf{p})+s(\mathbf{r}-\mathbf{p})=\begin{cases} x=3-2t \ \to\ t=\frac{3}{2}-\frac{x}{2} \searrow \\ y=2-3t-4s \qquad s=\frac{3x}{8}-\frac{y}{8}-\frac{5}{8} \searrow \cdots \\ z=-1+4t+5s \end{cases}$

O, aún peor, resolver el sistema $\begin{cases} 3a+2b-c=d \\ a-b+3c=d \\ 3a-2b+4c=d \end{cases}$ [imponiendo que pase por los puntos] $\xrightarrow{\cdots}$ $a=\frac{d}{15}$, $b=\frac{10d}{15}$, $c=\frac{8d}{15}$.

Campos escalares (también llamadas **funciones escalares**).

$\boxed{\begin{array}{c} f: D\subset \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R} \\ \mathbf{x}=(x_1,...,x_n) \to f(\mathbf{x}) \end{array}}$ (son funciones reales de varias variables reales en un dominio D).

Su gráfica es el conjunto de puntos de la forma $\big(x_1,\dots,x_n, f(x_1,\dots,x_n)\big)$, con $(x_1,\dots,x_n)\in D$.

Si $n=1$ describe una curva en el plano, si $n=2$ una **superficie** en el espacio (que se puede tratar de dibujar en perspectiva) y si $n\geq 3$ estamos ya en un espacio de dimensión ≥ 4 . Trabajemos con ella para $n=2$.

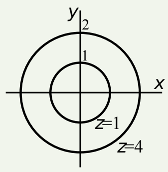
$\boxed{\begin{array}{c} f: \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x,y) \to f(x,y) \end{array}}$ Para esquematizar su **gráfica** (sin ordenador) buscaremos secciones (curvas en el espacio) que obtendremos cortando la superficie con diferentes planos.

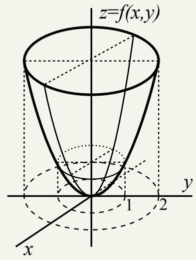
Unas secciones interesantes se consiguen cortando con planos $z=\text{cte}$, llamadas **curvas de nivel** (es decir, curvas del plano xy sobre las que f toma un valor constante). Otras fáciles de calcular son las obtenidas al hacer $x=\text{cte}$ o $y=\text{cte}$ (en particular los cortes con los planos yz o xz).

Ej 6. $\boxed{f(x,y)=x^2+y^2}$. Las curvas de nivel, dadas por $x^2+y^2=C$, serán aquí circunferencias, de radio $\sqrt{C}$.

Las secciones con $\begin{array}{l} x=0 \;\to\; z=y^2 \\ y=0 \;\to\; z=x^2 \end{array}$ son parábolas.

Con esto es fácil (en este caso sencillo) dibujar la gráfica de lo que se llama un '**paraboloide de revolución**'.





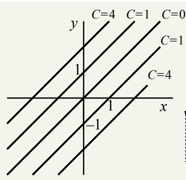
[Si las curvas de nivel son circunferencias centradas, la superficie será de revolución].

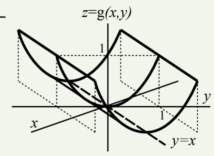
Ej 7. $\boxed{g(x,y)=(x-y)^2}=C \;\to\; x-y=\pm\sqrt{C}$ (rectas paralelas).

En concreto, si $C=0,1,4$ se obtienen $y=x$, $y=x\pm 1$, $y=x\pm 2$.

El corte con $x=0$ es una parábola: $z=y^2$. También lo son los cortes con $y=0$ $\left(z=x^2\right)$ o con $y=-x$ $\left(z=4x^2\right)$.

Viene a ser la gáfica de la parábola $z=y^2$ trasladada a lo largo de la recta $y=x$ (que es donde se anula la g).



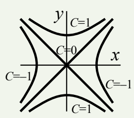


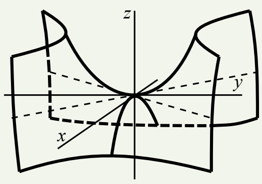
Ej 8. Sea $\boxed{h(x,y)=y^2-x^2}$. Dibujemos la gráfica de este 'paraboloide hiperbólico' (silla de montar).

Los cortes con $y=0$ y $x=0$ son las parábolas $z=-x^2$ y $z=y^2$
[y en general son parábolas los cortes con $y=C$ y $x=C$].

Las curvas de nivel son en general las hipérbolas $y^2-x^2=C$
[menos para $C=0$ en que se reducen a las rectas $y=\pm x$].

No es fácil hacer el dibujo en 3 dimensiones, pero las curvas de nivel y los cortes ya nos bastan para hacernos una idea bastante aproximada de la gráfica.

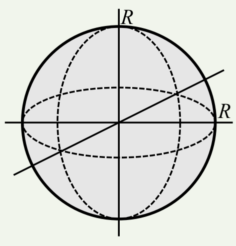




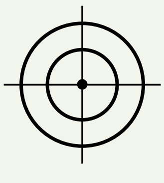
Hay otras superficies importantes que definen más de una (o no definen ninguna) función escalar:

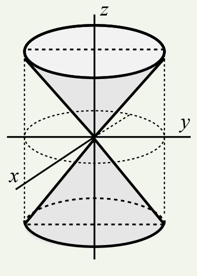
Ej 9. Dibujamos $\boxed{x^2+y^2+z^2=R^2}$ (superficie esférica) , $\boxed{z^2=x^2+y^2}$ (cono), $\boxed{x^2+y^2=1}$ (cilindro).

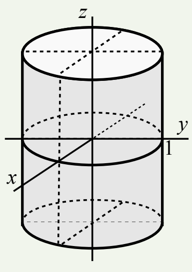
Las primeras definen 2 campos escalares $z=\pm\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ y $z=\pm\sqrt{y^2+x^2}$ y la tercera ninguno.



[las curvas de nivel son circunferencias]







Los cortes con $x=0$ son la circunferencia $z=\pm\sqrt{R^2-y^2}$ (esfera), y las rectas $z=\pm y$ (cono).

El cilindro no depende de la z . Es la circunferencia unidad llevada verticalmente (de $-\infty$ a ∞).

Todos estos ejemplos son '**cuádricas**': $Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+ax+by+cz=d$ (que generalizan las cónicas a $\mathbf{R}^3$). Hay más tipos de ellas: elipsoides, hiperboloides de una y dos hojas, parejas de planos...

Entornos y abiertos. Estos términos aparecerán varias veces en el curso, así que los definimos:

Entorno de centro $\mathbf{a}\in\mathbf{R}^n$ y radio r es $B_r(\mathbf{a})\equiv\{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n:\ \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|<r\}$ [círculo en el plano, esfera en el espacio, sin bordes].

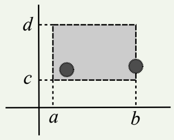
El punto $\mathbf{a}\in A$ es **interior** al conjunto $A\subset\mathbf{R}^n$ si hay algún r tal que el entorno $B_r(\mathbf{a})\subset A$.

A es **abierto** si todos sus puntos son interiores, es decir, si $A=intA\equiv\{\mathbf{x}$ interiores a $A\}$.

Frontera o **borde** de A es $\partial A\equiv\{\mathbf{x}:\ \forall r\,,\ B_r(\mathbf{x})$ contiene puntos de A y de $\mathbf{R}^n-A\}$.

Se llama **cierre** de A al conjunto $\bar{A}=intA\cup\partial A$.

Ej 10. El producto cartesiano de intervalos abiertos $(a,b)\times(c,d)$ (rectángulo sin borde) es un conjunto A abierto en $\mathbf{R}^2$: para cualquier $\mathbf{a}$ del conjunto existe un $B_r(\mathbf{a})$ contenido en él (por ejemplo, si r es el mínimo de las distancias a los 4 lados). Su frontera ∂A son los 4 lados y por tanto $\bar{A}=[a,b]\times[c,d]$. $\bar{A}$ no es abierto pues los puntos de ∂A no son interiores (ningún entorno está contenido en A).



Límites y **continuidad**. Las definiciones son (aparentemente) muy parecidas a las de $\mathbf{R}$:

Límite: $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})=L$ si $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ tal que si $0<\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|<\delta$ entonces $|f(\mathbf{x})-L|<\varepsilon$.

f continua en $\mathbf{a}\in intD \Leftrightarrow \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})=f(\mathbf{a}) \Leftrightarrow \forall\varepsilon\ \exists\delta$ tal que $\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|<\delta \Rightarrow |f(\mathbf{x})-f(\mathbf{a})|<\varepsilon$.

[Para $n=2$ debe existir un δ tal que la imagen de f en $B_\delta(\mathbf{a})$ esté entre los planos $z=L-\varepsilon$ y $z=L+\varepsilon$].

