

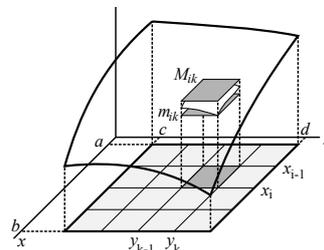
2. Cálculo integral en \mathbb{R}^n

2.1 Integrales múltiples. Cambios de variable

Integrales dobles. Su definición generaliza la de la integral en \mathbb{R} . Sea $f(x, y)$ **acotada** en un **rectángulo** $R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$. Se divide R en $n \times n$ rectángulos $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{k-1}, y_k]$, de área $\Delta x \Delta y = \frac{b-a}{n} \frac{d-c}{n}$. Se llama M_{ik} y m_{ik} al supremo e ínfimo de f en cada R_{ij} y las **sumas superior** e **inferior** son:

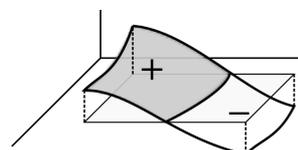
$$U_n = \sum_{i,k=1}^n M_{ik} \Delta x \Delta y, \quad L_n = \sum_{i,k=1}^n m_{ik} \Delta x \Delta y$$

(sumas de volúmenes de prismas, una mayor y otra menor que el **volumen** que encierra $f(x, y)$ si $f \geq 0$).



Si las sucesiones $\{L_n\}$ y $\{U_n\}$ tienden al mismo límite, se dice que f es **integrable** en R , se representa el límite común por $\iint_R f$ ó $\iint_R f(x, y) dx dy$ y se llama **integral** de f en R .

$\iint_R f$ representará (similar a lo que sucedía en \mathbb{R}) la suma de los **volúmenes** encerrados entre la gráfica de f y el plano $z=0$ en R , con signos $+$ o $-$ adecuados. Y al igual que sucedía allí:



Teor 1. f continua en $R \Rightarrow f$ integrable en R .

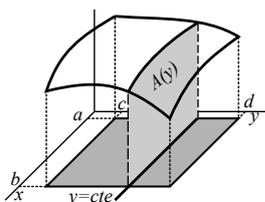
También aquí las funciones 'poco' discontinuas siguen siendo integrables:

Teor 2. Si una f acotada en R es discontinua como mucho en un número finito de puntos y de gráficas de funciones continuas, entonces f es integrable en R .

Para calcular integrales dobles **no se necesita la definición**, el problema se reduce a realizar dos integraciones sucesivas de funciones de una variable:

Teorema de Fubini:

$$f \text{ continua en } R \Rightarrow \iint_R f = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx.$$



Para cada y constante $A(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ representa el área de la sección del sólido determinado por la gráfica de f ; integrando $A(y)$ entre c y d obtenemos el volumen: $\iint_R f = \int_c^d A(y) dy$. La otra igualdad es lo simétrico.

Ej 1. Sean $R = [0, \pi] \times [0, 1]$ y $f(x, y) = y \sin x$. Calcular la integral es fácil:

$$\iint_R f = \int_0^\pi \left[\int_0^1 y \sin x dy \right] dx = \int_0^\pi \left[\frac{y^2 \sin x}{2} \right]_0^1 dx = \int_0^\pi \frac{\sin x}{2} dx = \frac{1 - \cos \pi}{2} = 1.$$

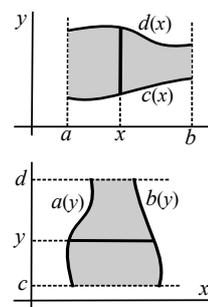
$$\text{O bien: } \iint_R f = \int_0^1 \left[\int_0^\pi y \sin x dx \right] dy = \int_0^1 [-y \cos x]_0^\pi dy = \int_0^1 2y dy = 1.$$

No sólo se puede integrar sobre rectángulos. Podemos hacerlo en **dos tipos sencillos** de regiones D (y otras más complicadas se podrán dividir en algunas de esa forma).

i) f continua en $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x)\}$, con $c \leq d$ continuas en $[a, b] \Rightarrow \iint_D f = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy dx$.

Teor 3.

ii) f continua en $D = \{(x, y) : c \leq y \leq d, a(y) \leq x \leq b(y)\}$, con $a \leq b$ continuas en $[c, d] \Rightarrow \iint_D f = \int_c^d \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx dy$.

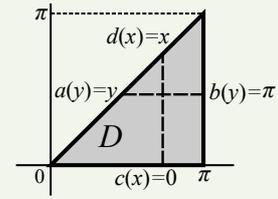


Cuando la x varía entre a y b , la y varía entre $c(x)$ y $d(x)$ y similar para ii).

$A(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy$ describe el área de la sección e $\iint_D f = \int_a^b A(x) dx$ **representa** (si $f \geq 0$) **el volumen del sólido encerrado entre la gráfica de f y el plano xy en la región D** . $\iint_D 1$ proporciona el **área de D** .

Ej 2. Integremos $f(x, y) = x \cos(x+y)$ sobre el D del dibujo, que es de los dos tipos considerados en el teorema 3:

$$\begin{aligned} \iint_D f &= \int_0^\pi \left[\int_0^x x \cos(x+y) dy \right] dx = \int_0^\pi x [\sin 2x - \sin x] dx \\ &= \left[x(\cos x - \frac{1}{2} \cos 2x) \right]_0^\pi + \int_0^\pi \left[\frac{1}{2} \cos 2x - \cos x \right] dx = -\frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$



O, con cálculos más largos, integrando primero respecto a x :

$$\iint_D f = \int_0^\pi \left[\int_y^\pi x \cos(x+y) dx \right] dy \stackrel{\text{partes}}{=} \int_0^\pi [-\pi \sin y - \cos y - y \sin 2y - \cos 2y] dy = -\frac{3\pi}{2}.$$

Observemos que, a veces, no sólo es preferible integrar primero respecto de una variable concreta y luego respecto de la otra, sino que no tenemos otra opción. Por ejemplo, si fuese $f(x, y) = \sin x^2$,

no se podría hacer $\int_0^\pi \left[\int_y^\pi \sin x^2 dx \right] dy$, por ser la primitiva no calculable, pero sí se puede hacer:

$$\int_0^\pi \int_0^x \sin x^2 dy dx = \int_0^\pi x \sin x^2 dx = -\frac{1}{2} \cos x^2 \Big|_0^\pi = \frac{1}{2} [1 - \cos \pi^2].$$

[No olvidemos que **la integral de una constante es la constante por la longitud del intervalo**].

[Los corchetes que hemos escrito hasta la última expresión normalmente no se escriben].

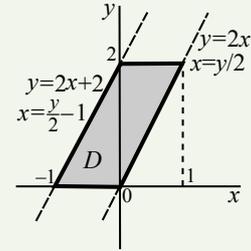
Ej 3. Calculemos $\iint_D (y-2x)^3 dx dy$, con D cuadrilátero de vértices $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(0, 2)$ y $(-1, 0)$.