Teoremas (como los de $\mathbf{R}$) aseguran que **suma, producto y cociente con denominador no nulo de** f **y** g **continuas son continuas**. Y también se prueba que lo es la **composición** de campos escalares con funciones reales continuas:

Teor 1. $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ continua en $\mathbf{a}$, $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ continua en $f(\mathbf{a}) \Rightarrow g\circ f$ continua en $\mathbf{a}$.

Probando sólo que $f(\mathbf{x})=C$ y que $f(x_1,\dots,x_n)=x_k$ son continuas en todos los puntos de $\mathbf{R}^n$:

$$|f(\mathbf{x})-C|=0<\varepsilon\ \forall\delta\,,\quad |f(\mathbf{x})-f(\mathbf{a})|=|x_k-a_k|\le\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|<\varepsilon \text{ si } \delta=\varepsilon\,,$$

se deduce de estos teoremas que muchísimos campos escalares lo son en todos o en casi todos los puntos **a simple vista**. Así, por ejemplo, son claramente continuos en todo $\mathbf{R}^2$ los campos de la página anterior (son sumas, productos... de funciones continuas). También lo son claramente:

$f(x,y)=\frac{x^2-1}{y^2+3}$ (lo son numerador y denominador, y éste no se anula)

$h(x,y)=e^{xy}$ (es composición de la continua $f(x,y)=xy$ y $g(z)=e^z$ función continua en todo $\mathbf{R}$).

$g(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$ es claramente continua cuando $(x,y)\neq(0,0)$
y discontinua en ese punto ('tiende a ∞' pues $x^2+y^2\to 0$ y es positivo).

Sólo hay que pararse a mirar la continuidad en algunos puntos patológicos (lo mismo que sucedía en $\mathbf{R}$). Ponemos un par de ejemplos sólo para mostrar que aquí las cosas se complican:

Ej 11. $f(x,y)=(x^2+y^2)\operatorname{sen}\frac{1}{x^2+y^2}$, con $f(0,0)=0$, es obviamente continua si $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$.

Para ver que lo es también en el origen podemos aquíacudir a la definición (en general complicado):

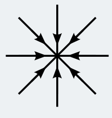
$$|f(x,y)-f(0,0)|\le|x^2+y^2|<\varepsilon \text{ si } \|(x,y)-(0,0)\|=\sqrt{x^2+y^2}<\delta=\sqrt{\varepsilon}\,,$$

o mirarla como composición de la conocida continua $g(x)=x\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ y del campo $h(x,y)=x^2+y^2$, o incluso utilizar que sigue siendo cierto en más de una variable eso de que 'cero $\times$ acotado $=$ cero'.

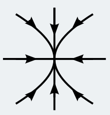
Ej 12. $f(x,y)=\frac{xy^2}{x^2+y^4}$, $f(0,0)=0$ vuelve a ser continua claramente si $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$. ¿Lo es en $(0,0)$?

Vamos a acercarnos al origen a lo largo de diferentes curvas.

Empezamos con las rectas $y=mx$: $f(x,mx)=\frac{m^2x}{1+m^4x^2}\underset{x\to 0}{\to}0$.

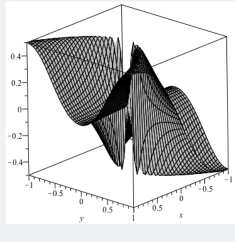


Pero esto no es la definición del límite en $\mathbf{R}^2$.



Sigamos ahora las parábolas $x=py^2$: $f(py^2,y)=\frac{p}{p^2+1}$.

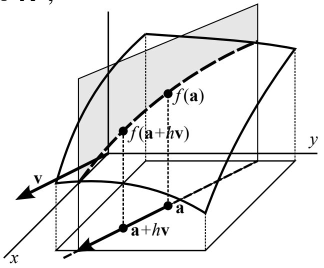
Tan cerca como queramos del origen hay puntos en los que el campo vale, por ejemplo, $\frac{1}{2}$ ($p=1$). **Discontinua** en $\mathbf{0}$.



[Dibujada con un ordenador, presenta f el aspecto feo del dibujo de la derecha].

Derivadas direcionales, derivadas parciales y gradiente

Sean $f: D\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ y $\mathbf{a}\in int\,D$ para que f esté definida cerca de $\mathbf{a}$. Para hallar la derivada en $\mathbf{R}$ se usan los valores de f en a y puntos cercanos $a+h$. En $\mathbf{R}^n$ hay puntos en cualquier dirección. Miremos cómo varía f sobre una recta que pase por $\mathbf{a}$ (dada por un vector $\mathbf{v}$), es decir, en $\mathbf{R}^2$, la variación de la curva obtenida cortando la gráfica con un plano vertical:



La **derivada de f según el vector $\mathbf{v}$** en un punto $\mathbf{a}$ es:

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) \equiv f_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \lim_{h\to 0}\frac{f(\mathbf{a}+h\mathbf{v})-f(\mathbf{a})}{h} \quad \text{(si existe).}$$

Cuando $\mathbf{v}$ es **unitario** se le llama **derivada direccional** (de f en la dirección del vector $\mathbf{v}$ en el punto $\mathbf{a}$).

[Es la derivada de la función de una variable $f(\mathbf{a}+t\mathbf{v})$ en $t=0$].

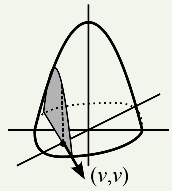
Veremos pronto formas sencillas de hallar estas derivadas, pero por ahora sólo tenemos la definición:

Ej 13. Hallemos la derivada de $\boxed{f(x,y)=4-x^2-4y^2}$ en $(1,0)$ según el vector (v,v):

$$D_{\mathbf{v}}f(1,0)=\lim_{h\to 0}\frac{4-(1+hv)^2-4(hv)^2-3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2hv-5h^2v^2}{h}=-2v\,.$$

Así, en particular: $D_{(1,1)}f(1,0)=-2$, $D_{(2,2)}f(1,0)=-4$, $D_{(-1,-1)}f(1,0)=2, \dots$

Las derivadas direccionales son $D_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}f(1,0)=-\sqrt{2}$ y $D_{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}f(1,0)=\sqrt{2}$.



El caso más importante aparece al tomar como $\mathbf{v}$ alguno de los vectores de la base canónica:

A la derivada de f en la dirección de $\mathbf{e}_k$ se le llama **derivada parcial** de f respecto a x_k:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a}) \equiv f_{x_k}(\mathbf{a}) \equiv D_k f(\mathbf{a}) \equiv D_{\mathbf{e}_k}f(\mathbf{a}) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a_1,\dots,a_k+h,\dots,a_n)-f(a_1,\dots,a_k,\dots,a_n)}{h}\,,$$

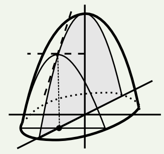
es decir, $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a})$ **es la derivada en el punto $x=a_k$ de la función $g(x)=f(a_1,\dots,x,\dots,a_n)$ de una sola variable que se obtiene mirando todas las x_i constantes menos la x_k.**

En $\mathbf{R}^2$ usaremos simplemente las notaciones $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}\equiv f_x\,,\ \frac{\partial f}{\partial y}\equiv f_y}$, y en $\mathbf{R}^3$ además $\boxed{\frac{\partial f}{\partial z}\equiv f_z}$.

En $\mathbf{R}^2$, por tanto, $f_x(a,b)$ es la derivada de $f(x,b)$ en $x=a$ y $f_y(a,b)$ la de $f(a,y)$ en $y=b$. Se calculan simplemente viendo la otra variable como constante. Y su significado geométrico es claro: son las **pendientes de las tangentes a las curvas corte de la gráfica con planos** $x=a$ **o** $y=b$.

Ej 13b. Si $f(x,y)=4-x^2-4y^2$ es $f_x(1,0)=-2x\big|_{(1,0)}=-2$ y $f_y(1,0)=-8y\big|_{(1,0)}=0$, que son las pendientes de las tangentes a las parábolas obtenidas cortando con $y=0$ y $x=1$ $\left[g(x)=4-x^2 \text{ y } g(y)=3-4y^2\right]$, respectivamente en $x=1$ e $y=0$.

[La primera es negativa por decrecer f al crecer x y la segunda 0 por tener ahí un máximo].



Si las $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ existen para todos los $\mathbf{x}\in D$ tenemos n nuevos campos escalares $\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}$ que se pueden volver a derivar consiguiendo las **derivadas parciales de orden** $2,3,\dots$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}\left[\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right] \equiv \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_k\partial x_j} \equiv f_{x_j x_k}(\mathbf{x}) \equiv D_{jk}f(\mathbf{x})\,,\dots$$

Ej 14. Si $f(x,y)=x^2\,e^{-2y}$ sus derivadas primeras $f_x=\frac{\partial f}{\partial x}=2x\,e^{-2y}$, $f_y=\frac{\partial f}{\partial y}=-2x^2e^{-2y}$ vuelven a tener derivadas parciales $\forall(x,y)$, con lo que tiene sentido calcular:

$$f_{xx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2\,e^{-2y},\quad f_{xy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]=-4x\,e^{-2y},\quad f_{yx}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=-4x\,e^{-2y},\quad f_{yy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=4x^2e^{-2y}.$$

Y podríamos seguir calculando derivadas: $f_{xxx}=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=0,\ \dots,\ f_{yyy}=\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}=-8x^2e^{-2y},\dots$

Ej 15. Si $f(x,y,z)=x^2y-\cos(yz)$ se tiene que $f_x=2xy$, $f_y=x^2+z\,\mathrm{sen}(yz)$, $f_z=y\,\mathrm{sen}(yz)$.