Para no tener que hacer 2 integrales, integramos primero respecto a x :

$$\int_0^2 \int_{y/2-1}^{y/2} (y-2x)^3 dx dy = \int_0^2 -\frac{1}{8} [(y-2x)^4]_{y/2-1}^{y/2} dy = \int_0^2 2 dy = 4.$$

Con el otro orden de integración hay que dividir en dos recintos:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 \int_0^{2x+2} (y-2x)^3 dy dx + \int_0^1 \int_{2x}^2 (y-2x)^3 dy dx \\ = \int_{-1}^0 [4-4x^4] dx + \int_0^1 4(x-1)^4 dx = 4 - \frac{4}{5} + \frac{4}{5} = 4. \end{aligned}$$



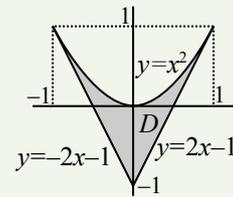
En recintos más complicados no tendremos más remedio que dividir. La integral sobre el recinto total D siempre será la suma de las integrales sobre cada uno de los subconjuntos:

Ej 4. Para calcular la integral de una f sobre el recinto limitado por $y=x^2$ e $y=2|x|-1$ podemos hacer:

$$\iint_D f = \int_{-1}^0 \left[\int_{-2x-1}^{x^2} f(x, y) dy \right] dx + \int_0^1 \left[\int_{2x-1}^{x^2} f(x, y) dy \right] dx.$$

O bien, como $y=x^2 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{y}$, $y=2|x|-1 \Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{2}(y+1)$, se puede hacer (calculando más integrales) también de esta forma:

$$\iint_D f = \int_0^1 \left[\int_{-(y+1)/2}^{-\sqrt{y}} f(x, y) dx \right] dy + \int_0^1 \left[\int_{\sqrt{y}}^{(y+1)/2} f(x, y) dx \right] dy + \int_{-1}^0 \left[\int_{-(y+1)/2}^{(y+1)/2} f(x, y) dx \right] dy.$$



Si en particular integramos $f \equiv 1$ obtendremos, como hemos dicho, el **área de D** :

$$A = \iint_D 1 = \int_{-1}^0 (x^2+2x+1) dx + \int_0^1 (x^2-2x+1) dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

[Integrales iguales por ser $f \equiv 1$ **par** en x y D simétrico respecto a $x=0$; bastaba hacer $2\int_0^1$].

O bien: $A = \iint_D 1 = 2 \int_0^1 \left[\frac{y}{2} + \frac{1}{2} - \sqrt{y} \right] dy + \int_{-1}^0 [y+1] dy = 2\frac{1}{12} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$ [$\frac{1}{2}$ = área triángulo].

Tomemos ahora $f(x, y) = 2x^3y$ y hallemos la integral por el primer camino:

$$\begin{aligned} \iint_D f &= \int_{-1}^0 [x^3y^2]_{-2x-1}^{x^2} dx + \int_0^1 [x^3y^2]_{2x-1}^{x^2} dx = \int_{-1}^0 [x^7-4x^5-4x^4-x^3] dx + \int_0^1 [x^7-4x^5+4x^4-x^3] dx \\ &= \left[-\frac{1}{8} + \frac{2}{3} - \frac{4}{5} + \frac{1}{4} \right] + \left[\frac{1}{8} - \frac{2}{3} + \frac{4}{5} - \frac{1}{4} \right] = -\frac{1}{120} + \frac{1}{120} = 0. \end{aligned}$$

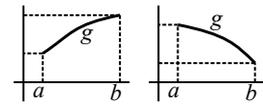
[Debía anularse por ser f **impar** en x y D simétrico respecto a $x=0$. El 'volumen negativo' definido por la gráfica de f en la parte de D con $x \leq 0$ se cancela con el positivo de la parte con $x \geq 0$].

Cambios de variable. Generalicemos para las integrales dobles la conocida fórmula de \mathbf{R} :

$$\int_a^b f(g(u)) g'(u) du = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx, \text{ con } g \in C^1([a, b]),$$

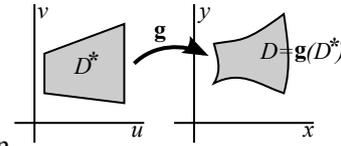
en concreto, el caso de g **inyectiva** (creciente o decreciente) en $[a, b]$:

$$\int_{[a,b]} f(g(u)) |g'(u)| du = \int_{g([a,b])} f(x) dx.$$



En \mathbf{R}^2 nuestra situación será esta: para calcular $\iint_D f(x, y) dx dy$

realizaremos un cambio de variable $\mathbf{g} : D^* \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow D \subset \mathbf{R}^2$
 $(u, v) \rightarrow (x(u, v), y(u, v))$



de modo de que el nuevo recinto de integración D^* o la nueva función a integrar sean más sencillas. Se puede demostrar (es complicado) que:

Teor 4.

Sea $\mathbf{g} : (u, v) \rightarrow (x(u, v), y(u, v))$ de C^1 , inyectiva en D^* , $\mathbf{g}(D^*) = D$ y f integrable.

$$\text{Entonces: } \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$

[El jacobiano viene a medir como se deforman las áreas al pasar a la nuevas variables].

Como primer ejemplo de cambio de variable consideramos los **cambios lineales**:

$$\begin{cases} x = Au + Bv \\ y = Cu + Dv \end{cases} \text{ con } \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = AD - BC \neq 0 \text{ (para que defina biyección de } \mathbf{R}^2 \text{ en } \mathbf{R}^2).$$

$$\rightarrow \iint_D f(x, y) dx dy = |AD - BC| \iint_{D^*} f(Au + Bv, Cu + Dv) du dv.$$

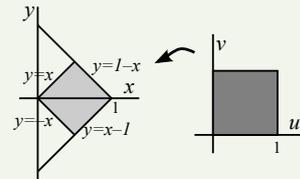
[Las regiones se transforman de forma sencilla por llevar las aplicaciones lineales rectas a rectas].

Ej 5. Sea D el cuadrado de la figura y hallemos $\iint_D (x-y)^2 e^{x+y} dx dy$.

$$\text{La forma de } f \text{ y el recinto sugieren: } \begin{cases} x + y = u \\ x - y = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (u+v)/2 \\ y = (u-v)/2 \end{cases}.$$

Las rectas que definen los lados pasan a ser: $u = 0, 1, v = 0, 1$.

$$\text{El jacobiano } \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}. \text{ Así pues } \iint_D = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 v^2 e^u du dv = \frac{e-1}{6}.$$

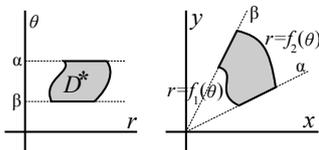
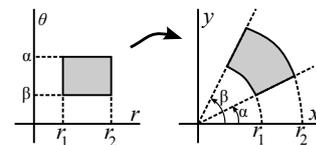


Más a menudo nos va a aparecer y más útil será el **cambio a polares**:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}. \text{ El jacobiano es ahora: } \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r.$$

$$\text{Con lo que el cambio adopta la forma: } \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} r f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr d\theta.$$

¿Qué conjuntos D provienen de conjuntos D^* sencillos del plano $r\theta$? Un rectángulo $[r_1, r_2] \times [\theta_1, \theta_2]$ pasa a ser un sector de corona circular limitado por las circunferencias de radio r_1 y r_2 y por las rectas que pasan por el origen de pendientes θ_1 y θ_2 .