Entonces: $f_{xx}=2y$, $f_{xy}=2x$, $f_{xz}=0$; $f_{yx}=2x$, $f_{yy}=z^2\cos(yz)$, $f_{yz}=\mathrm{sen}(yz)+yz\cos(yz)$;

$f_{zx}=0$, $f_{zy}=\mathrm{sen}(yz)+yz\cos(yz)$, $f_{zz}=y^2\cos(yz)$. Algunas derivadas coinciden (no es casual).

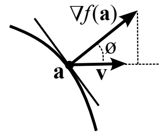
Se dice que $f\in C^n$ en D abierto si sus derivadas parciales hasta orden n son continuas en D.

Igualdad de Schwarz o de Clairaut: Si $f\in C^2$ en un entorno de $\mathbf{a}$ $\Rightarrow$ $D_{kj}f(\mathbf{a})=D_{jk}f(\mathbf{a})$, $j,k=1,\dots,n$.

$\boxed{\text{Se llama } \textbf{gradiente} \text{ de } f \text{ al } \textbf{vector } \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)}$ y es $\nabla f(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a})\right)$.

Halladas las $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ (y, por tanto, el ∇f) es muy fácil hacer derivadas según vectores. Se prueba que:

Teor 2. $\boxed{\text{Si } f \in C^1 \text{ en un entorno de } \mathbf{a}\text{, la derivada según el vector } \mathbf{v} \text{ es } D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}\,.}$

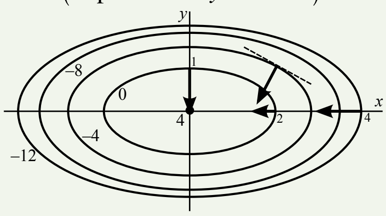


Significado del gradiente. Sea $\mathbf{v}$ unitario y supongamos $\nabla f(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$. Entonces, por el teorema: $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v} = \|\nabla f(\mathbf{a})\| \cos\phi$. Así que la derivada direccional es la componente del gradiente en la dirección de $\mathbf{v}$. La $D_{\mathbf{v}}$ será máxima si $\cos\phi = 1$ (cuando los vectores tienen la misma dirección y sentido). Por tanto, **la dirección y sentido de ∇f son aquellos en los que f crece más deprisa**. Si $\cos\phi = 0$, será $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = 0$: **en la dirección perpendicular a ∇f el campo no varía**. Así, en $\mathbf{R}^2$, será ∇f **perpendicular a las curvas de nivel de** f (a sus tangentes). [Y en $\mathbf{R}^3$ será perpendicular a las superficies de nivel].

Ej 13c. Para la $f(x,y) = 4 - x^2 - 4y^2$, ya es muy fácil hallar las $D_{\mathbf{v}}$ del **Ej 13**: $\nabla f = (-2x, -8y) \Rightarrow$

$$D_{(1,1)} f(1,0) = (-2,0)\cdot(1,1) = -2\,,\quad D_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} f(1,0) = (-2,0)\cdot\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2}\,,\ \ldots$$

Dibujemos ahora algunos vectores gradientes y algunas curvas de nivel (elipses $x^2 + 4y^2 = 4 - C$).



En concreto, se dibuja ∇f en los puntos $(1,0)$, $(2,0)$, $(0,1)$, $(2,1)$ [son los vectores $(-4,0)$, $(-8,0)$, $(0,-8)$, $(-4,-8)$ a escala] y las curvas para $C = 4\,,\ 0\,,\ -4\,,\ -8\,,\ -12$.

Viendo la gráfica de f como una montaña, ∇f indica la máxima pendiente. Entre las derivadas direccionales en $(2,1)$ es máxima la fijada por ∇f, es decir, en la dirección de

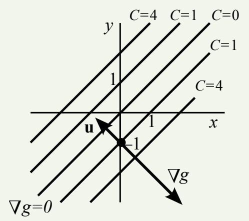
$$\mathbf{v} = \left(-\tfrac{1}{\sqrt{5}}, -\tfrac{2}{\sqrt{5}}\right)\ \left[\text{y el valor máximo es } D_{\mathbf{v}} f(2,1) = \nabla f(1,2)\cdot\mathbf{v} = 4\sqrt{5} = \|\nabla f(1,2)\|\,\right].$$

Es mínima en la dirección opuesta al gradiente $\mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ [su valor será $-4\sqrt{5}$].

Es nula en la dirección de los vectores perpendiculares a ∇f [$(2,-1)$ o $(-2,1)$], vectores que son tangentes a la elipse de nivel $x^2 + 4y^2 = 8$ que pasa por el punto $(2,1)$.

Ej 7*. Hacemos cálculos similares a los hechos para el **Ej 13** para el campo del **Ej 7**: $g(x,y) = (x-y)^2$.

Aquí es $\nabla g(x,y) = \left(2x-2y\,,\,2y-2x\right) = 2(x-y)(1,-1)$.



[Vector perpenticular a las rectas de nivel que apunta hacia donde crece g con módulo $2\sqrt{2}\,|x-y|$ mayor según nos alejemos de la recta $y = x$].

En el punto $(0,-1)$ el vector ∇g es $(2,-2)$. El vector unitario $\mathbf{u}$ para el que es, por ejemplo, mínima la derivada direccional en el punto es:

$\mathbf{u} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ [pues $(-1,1)$ es opuesto al gradiente de módulo $\sqrt{2}$].

[La derivada mínima será $D_{\mathbf{u}}\, g(0,-1) = (2,-2)\cdot\mathbf{u} = -2\sqrt{2} = -\|\nabla g\| = \|\nabla g\|\,\|\mathbf{u}\|\cos\pi$].

[No hemos vuelto a usar la definición inicial de la derivada según un vector.
Al igual que en $\mathbf{R}$ sólo se necesita esa definición para funciones raras].

[Obsérvese que $\nabla g = \mathbf{0}$ sobre $y = x$: los cortes con $x = a$ e $y = b$ son parábolas con mínimos ahí].

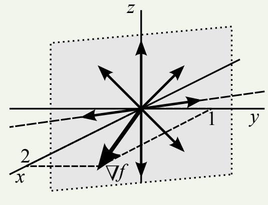
Ej 15*. Los cálculos y significados son análogos en $\mathbf{R}^3$. Para $f(x,y,z) = x^2 y - \cos(yz)$ es:

$$\nabla f(x,y,z) = \left(2xy, x^2 + z\,\mathrm{sen}(yz), y\,\mathrm{sen}(yz)\right).\ \text{En particular es } \nabla f(1,1,0) = (2,1,0)\,.$$

La derivada de f en el punto $\mathbf{a} = (1,1,0)$ según el vector $\mathbf{v} = (1,-1,2)$ es $(2,1,0)\cdot(1,-1,2) = 1$.

Si buscamos la derivada direccional debemos dividir por el módulo: $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{v} \to D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{a}) = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

La derivada direccional máxima es en la dirección y sentido de ∇f y su valor será su módulo $\sqrt{5}$.



La derivada es 0 en la dirección de todo vector perpendicular a ∇f, que ahora no constituyen una recta, sino un plano. Si $\mathbf{v} = (a,b,c)$ es perpendicular: $(2,1,0)\cdot(a,b,c) = 2a + b = 0 \to$

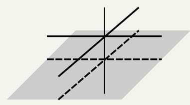
$$\mathbf{v} = (a, -2a, c)\,,\ \|\mathbf{v}\| = \sqrt{5a^2+c^2} \to \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{5a^2+c^2}}(a, -2a, c)\,.$$

Un par de estos vectores $\mathbf{u}$ son, por ejemplo, $(0,0,1)$ y $\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Campos escalares diferenciables y plano tangente

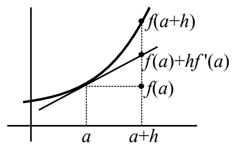
En una variable se cumplía 'derivable $\Rightarrow$ continua'. En $\mathbf{R}^n$ la existencia de todas las derivadas parciales **no** implica la continuidad. Ni siquiera la existencia de derivadas direccionales en todas las direcciones.

Ej 16. Para $f(x,y)=\begin{cases}1 \text{ si } x=0 \text{ o } y=0\\ 0 \text{ en el resto}\end{cases}$ es $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$, pero f es claramente discontinua en el origen.



La $f(x,y)=\frac{xy^2}{x^2+y^4}$ discontinua en $(0,0)$ del **Ej 12** tiene, sin embargo, derivadas según cualquier vector en el punto $\left[\text{pues } f(x,mx)=\frac{m^2x}{1+m^4x^2}\right.$ es derivable para todo m en $\left.x=0\right]$.

Buscamos una definición que recoja información globlal de todos los puntos cercanos a $\mathbf{a}$. Una función en $\mathbf{R}$ era derivable si tenía recta tangente. En $\mathbf{R}^2$ será **diferenciable si posee plano tangente**. Empezamos reescribiendo la definición de derivada:



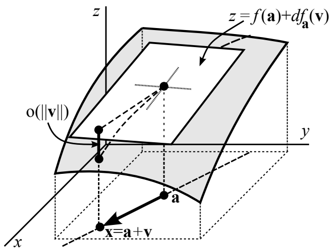
$$f \text{ derivable en } a \Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-f'(a)h}{h}=0 \Leftrightarrow f(a+h)=f(a)+f'(a)h+o(h)\,.$$

$\uparrow$ si el numerador es $o(h)$, despreciable respecto a h

En $\mathbf{R}^n$ ser diferenciable será casi lo mismo. Como en $\mathbf{R}$, $g(\mathbf{v})=o(\|\mathbf{v}\|)$ significará que $\lim_{\mathbf{v}\to\mathbf{0}}\frac{g(\mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|}=0$.

$$\boxed{f \text{ es } \textbf{diferenciable} \text{ en } \mathbf{a} \text{ si existe } \nabla f(\mathbf{a}) \text{ y es } f(\mathbf{a}+\mathbf{v})=f(\mathbf{a})+\nabla f(\mathbf{a})\cdot\mathbf{v}+o\big(\|\mathbf{v}\|\big)\,.}$$

O sea, llamando $\mathbf{v}=\mathbf{x}-\mathbf{a}$, si $\frac{f(\mathbf{x})-f(\mathbf{a})-\nabla f(\mathbf{a})\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{a})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|}\xrightarrow[\mathbf{x}\to\mathbf{a}]{} 0$.

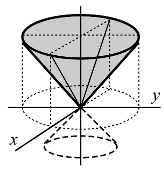


Si $n=2$, lo es si $f(\mathbf{a}+\mathbf{v})=f(\mathbf{a})+f_x(\mathbf{a})u+f_y(\mathbf{a})v+o(\|\mathbf{v}\|)$, o sea, si cerca de $\mathbf{a}=(a,b)$, se parece al plano: $z=f(\mathbf{a})+f_x(\mathbf{a})(x-a)+f_y(\mathbf{a})(y-b)$.

¿Cómo saber si una f es diferenciable? La definición, complicada, sólo se necesita en puntos patológicos (que no trataremos). Por otra parte, si f es diferenciable parece que va a ser continua. Se prueba que:

Teor 3. $\boxed{f\in C^1 \text{ en un entorno de } \mathbf{a} \Rightarrow f \text{ diferenciable en } \mathbf{a} \Rightarrow f \text{ continua en } \mathbf{a}\,.}$

Por tanto, un campo discontinuo (como los del **Ej 16**) no puede ser diferenciable.



Pero los hay continuos y no diferenciables, como le sucede al cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$ en el origen. Sus cortes con los ejes son $z=|x|$ y $z=|y|$, funciones no derivables en 0, por lo que no existen $f_x(0,0)$ ni $f_y(0,0)$. Por tanto, no puede ser diferenciable ahí. [Una f continua y no diferenciable tendrá 'picos', como le pasaba al $|x|$ en $\mathbf{R}$].

Hemos deducido para $\mathbf{R}^2$ que si f es diferenciable, su **plano tangente** en el punto (a,b) es:

$$\boxed{z=f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)}\,.$$

Ej 13d. Como para $f(x,y)=4-x^2-4y^2$ las $f_x=-2x$ y $f_y=-8y$ son continuas en todo $\mathbf{R}^2$ claramente es f diferenciable en todo el plano y es fácil de calcular, por ejemplo, el plano tangente en $(-2,1)$:

$$z=-4+4(x+2)-8(y-1)=4x-8y+12\,.$$

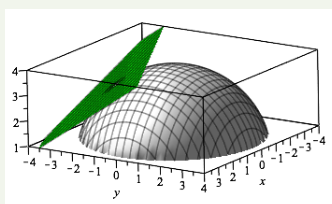
Como en $\mathbf{R}^3$ es ∇f perpendicular a las superficies de nivel, esto nos da un modo de hallar el **plano tangente en un punto** (a,b,c) **de una superficie** S **dada en la forma** $F(x,y,z)=K$:

$$\boxed{\nabla F(a,b,c)\cdot(x-a,y-b,z-c)=0}\,.$$

Ej 17. Por ejemplo, hallemos el plano tangente en $(1,-2,3)$ a la superficie esférica $x^2+y^2+z^2=14$:

$$\nabla F(1,-2,3)=(2x,2y,2z)\big|_{(1,-2,3)}=(2,-4,6)\ \to$$

$$2(x-1)-4(y+2)+6(z-3)=0\text{ , o bien, } z=\tfrac{1}{3}(14-x+2y)\,.$$



Más largo es hallar este plano con la fórmula de más arriba:

$$z=+\sqrt{14-x^2-y^2}\ \to\ z_x=\frac{-x}{\sqrt{\ }}\,,\ z_y=\frac{-y}{\sqrt{\ }}\,,$$

$$z_x(1,-2)=-\tfrac{1}{3}\,,\ z_y(1,-2)=\tfrac{2}{3}\ \to\ z=3-\tfrac{1}{3}(x-1)+\tfrac{2}{3}(y+2)\ \uparrow$$

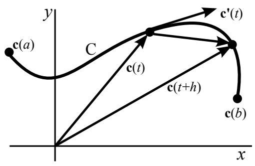
1.2 Campos vectoriales. Regla de la cadena

En esta sección tratamos funciones cuyos valores serán vectores. Primero el caso más sencillo:

Funciones vectoriales: $\boxed{\begin{array}{l}\mathbf{c}:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}^n\\ \quad t\longrightarrow\ \mathbf{c}(t)=\big(c_1(t),\dots,c_n(t)\big)\end{array}}$. Sus gráficas son **curvas** en $\mathbf{R}^n$.

Bastantes veces nos ocuparemos de $\mathbf{c}$ para t en un intervalo finito: $t\in[a,b]$. Entonces la imagen de $\mathbf{c}$ es una curva finita que une (en ese sentido) el punto $\mathbf{c}(a)$ con el $\mathbf{c}(b)$ [extremos de la curva].
Casi siempre trabajaremos en $\mathbf{R}^2$ o $\mathbf{R}^3$ y será $\mathbf{c}(t)=\big(x(t),y(t)\big)$ o $\mathbf{c}(t)=\big(x(t),y(t),z(t)\big)$.

Se dice que $\mathbf{c}$ es continua en un punto o intervalo si lo son sus n componentes $c_1(t),\dots,c_n(t)$.
Y es **derivable** si las n lo son y su **derivada** es el vector $\boxed{\mathbf{c}'(t)=\big(c_1'(t),\dots,c_n'(t)\big)}$.

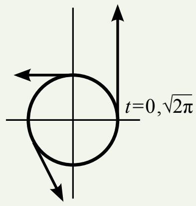


Interpretemos $\mathbf{c}'(t)$ para $n=2$ (o $n=3$). Al ser $\mathbf{c}'(t)=\lim\limits_{h\to0}\frac{\mathbf{c}(t+h)-\mathbf{c}(t)}{h}$, la pendiente de la secante tenderá a la **pendiente de la recta tangente** a la curva C descrita por $\mathbf{c}(t)$. Físicamente, si $\mathbf{c}(t)$ describe el movimiento de una partícula a lo largo del tiempo [es decir, si es su vector posición, que se suele llamar $\mathbf{r}(t)$], $\mathbf{c}'(t)$ representa el **vector velocidad** $\mathbf{v}(t)$.
[El escalar $\|\mathbf{c}'(t)\|$ describe la rapidez (velocidad escalar) con la que la partícula avanza por la curva].

Por tanto, ecuaciones de la **recta tangente** a C en un punto $\mathbf{c}(t_o)$ (si $\mathbf{c}'(t_o)\neq\mathbf{0}$) pueden ser:

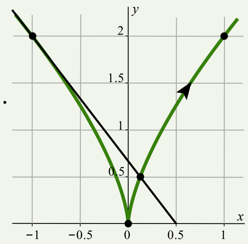
$$\boxed{\mathbf{x}(s)=\mathbf{c}(t_o)+s\,\mathbf{c}'(t_o)}\quad\text{o}\quad\boxed{\mathbf{x}(s)=\mathbf{c}(t_o)+(s-t_o)\,\mathbf{c}'(t_o)}$$
[esta toca $\mathbf{c}(t_o)$ cuando $s=t_o$]

Ej 1. Sea $\mathbf{c}(t)=\big(\cos t^2,\operatorname{sen}t^2\big)$, con $t\in\big[0,\sqrt{2\pi}\,\big]$. $\mathbf{c}(0)=\mathbf{c}\big(\sqrt{2\pi}\,\big)=(1,0)$.