Si lo que queremos es hallar el área en polares de una región D limitada en $\theta \in [\alpha, \beta]$ por $r = f_1(\theta)$ y $r = f_2(\theta)$ obtenemos:

$$\text{área} = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{f_1(\theta)}^{f_2(\theta)} r dr d\theta = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f_2^2(\theta) - f_1^2(\theta)] d\theta.$$

[Coincidente con mis apuntes de matemáticas].

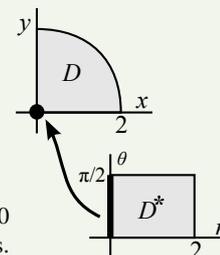
Ej 6. Hallemos $\iint_D \sqrt{4-x^2-y^2} dx dy$, con D el sector circular del dibujo:

La presencia de x^2+y^2 y el aspecto de D piden a gritos las polares.

$$\iint_{D^*} r \sqrt{4-r^2} dr d\theta = \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^2 r(4-r^2)^{1/2} dr \right] d\theta = \frac{\pi}{2} \left[\frac{(4-r^2)^{3/2}}{-3} \right]_0^2 = \frac{4\pi}{3}.$$

el [] no depende de θ octante de esfera \uparrow

El cambio no es inyectivo en lado izquierdo del rectángulo D^* (todos los puntos con $r=0$ van al origen), pero el teor 4 se cumple aunque falle la inyectividad en puntos o rectas sueltas.



Aunque el integrando es sencillo en cartesianas, el recinto pide usar polares:

Ej 7. Calcular la integral doble $\iint_D (x-y)^2 dx dy$, con D semicírculo dado por $x^2+y^2 \leq 4$, $x \geq 0$.

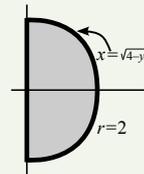
En polares es $(r \cos \theta - r \sin \theta)^2 = r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta) = r^2 (1 - \sin 2\theta)$. Por tanto:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^2 r^3 (1 - \sin 2\theta) dr d\theta = 4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin 2\theta) d\theta = 4\pi.$$

↑ por el jacobiano (es impar)

Debía ser mayor que 0 por ser el integrando positivo. En cartesianas sería mucho peor:

$$\int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (x^2 - 2xy + y^2) dx dy = \int_{-2}^2 \left(y^3 - 4y + \frac{2}{3}(y^2+2)\sqrt{4-y^2} \right) dy = \dots$$



En el siguiente ejemplo, aunque el recinto no parecería adecuado a las polares, ya que no está limitado por curvas $r=cte$ o $\theta=cte$, el aspecto del integrando las pide indudablemente:

Ej 8. Integremos $f(x, y) = \frac{y}{x^2+y^2}$, sobre el semicírculo $x^2+(y-1)^2 \leq 1$, $y \geq 1$.

Las curvas que limitan el recinto, escritas en polares quedan:

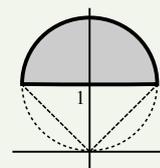
$$y = r \sin \theta = 1 \rightarrow r = 1/\sin \theta, \quad x^2+y^2 = 2y, \quad r^2 = 2r \sin \theta \rightarrow r = 2 \sin \theta.$$

$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_{1/\sin \theta}^{2 \sin \theta} \frac{r^2 \sin \theta}{r^2} dr d\theta = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} (2 \sin^2 \theta - 1) d\theta = - \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \cos 2\theta d\theta = 1.$$

Las cuentas se complican mucho si se intentan hacer de cualquiera de las dos formas en cartesianas:

$$\int_{-1}^1 \int_1^{1+\sqrt{1-x^2}} \frac{y}{x^2+y^2} dy dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 [\ln 2 + \ln(1+\sqrt{1-x^2}) + \ln(1+x^2)] dx = \dots$$

O aún peor: $\int_1^2 \int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} \frac{y}{x^2+y^2} dx dy$ par en $x = 2 \int_1^2 [\arctan \frac{x}{y}]_0^{\sqrt{2y-y^2}} dy = \int_1^2 \arctan \frac{\sqrt{2-y}}{\sqrt{y}} dy = \dots$



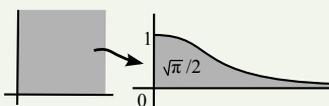
Usemos el cambio a polares para hallar un integral impropia de una variable con primitiva no elemental:

Ej 9. Para calcular $I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$ consideramos la integral doble:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^\infty e^{-y^2} \int_0^\infty e^{-x^2} dx dy = \int_0^\infty I e^{-y^2} dy = I^2.$$

En polares queda: $\int_0^{\pi/2} \int_0^\infty r e^{-r^2} dr d\theta = \frac{\pi}{2} \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^\infty = \frac{\pi}{4} \Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$

Deducimos además, por la paridad del integrando, que $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$



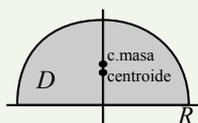
Además del **área** de D , $A = \iint_D dx dy$, y del **volumen** en D bajo $f(x, y) \geq 0$, $V = \iint_D f dx dy$, las integrales dobles tienen otra serie de aplicaciones (las fórmulas son análogas para \mathbf{R}^3).

La **masa** de una placa D es $M = \iint_D \rho(x, y) dx dy$, si $\rho(x, y)$ es su densidad.

El **centro de masa** de D es el punto (\bar{x}, \bar{y}) con $\bar{x} = \frac{1}{M} \iint_D x \rho$, $\bar{y} = \frac{1}{M} \iint_D y \rho$ (**centroide** si $\rho = cte$).

Los **momentos de inercia** respecto a los ejes x e y son: $I_x = \iint_D y^2 \rho$, $I_y = \iint_D x^2 \rho$.

Ej 10. Sea D un semicírculo de radio R de densidad directamente proporcional a la distancia al centro de D . Hallemos su centroide, su centro de gravedad y sus momentos de inercia respecto de los ejes.



Se puede probar que si una lámina tiene un eje de simetría, su centroide está en dicho eje (y si tiene dos, está en su intersección). Por tanto, $\bar{x}_c = 0$. La otra

$$\bar{y}_c = \frac{1}{A} \iint_D y dx dy = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^\pi \int_0^R r^2 \sin \theta dr d\theta = \frac{2}{\pi R^2} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R = \frac{4R}{3\pi} \approx 0.42 R.$$

Para el centro de gravedad hay que incluir la densidad $\rho(r) = kr$ (simétrica). También $\bar{x} = 0$.

Como la masa es $M = \int_0^\pi \int_0^R kr^2 dr d\theta = \frac{\pi R^3 k}{3}$, será $\bar{y} = \frac{3}{\pi R^3} \int_0^\pi \int_0^R r^3 \sin \theta dr d\theta = \frac{3R}{2\pi} \approx 0.48 R$.

Los momentos: $I_x = k \int_0^\pi \int_0^R r^4 \sin^2 \theta dr d\theta = \frac{k}{2} \int_0^\pi r^4 dr \int_0^\pi [1 - \cos 2\theta] d\theta = \frac{k\pi R^5}{10}.$

$$I_y = k \int_0^\pi \int_0^R r^4 \cos^2 \theta dr d\theta = \frac{k}{2} \int_0^\pi r^4 dr \int_0^\pi [1 + \cos 2\theta] d\theta = \frac{k\pi R^5}{10}.$$

[Los cálculos en polares llevan a integrales de $\sin^n \theta \cos^m \theta$. Recordemos que si m o n son impares son más sencillas, y que si son pares se usan las igualdades $\sin^2 \theta = (1 - \cos 2\theta)/2$, $\cos^2 \theta = (1 + \cos 2\theta)/2$].

Integrales triples. Análogamente a $n=2$ se define la $\iiint_B f$ para una $f(x, y, z)$ acotada en un paralelepípedo $B=[a, b] \times [c, d] \times [p, q]$. Describirá un ‘volumen’ de un ‘sólido’ de 4 dimensiones con ‘base’ B y ‘altura’ en cada punto dada por $f(x, y, z)$. Esta integral se podrá calcular también con integrales iteradas:

$$f \text{ continua en } B \Rightarrow \iiint_B f = \int_p^q \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz$$

[o las otras 5 iteradas intercambiando los papeles de x, y, z].

Ej 11. Si $f(x, y, z)=2yz-x$ y $B=[0, 1] \times [0, 2] \times [0, 3]$ es:

$$\iiint_B f = \int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 (2yz-x) dz dy dx = \int_0^1 \int_0^2 (9y-3x) dy dx = \int_0^1 (18-6x) dx = 15.$$

O podemos hacerlo, por ejemplo, con este otro orden de integración:

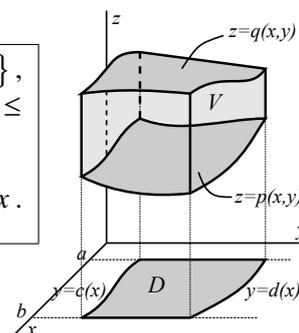
$$\iiint_B f = \int_0^3 \int_0^2 \int_0^1 (2yz-x) dx dy dz = \int_0^3 \int_0^2 (2yz-\frac{1}{2}) dy dz = \int_0^3 (4z-1) dz = 15.$$

También podemos integrar sobre recintos $V \subset \mathbb{R}^3$ más generales.

Si $V = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x), p(x, y) \leq z \leq q(x, y)\}$, siendo continuas c, d en $[a, b]$ y p, q en $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x)\}$,

y si f es continua en $V \Rightarrow \iiint_V f = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} \int_{p(x,y)}^{q(x,y)} f(x, y, z) dz dy dx.$

Análogas fórmulas se obtienen variando los papeles de x, y, z , y muchos recintos que aparecen son de algunos de esos tipos.



Cuando $f \equiv 1$, la integral $\iiint_V dx dy dz$ describe el volumen de V .

Lo más difícil de las integrales triples es dibujar las gráficas o al menos hacerse una idea de ellas para saber cuáles de las funciones que definen los recintos son mayores o menores.

Ej 12. Calculemos $\iiint_V x dx dy dz$, con V región acotada por los planos:

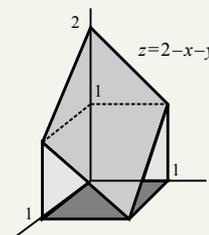
$$x=0, y=0, z=0, x=1, y=1, x+y+z=2.$$

En el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ del plano xy está $z=2-x-y$ por encima de $z=0$.

$$\begin{aligned} \iiint_V x dx dy dz &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{2-x-y} x dz dy dx = \int_0^1 \int_0^1 (2x-x^2-xy) dy dx \\ &= \int_0^1 (2x-x^2-x[\frac{y^2}{2}]_0^1) dx = \int_0^1 (\frac{3x}{2}-x^2) dx = \frac{3}{4}-\frac{1}{3} = \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

O un poquito más corto si cambiamos el orden de dx y dy - El primer paso es igual, y luego:

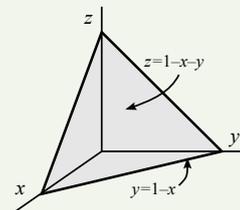
$$\int_0^1 \int_0^1 (2x-x^2-xy) dx dy = \int_0^1 (1-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}y) dy = \frac{2}{3}-\frac{1}{4} = \frac{5}{12}.$$



Ej 13. Halleemos $\iiint_V f$ con $f(x, y, z)=xyz$, V tetraedro de vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$.

El plano que pasa por los 3 últimos puntos es $x+y+z=1$ y la base está limitada por los ejes y por $x+y=1$. Por tanto:

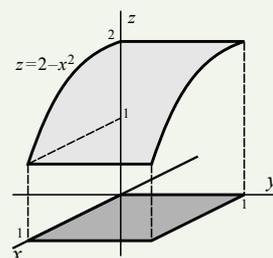
$$\begin{aligned} \iiint_V f &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} xyz dz dy dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{xy(1-x-y)^2}{2} dy dx \\ &= \int_0^1 [\frac{x(1-x)^4}{4} + \frac{x(1-x)^4}{8} - \frac{x(1-x)^4}{3}] dx = \int_0^1 \frac{x(1-x)^4}{12} dx = \frac{1}{360}. \end{aligned}$$



Ej 14. Calcular $\iiint_V e^z dx dy dz$, con V sólido limitado por $x=0, x=1, y=0, y=1, z=0$ y la superficie $z=2-x^2$.

En $[0, 1] \times [0, 1]$ es $z=2-x^2$ mayor que $z=0$ (no se necesita el dibujo).

$$\begin{aligned} \iiint_V &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{2-x^2} x e^z dz dy dx = \int_0^1 \int_0^1 x [e^{2-x^2}-1] dy dx \\ &= \int_0^1 [x e^{2-x^2}-x] dx = -\frac{1}{2} [e^{2-x^2}+x^2]_0^1 = \frac{1}{2} (e^2 - e - 1). \end{aligned}$$



Con hipótesis análogas a las del plano se tiene la fórmula para los **cambios de variable**:

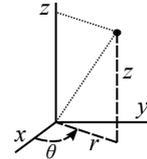
$$\text{Sea } \mathbf{g}: (u, v, w) \rightarrow (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \text{ de } C^1, \text{ inyectiva en } V^*, \mathbf{g}(V^*)=V$$

$$\text{y } f \text{ integrable } \Rightarrow \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V^*} f(\mathbf{g}(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw.$$

[Vale aunque \mathbf{g} no sea inyectiva un número finito de puntos, curvas o superficies].

En particular, los más interesantes son los cambios a **cilíndricas y esféricas**. Definamos cada una de estas coordenadas y familiaricémonos con ellas antes de hacer integrales.

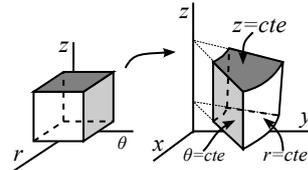
Cilíndricas: $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$. O sea, las polares del plano xy junto con la coordenada z . Dar las cilíndricas de un (x, y, z) es trivial para la z , y se tiene además que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\tan \theta = \frac{y}{x}$.



El jacobiano es $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta & 0 \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$, y, por tanto:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V^*} r f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) dr d\theta dz$$

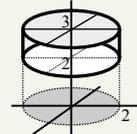
¿Qué conjuntos del espacio son sencillos en cilíndricas? Los puntos $r=C$ forman un cilindro, y los $\theta=C$ y $z=C$ planos (vertical y horizontal). Un paralelepípedo V^* se convierte en un V como el de la derecha.