Por ser $\|\mathbf{c}(t)\|=\sqrt{\cos^2+\operatorname{sen}^2}=1$, recorrerá $\mathbf{c}$ la circunferencia unidad.
$\mathbf{c}'(t)=\big(-2t\operatorname{sen}t^2,2t\cos t^2\big)$ será un vector tangente, y es $\|\mathbf{c}'(t)\|=2t$
[con lo que este módulo (la velocidad escalar) crece con el tiempo].
[Llega a (0, 1) para $t=\sqrt{\pi/2}$, y tarda el doble de tiempo en dar la vuelta entera].
$\mathbf{c}'\Big(\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\Big)=\big(-\sqrt{2\pi},0\big)\to\mathbf{x}=\big(-\sqrt{2\pi}\,s,1\big)$ es la recta tangente en $(0,1)$ [o más sencilla $\mathbf{x}=(s,1)$].
[La misma curva la describe $\mathbf{c}_*(t)=(\cos t,\operatorname{sen}t)$, $t\in[0,2\pi]$, siendo en este caso $\|\mathbf{c}_*'(t)\|=1$ constante].

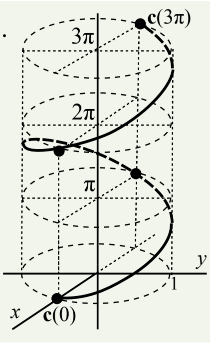
Ej 2. Sea $\mathbf{c}\,(t)=\big(t^3,2t^2\big)$. Dibujemos la curva descrita por $\mathbf{c}$ para $t\in[-1,1]$, hallemos su recta tangente en el punto $(-1,2)$ y el punto en que esta recta tangente vuelve a cortar la curva.



Dando valores a t , o viendo que se puede poner $y=2x^{2/3}$ sale el dibujo.
[Cuando $\mathbf{c}'=\mathbf{0}$ (sin tangente definida), pueden aparecer picos como el del origen].
El punto se da si $t=-1$: $\mathbf{c}(-1)=(-1,2)$ y es $\mathbf{c}'(-1)=(3t^2,4t)\big|_{t=-1}=(3,-4)$.
La recta tangente es: $\mathbf{x}(s)=(3s-1,2-4s)$ [toca $\big(\tfrac12,0\big)$ cuando $s=1/2$].
Corta la curva para t y s que cumplan: $t^3=3s-1$, $2t^2=2-4s$ $\to$
$(3s-1)^2=(1-2s)^3$, $8s^3-3s^2=0$, $s=\tfrac38\to\big(\tfrac12,\tfrac18\big)$ [y $s=0\to(-1,2)$].
[O bien, la curva $y=2x^{2/3}$ y la recta $y=\frac{2-4x}{3}$ se cortan si $27x^2=(1-2x)^3$ que lleva a lo mismo].

Más difícil es, desde luego, dibujar curvas en $\mathbf{R}^3$. Estudiamos el ejemplo sencillo cásico, una **hélice**:

Ej 3. Dibujemos la curva del espacio descrita por $\mathbf{c}(t)=\big(\cos t,\operatorname{sen}t,t\big)$, $t\in[0,3\pi]$.



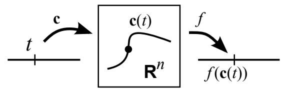
Como $[x(t)]^2+[y(t)]^2=1$, la proyección sobre el plano xy es la circunferencia unidad, mientras que la z de la curva crece constantemente con t .
El vector velocidad será $\mathbf{c}'(t)=\big(-\operatorname{sen}t,\cos t,1\big)$, con lo que es $\|\mathbf{c}'(t)\|=\sqrt2$, que no depende de t (se recorre la curva a velocidad escalar constante).
Por ejemplo, para $t=2\pi$ [en el punto $(1,0,2\pi)$] es $\mathbf{c}'(2\pi)=(0,1,1)$ y la recta tangente en ese punto se puede escribir:

$$\mathbf{x}=(1,0,2\pi)+s\,(0,1,1)=(1,s,2\pi+s)$$
[contenida en el plano $x=1$ y coherente con el dibujo].

Primer caso de la regla de la cadena. Generalizamos la fórmula $(f\circ g)'(x)=f'\big(g(x)\big)g'(x)$.
Tratemos por ahora el caso más sencillo, que une funciones vectoriales y campos escalares:

Teor 1. Sean $\mathbf{c}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^n$ y $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ de C^1 y sea $h(t)=f\big(\mathbf{c}(t)\big)$.
Entonces h es derivable y es $h'(t)=\nabla f\big(\mathbf{c}(t)\big)\cdot\mathbf{c}'(t)$, o sea:

$$h'(t)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{c}(t))\,x_1'(t)+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{c}(t))\,x_n'(t)\,.$$



$h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$

La última igualdad (por ejemplo cuando $n=2$) habitualmente se escribe en la forma $\boxed{\dfrac{df}{dt}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}}$,
expresión imprecisa que no deja claro dónde está evaluada cada término [las parciales en $((x(t),y(t))$ y las derivadas ordinarias en t] y que mantiene el nombre f para la h (son los valores de f sobre una curva).
h describe la variación de f sobre la curva dada por $\mathbf{c}$ y, por tanto, $h'(t_o)$ mide la variación de f según el vector tangente a la curva en $\mathbf{c}(t_o)$, y esta derivada es, como sabemos, $\nabla f\big(\mathbf{c}(t_o)\big)\cdot\mathbf{c}'(t_o)$.

También se pueden dar derivadas segundas y sucesivas; por ejemplo, si $n=2$, como $h'=f_x\,x'+f_y\,y'$:
$$h''(t)=f_{xx}\,(x')^2+2f_{xy}\,x'y'+f_{yy}\,(y')^2+f_x\,x''+f_y\,y''\,,\quad\text{pues}\quad(f_x)'=f_{xx}x'+f_{xy}y'\,,\ \ldots$$

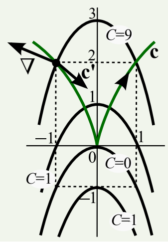
Ej 4. Si $\mathbf{c}(t)=\big(t^3,2t^2\big)$, $f(x,y)=\big(y+x^2\big)^2$ y $h=f\circ\mathbf{c}$, hallemos $h'(-1)$ utilizando la regla de la cadena.

$\mathbf{c}(-1)=(-1,2)$, $\mathbf{c}'(-1)=(3,-4)$, $\nabla f=\big(4x(y+x^2),2(y+x^2)\big)\overset{(-1,2)}{\longrightarrow}(-12,6)$.

Por tanto: $h'(-1)=\nabla f\big(\mathbf{c}(-1)\big)\cdot\mathbf{c}'(-1)=(3,-4)\cdot(-12,6)=-60$.

[Podemos comprobar componiendo y derivando: $h(t)=(2t^2+t^6)^2\to h'(-1)=-60$].

[Que la derivada sea negativa implica que la f decrece al avanzar sobre la curva, como se puede comprobar dibujándola junto a varias curvas de nivel $f=C$, que son parábolas de la forma $y=\pm\sqrt{C}-x^2$ (u observando el gradiente en el punto)].



Campos vectoriales. Son funciones de $\mathbf{R}^n$ en $\mathbf{R}^m$: $\boxed{\begin{array}{l}\mathbf{f}:D\subset\mathbf{R}^n\longrightarrow\mathbf{R}^m\\ \mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)\to\mathbf{f}(\mathbf{x})=\big(f_1(\mathbf{x}),\ldots,f_m(\mathbf{x})\big)\end{array}}$.

[O funciones vectoriales de varias variables reales con dominio D . Ya hemos el visto el caso particular de las **funciones vectoriales**, con $n=1$. Uno que ya ha aparecido, con $n=m$, es ∇f ; otro, para $n=m=3$, será $\operatorname{rot}\mathbf{f}$; otros serán los **cambios de variable** que iremos haciendo].

En la diferencial de f escalares cumplía un papel importante el vector ∇f . Aquí lo va a cumplir una matriz:

Se llama **matriz diferencial** o **jacobiana** de $\mathbf{f}$ en $\mathbf{a}$ a $\mathbf{Df}(\mathbf{a})\equiv\begin{pmatrix}\partial f_1/\partial x_1 & \cdots & \partial f_1/\partial x_n\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \partial f_m/\partial x_1 & \cdots & \partial f_m/\partial x_n\end{pmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{a}}$.
[Las m filas de $\mathbf{Df}$ son los gradientes de las m componentes].