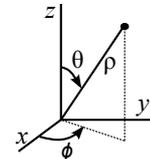
Ej 15. Calcular la integral de la función $f(x, y, z) = z e^{x^2+y^2}$ sobre el cilindro $x^2 + y^2 \leq 4$, $2 \leq z \leq 3$.

$$\iiint_V z e^{x^2+y^2} dx dy dz = \int_2^3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 r z e^{r^2} dr d\theta dz = \frac{9-4}{2} \cdot 2\pi \cdot \left[\frac{1}{2} e^{r^2} \right]_0^2 = \frac{5\pi}{2} (e^4 - 1).$$

Lo mismo que integrar en z y hacer luego el cambio a polares. En cartesianas no se puede hacer porque aparecen primitivas no calculables: $\int e^{x^2+y^2} dx$ o $\int e^{x^2+y^2} dy$.



Esféricas: $\begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \phi \\ y = \rho \sin \theta \sin \phi \\ z = \rho \cos \theta \end{cases}$. Como $\rho^2 = r^2 + z^2$, es $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{r^2 + z^2}$. Además: $\tan \theta = \frac{r}{z}$, $\tan \phi = \frac{y}{x}$ [mirando cuadrante]. [A veces se suelen cambiar los nombres de ϕ y θ , pero usaremos la notación de los libros de física].

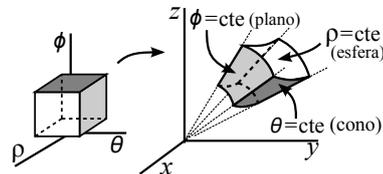


$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \phi & \rho \cos \theta \cos \phi & -\rho \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \rho \cos \theta \sin \phi & \rho \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = \rho^2 \cos^2 \theta \sin \theta \begin{vmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{vmatrix} + \rho^2 \sin^3 \theta \begin{vmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{vmatrix}$$

$$= \rho^2 \sin \theta$$
 es el jacobiano y por tanto:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V^*} \rho^2 \sin \theta f(\rho \sin \theta \cos \phi, \rho \sin \theta \sin \phi, \rho \cos \theta) d\rho d\theta d\phi$$

En esféricas, $\rho=C$ describe una superficie esférica, $\phi=C$ es un plano y $\theta=C$ una superficie cónica. Un recinto simple V en esféricas es, por tanto, el dibujado a la derecha. [El más sencillo de todos, desde luego, es la propia esfera que tantas veces aparece].



Ej 16. Escribamos el punto de coordenadas cartesianas $(-1, 1, -\sqrt{6})$ en los otros dos sistemas.

$$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}. \quad \tan \theta = -1 \text{ y } 2^\circ \text{ cuadrante} \rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4} \text{ [no es, por tanto, } \theta = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4} \text{]}.$$

$$\text{Las coordenadas cilíndricas (polares más la } z) \text{ del punto son, pues: } (r, \theta, z) = \left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}, -\sqrt{6} \right).$$

$$\rho = \sqrt{1+1+6} = 2\sqrt{2}. \quad \tan \theta = \frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{6}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \theta = \frac{5\pi}{6}. \quad (\rho, \theta, \phi) = \left(2\sqrt{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{4} \right). \text{ [} \phi \text{ es la } \theta \text{ de las cilíndricas].}$$

En los siguientes ejemplos se ve que muchas veces las cartesianas no son las coordenadas más adecuadas para calcular integrales (si lo eran en los ejemplos de la página anterior). En el primero, lo más corto serán las cilíndricas (o polares) y en el segundo, integrando sobre esfera, lo serán las esféricas.

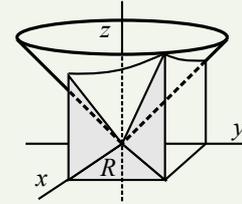
Ej 17. Hallemos el volumen que encierran el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el plano $z=0$ sobre el cuadrado $R = [0, 1] \times [0, 1]$.

Podríamos hallarlo mediante integrales dobles o triples, utilizando las coordenadas adecuadas en cada caso. Vamos a hacer $\iiint_V dx dy dz$.

En cartesianas es fácil el recinto, pero son difíciles las integrales:

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} dz dx dy = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{x^2+y^2} dx dy = \left[\text{ordenador, tablas o } \int \sqrt{x^2+y^2} = x+u \right]$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 [\sqrt{1+y^2} - y^2 \ln y + y^2 \ln(1+\sqrt{1+y^2})] dy = \dots$$



En cilíndricas (o polares en la segunda integral): $x=1 \rightarrow r = \frac{1}{\cos \theta}$, cono y recinto simétricos,

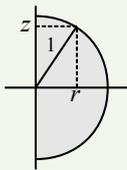
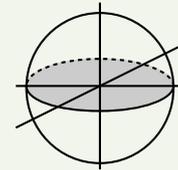
$$2 \int_0^{\pi/4} \int_0^{1/\cos \theta} r^2 dr d\theta = \frac{2}{3} \int_0^{\pi/4} \frac{d\theta}{\cos^3 \theta} = \frac{2}{3} \int_0^{\pi/4} \frac{\cos \theta d\theta}{\cos^4 \theta} \underset{u=\sin \theta}{=} \frac{2}{3} \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{du}{(1-u^2)^2}$$

$$= \frac{1}{6} \left[\log \left| \frac{1+u}{1-u} \right| - \frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u} \right]_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{1}{3} [\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})].$$

Esféricas: $2 \int_0^{\pi/4} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{1/\cos \theta \sin \phi} \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\phi = \frac{2}{3} \int_0^{\pi/4} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{d\theta d\phi}{\sin^2 \theta \cos^3 \phi} = \frac{2}{3} \int_0^{\pi/4} \frac{d\phi}{\cos^3 \phi}$ como antes

Ej 18. Calculemos el volumen de la esfera unidad. En esféricas:

$$\text{vol} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 \rho^2 \sin \theta d\theta d\rho d\phi = 2\pi [-\cos \theta]_0^\pi \left[\frac{1}{3} \rho^3 \right]_0^1 = \frac{4\pi}{3}.$$



En cilíndricas por dos caminos (más largo):

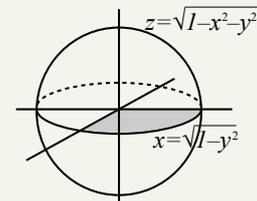
$$\text{vol} = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} r dr dz d\theta = 2\pi \int_{-1}^1 \frac{1-z^2}{2} dz = \frac{4\pi}{3}.$$

$$\text{vol} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} r dz dr d\theta = 2\pi \int_0^1 2r\sqrt{1-r^2} dr = \frac{4\pi}{3}.$$

Las cartesianas son las coordenadas menos adecuadas aquí:

$$\text{vol} = 8 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz dx dy = 8 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy$$

$$= \dots [\text{cambio } x = \sqrt{1-y^2} \sin t] \dots = 8 \int_0^1 \frac{\pi}{4} (1-y^2) dy = \frac{4\pi}{3}.$$



Aplicaciones físicas similares a las vistas para las integrales dobles son:

Masa de un sólido V es $M = \iiint_V D(x, y, z) dx dy dz$, si $D(x, y, z)$ es su densidad.

Centro de masa de V es $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ con $\bar{x} = \frac{1}{M} \iiint_V x D$, $\bar{y} = \frac{1}{M} \iiint_V y D$, $\bar{z} = \frac{1}{M} \iiint_V z D$.

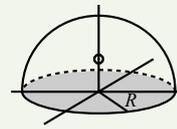
Momento de inercia respecto al eje z : $I_z = \iiint_V (x^2 + y^2) D$ (análogos los otros).