[Si $m=1$, esta matriz es una matriz $n\times 1$: el vector gradiente $\nabla f(\mathbf{a})$. Si $n=1$, el vector derivada de una función vectorial $\mathbf{c}'(t)$ (escrito como columna). Y si $n=m=1$, la más simple de las matrices: $f'(a)$].

Diremos que $\mathbf{f}$ es **diferenciable** en $\mathbf{a}$ cuando lo sean sus m componentes $f_1,\ldots,f_m$ en ese punto.
Y por tanto, si todas las f_k son C^1 en un entorno de $\mathbf{a}$ entonces $\mathbf{f}$ será diferenciable en $\mathbf{a}$.

Y como en los campos escalares, cuando f sea diferenciable 'se parecerá a una función lineal' dada por la matriz diferencial: $\mathbf{f}(\mathbf{x})\approx\mathbf{f}(\mathbf{a})+\mathbf{Df}(\mathbf{a})\,(\mathbf{x}-\mathbf{a})$.
↑ poniendo $\mathbf{x}-\mathbf{a}$ como columna y escribiendo el resultado como fila

Ej 5. $\mathbf{f}(x,y)=\big(e^{xy},y,2x+y^2\big)$ es un campo vectorial diferenciable en el punto $(1,0)$ [lo es en todo $\mathbf{R}^2$] porque las 6 parciales existen y son continuas en un entorno del punto. Su matriz diferencial es:

$$\mathbf{Df}=\begin{pmatrix}y\,e^{xy} & x\,e^{xy}\\ 0 & 1\\ 2 & 2y\end{pmatrix}\Rightarrow\mathbf{Df}(1,0)=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\\2&0\end{pmatrix}.$$

Como $\mathbf{f}(1,0)=(1,0,2)$ y $\mathbf{Df}(1,0)\begin{pmatrix}x-1\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\ y\\ 2x-2\end{pmatrix}$, la $\mathbf{f}:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3$ se parece cerca $(1,0)$ a $\mathbf{f}(x,y)\approx(1+y,y,2x)$.

En caso de que $m=n$, típico de los **cambios de variable**, cumplirá un papel importante (por ejemplo en la integración) el determinante de la matriz diferencial $n\times n$, llamado jacobiano del cambio:

Si $\left\{\begin{array}{l}y_1=f_1(x_1,\ldots,x_n)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ y_n=f_n(x_1,\ldots,x_n)\end{array}\right.$, el **determinante jacobiano** es $\dfrac{\partial(y_1,\ldots,y_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}\equiv J\mathbf{f}\equiv\big|\mathbf{Df}\big|=\begin{vmatrix}\partial f_1/\partial x_1 & \cdots & \partial f_1/\partial x_n\\ \vdots & & \vdots\\ \partial f_n/\partial x_1 & \cdots & \partial f_n/\partial x_n\end{vmatrix}$.

[$J\mathbf{f}(\mathbf{a})\neq 0$ implica, por ejemplo, que el cambio es inyectivo en un entorno del punto, con lo que existirá la función inversa $\mathbf{f}^{-1}$ en un entorno, que era lo que sucedía en $\mathbf{R}$ cuando $f'(a)\neq 0$].

Caso general de la regla de la cadena

Teor 2. Sean $\begin{array}{c}\mathbf{R}^n \xrightarrow{\mathbf{g}} \mathbf{R}^m \xrightarrow{\mathbf{f}} \mathbf{R}^p \\ \mathbf{a} \to \mathbf{g}(\mathbf{a})=\mathbf{b} \to \mathbf{f}(\mathbf{b})\end{array}$, $\mathbf{g}$ diferenciable en $\mathbf{a}$, $\mathbf{f}$ diferenciable en $\mathbf{b}=\mathbf{g}(\mathbf{a})$ $\Rightarrow$ $\mathbf{f}\circ\mathbf{g}$ diferenciable en $\mathbf{a}$ y $\mathbf{D}(\mathbf{f}\circ\mathbf{g})(\mathbf{a})=\mathbf{Df}(\mathbf{b})\,\mathbf{Dg}(\mathbf{a})$ [producto de matrices].

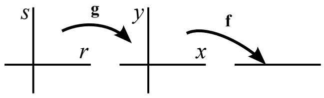
Ej 6. Sean $\mathbf{g}(x,y)=(x-y,y^2)$, $\mathbf{f}(u,v)=(u+v\,,uv\,,v)$. Hallemos $\mathbf{D}(\mathbf{f}\circ\mathbf{g})$ en $(2,1)$. Utilizando el Teor 2:

$$\mathbf{Df}(u,v)=\begin{pmatrix}1&1\\v&u\\0&1\end{pmatrix},\ \mathbf{Dg}(x,y)=\begin{pmatrix}1&-1\\0&2y\end{pmatrix},\ \mathbf{g}(2,1)=(1,1)\ \Rightarrow\ \mathbf{D}(\mathbf{f}\circ\mathbf{g})(2,1)=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\\0&2\end{pmatrix}.$$

Comprobemos componiendo los campos y calculando luego la diferencial:

$$(\mathbf{f}\circ\mathbf{g})(x,y)=\mathbf{f}(x-y\,,y^2)=(x-y+y^2,xy^2-y^3,y^2)\,,\quad \mathbf{D}(\mathbf{f}\circ\mathbf{g})(2,1)=\begin{pmatrix}1&2y-1\\y^2&2xy-3y^2\\0&2y\end{pmatrix}_{(2,1)}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\\0&2\end{pmatrix}.$$

Veamos la forma que adopta en un caso que aparecerá bastantes veces:



$$f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R},\quad \mathbf{g}:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2,\quad h=f\circ\mathbf{g}:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$$
$$(r,s)\to(x,y)\qquad (r,s)\to f(\mathbf{g}(r,s))=f(x(r,s),y(r,s))$$

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial h}{\partial r}&\frac{\partial h}{\partial s}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}&\frac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial r}&\frac{\partial x}{\partial s}\\\frac{\partial y}{\partial r}&\frac{\partial y}{\partial s}\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \boxed{\frac{\partial h}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\ ,\quad \frac{\partial h}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}}\ .$$

Conviene memorizar estas fórmulas, que se utilizan mucho más a menudo que la forma matricial. No se olvide que la f_x y la f_y están evaluadas en $(x(r,s),y(r,s))$. A menudo se mantiene el nombre impreciso de f para la h , pues es simplemente la f en unas nuevas variables.

Parecidas son las fórmulas en $\mathbf{R}^3$. Para una $(r,s,t)\to f(\mathbf{g}(r,s,t))=f\big(x(r,s,t),y(r,s,t),z(r,s,t)\big)$ las derivadas son: $\boxed{f_r=f_xx_r+f_yy_r+f_zz_r}$, $\boxed{f_s=f_xx_s+f_yy_s+f_zz_s}$, $\boxed{f_t=f_xx_t+f_yy_t+f_zz_t}$.

Todas (y otras no escritas) son fáciles de reconstruir: aparecen las derivadas de f respecto a todas las variables intermedias multiplicadas por sus derivadas respecto a misma variable de la izquierda.

Ej 7. Escribamos, usando la regla de la cadena, la ecuación en derivadas parciales $(y-2)u_y-xu_x=x^2y$ en las nuevas variables $s=xy-2x$, $t=x$ [este tipo de cálculos se harán muchas veces en 4.1].

Usamos las fórmulas de arriba, pero cambiando el nombre de las variables:

$$\begin{cases}u_x=u_ss_x+u_tt_x=(y-2)u_s+u_t\\u_y=u_ss_y+u_tt_y=xu_s\end{cases},\ \text{que llevada a la ecuación nos da } -xu_t=x^2y\,,\ u_t=-xy\,.$$

Sólo falta escribir xy en las nuevas variables: $xy=s+2x=s+2t$ $\to$ $\boxed{u_t=-s-2t}$.

Esta 'EDP' tan sencilla incluso la podemos resolver ya. Las $u(s,t)$ que la cumplen son las de la forma:

$u(s,t)=-st-t^2+f(s)$, para cualquier función f (desaparece al derivar respecto a t).

Así hemos hallado la solución de nuestra primera EDP: $u(x,y)=f(xy-2x)+x^2-x^2y$, $\forall f\in C^1$.

La comprobamos: $u_x=(y-2)f'(xy-2x)+2x-2xy$, $u_y=xf'(xy-2x)-x^2$ $\to$

$$(y-2)u_y-xu_x=0-(y-2)x^2-x(2x-2xy)=x^2y\,.$$

Ej 8. Si $\begin{cases}x=r+s^2\\y=rs\end{cases}$, las derivadas de $f(r+s^2,rs)$ respecto a las variables (r,s) son $\begin{cases}f_r=f_x+sf_y\\f_s=2sf_x+rf_y\end{cases}$.