Ej 19. Hallemos la posición del centro de masa de una semiesfera sólida homogénea.

Por simetría, será $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Volumen = $\frac{2}{3}\pi R^3$. [Masa = $\frac{2}{3}\pi R^3 D$, D constante].

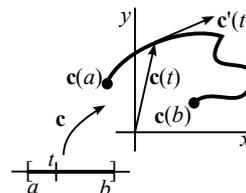
$$\bar{z} = \frac{3}{2\pi R^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^R \rho^3 \sin \theta \cos \theta d\rho d\theta d\phi = \frac{3}{R^3} \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^R \left[\frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{3R}{8} = 0.375R.$$

[El recinto pedía a gritos utilizar las coordenadas esféricas].



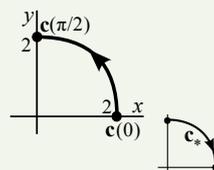
2.2 Integrales de línea

Una **función vectorial** era $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$, $\mathbf{c}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, cuya gráfica es una **curva** C en \mathbf{R}^n y era $\mathbf{c}'(t) = (x_1'(t), \dots, x_n'(t))$ el vector tangente a la curva. Llamaremos a \mathbf{c} también **trayectoria** o **camino** en \mathbf{R}^n . Es \mathbf{c} camino C^1 si es continua y \mathbf{c}' existe y es continua $\forall t \in (a, b)$ y es C^1 a trozos si C es continua y $[a, b]$ se puede dividir en un número finito de subintervalos siendo C^1 en cada uno de ellos.



Ej 1. $\mathbf{c} : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbf{R}^2$ con $\mathbf{c}(t) = (2 \cos t, 2 \sin t)$ es una trayectoria C^1 pues $\mathbf{c}'(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t)$ existe $\forall t \in (0, \frac{\pi}{2})$.

$\mathbf{c}_* : [0, 2] \rightarrow \mathbf{R}^2$ con $\mathbf{c}_*(t) = (t, \sqrt{4-t^2})$, $\mathbf{c}'_*(t) = (1, -t(4-t^2)^{-1/2})$ es otro camino C^1 , que describe esa misma curva (en sentido opuesto). Se dice que \mathbf{c} y \mathbf{c}_* son dos **parametrizaciones** de la misma curva C .



[Las dos curvas describen ese cuadrante de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, pues en ambos casos se cumple que $4 \cos^2 t + 4 \sin^2 t = 4$, $t^2 + (4-t^2) = 4$. Es mejor, en general, usar cosenos y senos al parametrizar circunferencias para que no aparezcan raíces que son más difíciles de integrar].

Hay dos tipos de integrales de línea: de **campos escalares** y de **campos vectoriales**. Comencemos con:

Integrales de campos escalares a lo largo de curvas:

Sea $\mathbf{c}(t) : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ camino C^1 y sea f un campo escalar en \mathbf{R}^n tal que $f(\mathbf{c}(t))$ es continua en $[a, b]$. La integral de f sobre \mathbf{c} (o a lo largo de \mathbf{c}) se define:

$$\int_{\mathbf{c}} f ds \equiv \int_a^b f(\mathbf{c}(t)) \|\mathbf{c}'(t)\| dt.$$

Si \mathbf{c} es C^1 a trozos o $f(\mathbf{c}(t))$ continua a trozos, se se descompone $[a, b]$ en intervalos sobre los que $f(\mathbf{c}(t)) \|\mathbf{c}'(t)\|$ sea continua y será $\int_{\mathbf{c}} f ds$ la suma de las integrales sobre cada uno.

Ej 1*. Si $f(x, y) = xy^2$ y \mathbf{c} , \mathbf{c}_* son los de arriba, las integrales a lo largo de los dos caminos son:

$$\|\mathbf{c}'\| = \sqrt{4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t} = 2, \quad \int_{\mathbf{c}} f ds = \int_0^{\pi/2} 16 \cos t \sin^2 t dt = \frac{16}{3} \sin^3 t \Big|_0^{\pi/2} = \frac{16}{3}.$$

$$\|\mathbf{c}'_*\| = \sqrt{1 + \frac{t^2}{4-t^2}} = \frac{2}{\sqrt{4-t^2}}, \quad \int_{\mathbf{c}_*} f ds = \int_0^2 t(4-t^2) \frac{2}{\sqrt{4-t^2}} dt = -\frac{2}{3} (4-t^2)^{3/2} \Big|_0^2 = \frac{16}{3}.$$

No es casualidad que ambas integrales coincidan. Se prueba que:

Teor 1. Si \mathbf{c} y \mathbf{c}_* describen la misma curva C , entonces $\int_{\mathbf{c}} f ds = \int_{\mathbf{c}_*} f ds \equiv \int_C f ds$.

Como la **integral de línea de una f escalar no depende de la parametrización, sólo de la curva**, es lícita la notación $\int_C f ds$ (integral de f sobre C) en la que la función \mathbf{c} no aparece.

La raíz de la norma hace que el cálculo de estas integrales sea (salvo para curvas sencillas) complicado y no es extraño que aparezcan integrales no calculables. [En las de campos vectoriales no ocurrirá esto]. Además de las circunferencias, también suelen ser fáciles estas integrales sobre segmentos:

Ej 2. Calculemos la integral de la $f(x, y) = xy^2$ ahora sobre el segmento que une $(0, 2)$ y $(2, 0)$.

Podemos parametrizarlo utilizando que pertenece a la recta $y = 2 - x$:

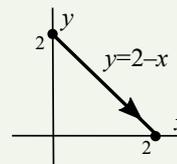
$$\mathbf{c}(x) = (x, 2-x), \quad x \in [0, 2]. \quad \|\mathbf{c}'(x)\| = \|(1, -1)\| = \sqrt{2} \rightarrow$$

$$\int_{\mathbf{c}} f ds = \int_0^2 \sqrt{2} x(2-x)^2 dx = \sqrt{2} \left[2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 \right]_0^2 = \frac{4}{3}\sqrt{2}.$$

O también con la expresión para los segmentos que ya vimos en 1.1:

$$\mathbf{c}_*(t) = (0, 2) + t(2, -2) = (2t, 2-2t), \quad t \in [0, 1]. \quad [\text{Mismo sentido, doble velocidad}].$$

$$\|\mathbf{c}'_*(t)\| = 2\sqrt{2} \rightarrow \int_{\mathbf{c}_*} f ds = 16\sqrt{2} \int_0^1 t(1-t)^2 dt = 16\sqrt{2} \left[\frac{1}{2}t^2 - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{4}t^4 \right]_0^1 = \frac{4}{3}\sqrt{2}. \quad [\text{Debía salir lo mismo}].$$

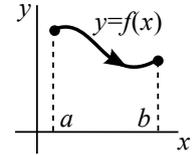


Interpretemos estas integrales. Sea primero $f \equiv 1$. Si pensamos que $\mathbf{c}(t)$ describe una partícula, al ser $\|\mathbf{c}'(t)\|$ la velocidad escalar en el instante t , parece claro que $ds = \|\mathbf{c}'(t)\| dt$ ('diferencial de arco') representa la distancia recorrida en un 'diferencial de tiempo dt ' y por tanto:

$$L = \int_C ds = \int_a^b \|\mathbf{c}'(t)\| dt \text{ representa la longitud de la curva } C \text{ definida por } \mathbf{c}.$$

Veamos la forma que adopta la longitud de la gráfica de una función $y = f(x)$ en un intervalo $[a, b]$. Una parametrización clara de estas curvas es $\mathbf{c}(x) = (x, f(x))$, $x \in [a, b]$. Y como $\mathbf{c}'(x) = (1, f'(x))$, la longitud pasa a ser

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2} dx. \text{ [Cambiando los papeles sería similar para } x=f(y)\text{].}$$

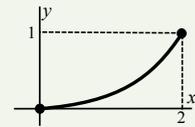


Ej 3. Calculemos la longitud de la curva descrita por la función vectorial $\mathbf{c}(t) = (2t^2, t^3)$, $t \in [0, 1]$.

$$\mathbf{c}'(t) = (4t, 3t^2) \Rightarrow L = \int_0^1 t \sqrt{16+9t^2} dt = \frac{1}{27} (16+9t^2)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{61}{27} \approx 2.26.$$

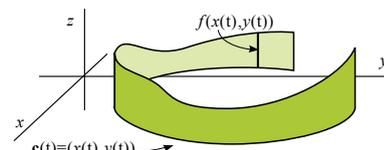
O con otra parametrización de la misma curva, usando que es $y = (\frac{x}{2})^{3/2}$:

$$(x, (\frac{x}{2})^{3/2}), x \in [0, 2] \Rightarrow L = \int_0^1 (1 + \frac{9x}{32})^{1/2} dx = \frac{64}{27} (1 + \frac{9x}{32})^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{64}{27} [\frac{125}{64} - 1].$$



Insistimos en que estas integrales se suelen complicar. Por ejemplo para $y=x^2$ sale una de cálculo largo, y para $y=x^3$ aparece ya una no calculable que se debe aproximar con ordenador. Hay pocos ejemplos sencillos como el anterior. Sí es fácil dar la longitud de segmentos o circunferencias, pero eso no exige integrales.

Si f es cualquier campo con $f(\mathbf{c}(t)) \geq 0 \forall t \in [a, b]$, $\int_C f ds$ representa para $n=2$ el **área de la valla** de altura $f(x, y)$ en cada (x, y) de la curva C , pues un 'diferencial de valla' tiene por área $f(\mathbf{c}(t)) ds = f(\mathbf{c}(t)) \|\mathbf{c}'(t)\| dt$.



Si f toma valores positivos y negativos sobre la curva, la integral puede perfectamente salir negativa. Eso significaría que área de la valla que estuviese 'bajo el suelo' sería mayor que la que está por encima.

Ej 4. Hallemos la integral de $f(x, y) = x - y$ sobre la curva $\mathbf{c}(t) = \begin{cases} (0, 1-t), & t \in [0, 1] \\ (t-1, 0), & t \in [1, 2] \end{cases}$ (es C^1 a trozos).

Tenemos que hacer una integral sobre cada segmento y sumar el resultado.

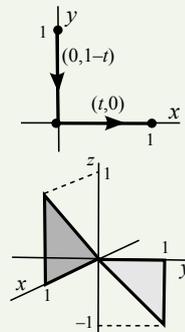
Sobre el vertical, $f(\mathbf{c}_1(t)) = t-1$, $\|\mathbf{c}'_1(t)\| = \|(0, -1)\| = 1 \rightarrow$

$$\int_{\mathbf{c}_1} f ds = \int_0^1 (t-1) dt = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}.$$

Sobre el otro, $f(\mathbf{c}_2(t)) = t-1$, $\|\mathbf{c}'_2(t)\| = \|(1, 0)\| = 1$, $\int_{\mathbf{c}_2} f ds = \int_1^2 (t-1) dt = \frac{1}{2}$.

La integral total es, por tanto: $\int_C f ds = \int_{\mathbf{c}_1} + \int_{\mathbf{c}_2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$.

[El área de la valla positiva sobre el eje de las x se cancela con el área de la valla negativa sobre el eje de las y].



Otra interpretación para $n=2$ o $n=3$ de las integrales de línea de campos escalares es la siguiente: si $\mathbf{c}(t)$ describe un alambre (en el plano o en el espacio) con una densidad variable dada por $\rho(x)$, la **masa del alambre** será $M = \int_C \rho ds$.

Y también da el **valor medio** de una función f sobre la curva C : $\bar{f} = \frac{1}{L} \int_C f ds$.

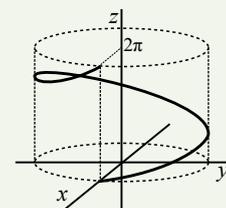
Un ejemplo de longitud y otras integrales calculables exactamente en el espacio:

Ej 5. Sea el alambre en forma de hélice: $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$, y de densidad variable $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Como $\|\mathbf{c}'\| = \sqrt{2}$, su longitud es $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = 2\pi\sqrt{2} \approx 8.9$.

Su masa es $M = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t + t^2) dt = \sqrt{2} (2\pi + \frac{8}{3}\pi^3) \approx 125.8$.

[Y su densidad media es, por tanto: $1 + \frac{4}{3}\pi^2 \approx 14.2$].



Definamos ahora el otro tipo de integrales (que aparecen más a menudo en física):

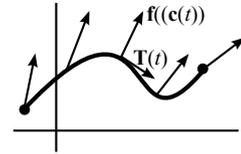
Integrales de línea de campos vectoriales:

Sea $\mathbf{c}(t) : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ de C^1 y sea $\mathbf{f} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ campo vectorial continuo sobre la gráfica de \mathbf{c} . Entonces la integral de línea del campo \mathbf{f} a lo largo de \mathbf{c} se define $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) dt$. Si $\mathbf{f}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t)$ es sólo continua a trozos, dividimos el intervalo y sumamos la integrales.

Si $\mathbf{c}'(t) \neq \mathbf{0} \forall t$ y $\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{c}'(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|}$ es el vector tangente unitario:

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b [\mathbf{f}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{T}(t)] \|\mathbf{c}'(t)\| dt = \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{T} ds,$$

y se puede ver esta integral de línea como la integral del campo escalar $\mathbf{f} \cdot \mathbf{T}$, componente tangencial de \mathbf{f} en la dirección de \mathbf{c} . Por tanto:



$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$ es el **trabajo** realizado por un campo de fuerzas \mathbf{f} sobre la partícula que recorre \mathbf{c} .

Demos otra **notación** (la damos para el plano). Si $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$, $\mathbf{f}(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$:

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b [f(x(t), y(t))x'(t) + g(x(t), y(t))y'(t)] dt \equiv \int_{\mathbf{c}} f(x, y) dx + g(x, y) dy$$

[La notación es similar para $n > 2$. ¡Cuidado!, pese a su aspecto sigue siendo integral de línea].

Ej 6. Calculemos varias integrales del línea del campo $\mathbf{f}(x, y) = (x^2, 2y+x)$ sobre distintos caminos:

$$\mathbf{c}_1(t) = (t, t), t \in [0, 1], \quad \mathbf{c}_2(t) = (4t^2, 4t^2), t \in [0, \frac{1}{2}], \quad \mathbf{c}_3(t) = (1-t, 1-t), t \in [0, 1]$$

[describen la misma curva, la tercera en sentido contrario].