Si $f\in C^2$ podemos hallar también las derivadas segundas utilizando la regla de la cadena.

Como f_x y f_y son también funciones de r y s , se derivarán respecto a r y s de la misma forma que se derivaba la f (utilizando la expresión de arriba):

$$f_{rr}=(f_r)_r=(f_x)_r+s(f_y)_r=[f_{xx}+sf_{xy}]+s[f_{yx}+sf_{yy}]=f_{xx}+2sf_{xy}+s^2f_{yy}$$

(•) $f_{rs}=(f_r)_s=(f_x)_s+s(f_y)_s+f_y=[2sf_{xx}+rf_{xy}]+s[2sf_{yx}+rf_{yy}]+f_y=2sf_{xx}+(r+2s^2)f_{xy}+rsf_{yy}+f_y$

$$f_{ss}=(f_s)_s=2s(f_x)_s+r(f_y)_s+2f_x=2s[2sf_{xx}+rf_{xy}]+r[2sf_{yx}+rf_{yy}]+2f_x=4s^2f_{xx}+4rsf_{xy}+r^2f_{yy}+2f_x$$

[Para escribir, por ejemplo, $(f_x)_r$ simplemente se utilizó el hecho de que, según las expresiones para las derivadas primeras, había que derivarla respecto a x y sumarle s por su derivada respecto a y].

[(•) se podría también hacer así, pues sabemos que las derivadas cruzadas de las funciones C^2 coinciden: $f_{rs}=(f_s)_r=2s[f_{xx}+sf_{yx}]+r[f_{xy}+sf_{yy}]+f_y=2sf_{xx}+(r+2s^2)f_{xy}+rsf_{yy}+f_y$].

Divergencia, laplaciano, rotacional

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si } \mathbf{f}=(f_1,...,f_n):\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n \text{ es campo vectorial } C^1\text{, la } \textbf{divergencia}\\ \text{de } \mathbf{f} \text{ es el campo escalar: } \operatorname{div}\mathbf{f}\ \equiv\ \nabla\cdot\mathbf{f}\equiv\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\ .\end{array}}$$

$\nabla\equiv\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ [notación sólo, eso no es ningún vector].

En particular, cuando $\mathbf{f}=(f,g)$ es $\boxed{\operatorname{div}\mathbf{f}=f_x+g_y}$, y si $\mathbf{f}=(f,g,h)$ es $\boxed{\operatorname{div}\mathbf{f}=f_x+g_y+h_z}$.

$$\boxed{\text{Si } f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R} \text{ es de } C^2\text{, el } \textbf{laplaciano} \text{ de } \mathbf{f} \text{ es } \ \Delta f\equiv\nabla\cdot(\nabla f)\equiv\nabla^2 f\equiv\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\ .}$$

Es otro campo escalar. En particular, $\boxed{\Delta f=f_{xx}+f_{yy}}$ o $\boxed{\Delta f=f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}}$.

Para $n=3$ hay otro importante campo vectorial que se obtiene a partir de uno dado:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si } \mathbf{f}=(f,g,h):\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3 \text{ es de } C^1\text{, el } \textbf{rotacional} \text{ de } \mathbf{f} \text{ es el campo vectorial:}\\ \operatorname{rot}\mathbf{f}=\nabla\times\mathbf{f}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \partial/\partial x&\partial/\partial y&\partial/\partial z\\ f&g&h\end{vmatrix}=(h_y-g_z)\,\mathbf{i}+(f_z-h_x)\,\mathbf{j}+(g_x-f_y)\,\mathbf{k}\ .\end{array}}$$

Algunas propiedades y relaciones (para $n=3$ y campos C^2) fácilmente comprobables son:

$$\boxed{\operatorname{rot}(\nabla f)=\mathbf{0}\ ,\quad \operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{f})=0\ ,\quad \operatorname{div}(g\mathbf{f})=g\operatorname{div}\mathbf{f}+\nabla g\cdot\mathbf{f}\ ,\quad \operatorname{rot}(g\mathbf{f})=g\operatorname{rot}\mathbf{f}+\nabla g\times\mathbf{f}\ .}$$

Por ejemplo, la primera: $\operatorname{rot}(f_x,f_y,f_z)=(f_{zy}-f_{yz})\,\mathbf{i}+(f_{xz}-f_{zx})\,\mathbf{j}+(f_{yx}-f_{xy})\,\mathbf{k}=\mathbf{0}$.

[No sólo el rotacional de un gradiente es $\mathbf{0}$. En 2.2 veremos que si el rotacional de un campo vectorial C^1 se anula, este campo será el gradiente de un campo escalar que sabremos calcular].

Ej 9. Sea $\mathbf{f}=(xyz,\ e^{yz},\ y^2)$. $\operatorname{div}\mathbf{f}=yz+z\,e^{yz}$. $\operatorname{rot}\mathbf{f}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \partial/\partial x&\partial/\partial y&\partial/\partial z\\ xyz&e^{yz}&y^2\end{vmatrix}=(2y-y\,e^{yz},\ xy,\ -xz)$.

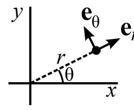
$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{f})=x-x=0$ (debía serlo). $\nabla(\operatorname{div}\mathbf{f})=(0,\ z+z^2e^{yz},\ y+e^{yz}+yz\,e^{yz})$. $\Delta(\operatorname{div}\mathbf{f})=(z^3+y^2z+2y)\,e^{yz}$.

[No tiene sentido hablar del gradiente o laplaciano de $\mathbf{f}$, ni de divergencia o rotacional de campos escalares. Estos cuatro 'operadores' (reglas que convierten unas funciones en otras, como también hace la derivada) son 'lineales' (porque lo es la derivada): $\nabla(af+bg)=a\nabla f+b\nabla g$, $a,b\in\mathbf{R}$, e igual los otros tres].

Escribamos ∇f y Δf en $\mathbf{R}^2$ en términos de las **coordenadas polares**: $\boxed{\begin{array}{l}x=r\cos\theta\\ y=r\operatorname{sen}\theta\end{array}}$ $\quad r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\tan\theta=\frac{y}{x}$.

Por la regla de la cadena: $\begin{cases}f_r=\cos\theta f_x+\operatorname{sen}\theta f_y\\ f_\theta=-r\operatorname{sen}\theta f_x+r\cos\theta f_y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f_r\cos\theta-\frac{1}{r}f_\theta\operatorname{sen}\theta=f_x\\ f_r\operatorname{sen}\theta+\frac{1}{r}f_\theta\cos\theta=f_y\end{cases}\Rightarrow$

$\boxed{\nabla f=f_r\,\mathbf{e}_r+\frac{1}{r}\,f_\theta\,\mathbf{e}_\theta\ ,\ \text{si definimos } \mathbf{e}_r=(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta)\ ,\ \mathbf{e}_\theta=(-\operatorname{sen}\theta,\cos\theta)}$.



[Esta pareja de vectores son unitarios y perpendiculares entre sí y es $\frac{d}{d\theta}\mathbf{e}_r=\mathbf{e}_\theta$].

Utilizando de nuevo la regla de la cadena para escribir las derivadas segundas:

$$\begin{cases}f_{rr}=\cos^2\theta f_{xx}+2\operatorname{sen}\theta\cos\theta f_{xy}+\operatorname{sen}^2\theta f_{yy}\\ f_{\theta\theta}=r^2\operatorname{sen}^2\theta f_{xx}-2r^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta f_{xy}+r^2\cos^2\theta f_{yy}-r\cos\theta f_x-r\operatorname{sen}\theta f_y\end{cases}\Rightarrow\ \boxed{\Delta f=f_{rr}+\frac{f_r}{r}+\frac{f_{\theta\theta}}{r^2}}\ .$$

[Basta escribir la suma del segundo miembro y usar que $\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta=1$ para obtener $f_{xx}+f_{yy}$].

Ej 10. Sea $f(x,y)=\frac{x^3}{x^2+y^2}$, con $f(0,0)=0$. Calculemos ∇f y Δf en el punto $(x,y)=(1,1)$.

Escrito en polares toma la sencilla forma $f(r,\theta)=r\cos^3\theta$ y el punto pasa a ser $(r,\theta)=\left(\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$.

$$\nabla f=\cos^3\theta\,\mathbf{e}_r-3\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{e}_\theta\Big|_{(\sqrt{2},\frac{\pi}{4})}=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\frac{3\sqrt{2}}{4}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\left(1,-\tfrac{1}{2}\right).$$

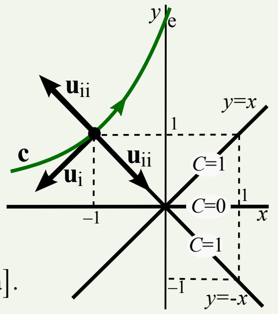
$$\Delta f=0+\frac{\cos^3\theta}{r}+\frac{6\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta-3\cos^3\theta}{r}=\frac{2}{r}\cos\theta(3-4\cos^2\theta)\ \text{ que en } \left(\sqrt{2},\tfrac{\pi}{4}\right) \text{ vale } 1\ .$$

Más largo haciendo: $\nabla f=\left(\frac{x^4+3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2},\frac{-2x^3y}{(x^2+y^2)^2}\right)$, $\Delta f=\frac{4x^3+6xy^2-2x^3}{(x^2+y^2)^2}+\frac{8x^3y^2-4x(x^4+3x^2y^2)}{(x^2+y^2)^3}=\frac{2x(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$.

Las polares son útiles para analizar continuidades complicadas. ¿Es continua en $(0,0)$? Con la expresión polar es claro que podemos hacer f tan pequeña como queramos: $|f(r,\theta)-0|=r|\cos^3\theta|\le r<\varepsilon$ si $\|(x,y)-(0,0)\|=r<\delta=\varepsilon$.

Acabamos el capítulo con más ejemplos con preguntas varias (típicos de examen) que sirvan de repaso:

Ej 11. Sea $f(x,y)=\frac{y^2}{x^2}$. Dibujar sus curvas de nivel $f(x,y)=0$ y 1. Hallar $\|\nabla f(-1,1)\|$ y $\operatorname{div}(\nabla f)$. Hallar, si existe, un vector unitario $\mathbf{u}$ para el que $D_{\mathbf{u}}f(-1,1)$: i) sea mínima, ii) sea 0, iii) sea 3. Dibujar $\mathbf{c}(t)=\big(t-1\,,\mathrm{e}^t\big)$ y si $h(t)=f\big(\mathbf{c}(t)\big)$ hallar $h'(0)$ mediante de la regla de la cadena en $\mathbf{R}^n$. Calcular, por dos caminos, la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $(-1,1)$.



$f=0 \to y=0$, $f=1 \to y^2=x^2$, $y=\pm x$. [Y en $x=0$ la f tiende a $+\infty$].

$\nabla f(x,y)=\big(-2x^{-3}y^2, 2x^{-2}y\big) \;\to\; \|\nabla f(-1,1)\|=\|(2,2)\|=2\sqrt{2}$.

$\operatorname{div}(\nabla f)=\Delta f= f_{xx}+f_{yy} = 6x^{-4}y^2+2x^{-2} = \frac{6y^2}{x^4}+\frac{2}{x^2} = 2\frac{3y^2+x^2}{x^4}$.

[Aunque las cartesianas son adecuadas, lo hallamos también en polares:
$f(r,\theta)=\tan^2\theta$, $f_r=f_{rr}=0$, $\Delta f=\frac{1}{r^2}f_{\theta\theta}=\frac{2}{r^2}(1+4\tan^2\theta+3\tan^4\theta)$].

$D_{\mathbf{u}}$ mínima en sentido opuesto a ∇f : $(-1,-1) \to \mathbf{u}=\big(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\big)$.

[Vale $D_{\mathbf{u}}f(-1,1)=(2,2)\cdot\big(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\big)=-2\sqrt{2}=-\|\nabla f(-1,1)\|$, como debía].

$D_{\mathbf{u}}=0$ en dirección perpendicular al gradiente: $\mathbf{u}=\big(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\big)$ o $\mathbf{u}=\big(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\big)$.

[Para precisar los tres vectores anteriores de i) y ii) bastaba con observar las curvas de nivel].

No hay ningún $\mathbf{u}$ con $D_{\mathbf{u}}=3$ pues el máximo valor es el módulo del gradiente y es $2\sqrt{2}<3$.

Podemos dibujar $\mathbf{c}$ dando valores: $t=0 \to (-1,1)$, $t=1 \to (0,\mathrm{e})$, $x \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$, $y \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$, ...
o, como $t=x+1$, dibujar la gráfica de $y=\mathrm{e}^{x+1}$ (la de $y=\mathrm{e}^x$ llevada una unidad para la izquierda).

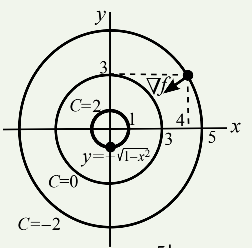
$\mathbf{c}'(t)=(1,\mathrm{e}^t)$, $h'(0)=\nabla f\big(\mathbf{c}(0)\big)\cdot\mathbf{c}'(0)=(2,2)\cdot(1,1)=4$ [comprobable derivando $h(t)=\mathrm{e}^t(t-1)^{-2}$].

Plano tangente: $z=1+2(x+1)+2(y-1)=2x+2y+1$, que podríamos hallar con la otra fórmula:

$z=\frac{y^2}{x^2} \Leftrightarrow F(x,y,z)=x^2z-y^2=0$. $\nabla F(-1,1,1)=(2xz,-2y,x^2)\big|_{(-1,1,1)}=(-2,-2,1)$.

$(-2,-2,1)\cdot(x+1,y-1,z-1) = -2x+2y+z-1 = 0$, que nos da de nuevo el plano.

Ej 12. Sea $f(x,y)=3-\sqrt{x^2+y^2}$. Dibujar las curvas de nivel $f(x,y)=2,0,-2$ y la gráfica de f. Hallar el plano tangente a la gráfica en el punto $(4,3)$. Calcular $\Delta f(4,3)$ en cartesianas y polares. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva intersección de la gráfica con $z=2$ en $(0,-1,2)$.



$x^2+y^2=(3-C)^2$ circunferencias de radio $3-C$ [$1,3,5$, si $C=2,0,-2$].

Corte con $x=0$, $z=3-|y|$. Y de revolución. Es el cono de abajo.

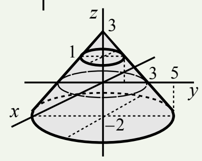
$\nabla f=(f_x,f_y)=\big(-x(x^2+y^2)^{-1/2},-y(x^2+y^2)^{-1/2}\big)\xrightarrow{(4,3)}\big(-\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\big)$.

Plano tangente: $z=-2-\frac{4}{5}(x-4)-\frac{3}{5}(y-3)=3-\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y$.

$f(r,\theta)=3-r \;\to\; \Delta f=f_{rr}+\frac{1}{r}f_r+\frac{1}{r^2}f_{\theta\theta}=-\frac{1}{r}\xrightarrow{r=5}-\frac{1}{5}=\Delta f(4,3)$.

O bien: $-2(x^2+y^2)^{-1/2}+x^2(x^2+y^2)^{-3/2}+y^2(x^2+y^2)^{-3/2}=-(x^2+y^2)^{-1/2}$.

[El gradiente en polares también es fácil: $\nabla f=f_r\mathbf{e}_r=-(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta)$].



Obviamente la tangente a esa circunferencia unidad contenida en $z=2$ tiene por ecuación $\mathbf{x}=(t,-1,2)$. Dos formas de describir esa curva son:

$\mathbf{c}(t)=(\cos t,\operatorname{sen}t,2)$, $t\in[-\pi,\pi]$ $\big(\mathbf{c}'(-\pi/2)=(1,0,0)\big)$ o $\mathbf{c}(x)=\big(x,-\sqrt{1-x^2},2\big)$, $x\in[-1,1]$.

Ej 13. Sea $\mathbf{f}(x,y,z)=\big(xz^2,yx^2,zy^2-3z^2\big)$. Calcular: i) $\operatorname{div}\mathbf{f}$, ii) $\operatorname{rot}\mathbf{f}$, iii) $\nabla\big(\operatorname{div}\mathbf{f}\big)$ y iv) $\Delta\big(\operatorname{div}\mathbf{f}\big)$. Hallar la recta perpendicular a la superficie $\operatorname{div}\mathbf{f}=0$ en el punto $(1,2,1)$ y precisar su punto de corte con el plano $x=0$.

i) $\operatorname{div}\mathbf{f}=z^2+x^2+y^2-6z$. ii) $\operatorname{rot}\mathbf{f}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \partial/\partial x&\partial/\partial y&\partial/\partial z\\ xz^2&yx^2&zy^2-3z^2\end{vmatrix}=2(yz,xz,xy)$. iii) $\nabla\big(\operatorname{div}\mathbf{f}\big)=2(x,y,z-3)$. iv) $\Delta\big(\operatorname{div}\mathbf{f}\big)=6$.

Un vector normal a la superficie se obtiene de iii): $(1,2,-2)$ [mejor sin el 2]. La recta es, pues:

$\mathbf{x}=(1,2,1)+t\,(1,2,-2)=(1+t,2+2t,1-2t)$ que corta $x=0$ si $t=-1 \to$ punto de corte $(0,0,3)$.

[Con un poco de vista se puede observar que $x^2+y^2+(z-3)^2=9$ es la superficie esférica de centro $(0,0,3)$ y radio 3, y cualquier recta normal a ella debía pasar por su centro].