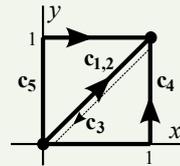
$$\int_{\mathbf{c}_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (t^2, 3t) \cdot (1, 1) dt = \int_0^1 (t^2 + 3t) dt = \frac{1}{3} + \frac{3}{2} = \frac{11}{6}.$$

$$\int_{\mathbf{c}_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{1/2} (16t^4, 12t^2) \cdot (8t, 8t) dt = 16 \int_0^{1/2} (8t^5 + 6t^3) dt = \frac{11}{6},$$

$$\int_{\mathbf{c}_3} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 ((1-t)^2, 3(1-t)) \cdot (-1, -1) dt = \int_0^1 (-4 + 5t + t^2) dt = -\frac{11}{6}.$$

$$\mathbf{c}_4(t) = \begin{cases} (t, 0), & t \in [0, 1] \\ (1, t-1), & t \in [1, 2] \end{cases}, \quad \int_{\mathbf{c}_4} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (t^2, t) \cdot (1, 0) dt + \int_1^2 (t^2, 2t-1) \cdot (0, 1) dt = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}.$$

$$\mathbf{c}_5(t) = \begin{cases} (0, t), & t \in [0, 1] \\ (t-1, 1), & t \in [1, 2] \end{cases}, \quad \int_{\mathbf{c}_5} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (0, 2t) \cdot (0, 1) dt + \int_1^2 ((t-1)^2, 1+t) \cdot (1, 0) dt = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$



[La integral parece depender sólo de la curva y del sentido en que se recorre. Incluso para algunos campos no dependerá siquiera de la curva, sólo del punto inicial y del punto final].

Ej 7. Hallemos la integrales para los mismos \mathbf{c}_k de arriba, pero ahora para el campo $\mathbf{g}(x, y) = (y, x-4y)$:

$$\int_{\mathbf{c}_1} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (t, -3t) \cdot (1, 1) dt = -\int_0^1 2t dt = -1,$$

$$\int_{\mathbf{c}_2} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{1/2} (4t^2, -12t^2) \cdot (8t, 8t) dt = -\int_0^{1/2} 16t^3 dt = -1,$$

$$\int_{\mathbf{c}_3} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 ((1-t), -3(1-t)) \cdot (-1, -1) dt = \int_0^1 2(1-t) dt = 1. \quad [\text{Única distinta}].$$

$$\int_{\mathbf{c}_4} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (0, t) \cdot (1, 0) dt + \int_1^2 (t-1, 5-4t) \cdot (0, 1) dt = \int_1^2 (5-4t) dt = -1.$$

$$\int_{\mathbf{c}_5} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (t, -4t) \cdot (0, 1) dt + \int_1^2 (1, t-5) \cdot (1, 0) dt = -\int_0^1 4t dt + 1 = -1.$$

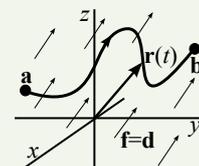
Ej 8. Si $\mathbf{c}(t) = (t, t^2, 1)$, $t \in [0, 1]$ es $\int_{\mathbf{c}} zx^2 dx + xy dy + y^3 dz = \int_0^1 (t^2 \cdot 1 + t^3 \cdot 2t + t^6 \cdot 0) dt = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{11}{15}$.

Ej 9. Hallemos el trabajo realizado por una fuerza constante $\mathbf{f} = \mathbf{d}$ al recorrer una partícula una trayectoria $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ que une dos puntos del espacio $\mathbf{a} = \mathbf{r}(a)$ y $\mathbf{b} = \mathbf{r}(b)$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{r}} \mathbf{d} \cdot d\mathbf{s} &= \int_a^b (d_1, d_2, d_3) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t)) dt \\ &= d_1(x(b)-x(a)) + d_2(y(b)-y(a)) + d_3(z(b)-z(a)) \\ &= \mathbf{d} \cdot (\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)) = \mathbf{d} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}), \text{ independiente de } \mathbf{r}. \end{aligned}$$

Si consideramos $\mathbf{c}(t) = \mathbf{r}(a+b-t)$, $t \in [a, b]$, que recorre la misma curva en

sentido opuesto, el trabajo es $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{d} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b (d_1, d_2, d_3) \cdot (-x'(t), -y'(t), -z'(t)) dt = -\mathbf{d} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})$.



Veamos qué sucede en general con las integrales de campos vectoriales al cambiar la parametrización. Se prueba que no cambia el valor absoluto, pero sí, quizás, el signo:

Teor 2. Si \mathbf{c} y \mathbf{c}_* describen la misma curva C , entonces según \mathbf{c} y \mathbf{c}_* lo hagan en el mismo sentido o en el opuesto se tiene, respectivamente:

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{c}_*} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}, \text{ o bien } \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = - \int_{\mathbf{c}_*} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$$

Como la integral de línea de un campo vectorial sólo depende de la curva C y el sentido en que se recorre (y la un campo escalar sólo de C), podemos elegir las \mathbf{c} más sencillas para calcularlas.

Ej 10. Tiene un sentido preciso hablar de la integral de $\mathbf{f}(x, y) = (y, 0)$ a lo largo de la circunferencia unidad recorrida en el sentido de las agujas del reloj.

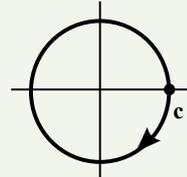
[Las integrales sobre curvas cerradas suelen representarse con el símbolo \oint].

Podemos elegir $\mathbf{c}(t) = (\cos t, -\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ (o $[-\pi, \pi]$, o...),

$$\oint_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} (-\sin t, 0) \cdot (-\sin t, -\cos t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t) dt = \pi.$$

Con cualquier parametrización que proporcionase el mismo sentido se llegaría a lo mismo.

[En cartesianas habría que usar dos caminos: $(x, \sqrt{1-x^2})$, $x \in [-1, 1]$ y $(x, -\sqrt{1-x^2})$, $x \in [1, -1]$].



Ej 11. Calculemos la integral de línea del campo vectorial $\mathbf{g}(x, y, z) = (z, e^y, xy)$ desde $(1, 0, 0)$ hasta $(1, 2, 3)$ a lo largo del segmento que une los puntos.

Hay muchas formas de parametrizar un segmento en el espacio. Para este, para el que se tiene $x=1$ constante, una \mathbf{c} salta a la vista: $\mathbf{c}(t) = (1, 2t, 3t)$, $t \in [0, 1]$.

Esta misma parametrización es la que nos daría la expresión general vista en 1.1:

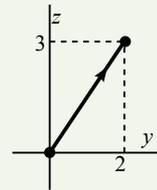
$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{p} + (\mathbf{q} - \mathbf{p})t, \quad t \in [0, 1] \text{ [si } t=0 \text{ estamos en } \mathbf{p} \text{ y si } t=1 \text{ en } \mathbf{q}].$$

Otra distinta, observando el dibujo de la derecha, es: $\mathbf{c}_*(y) = (1, y, \frac{3}{2}y)$, $y \in [0, 2]$.

Calculemos ya la integral pedida con ambas parametrizaciones (debe salir lo mismo):

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (3t, e^{2t}, 2t) \cdot (0, 2, 3) dt = \int_0^1 (2e^{2t} + 6t) dt = e^2 + 2.$$

$$\int_{\mathbf{c}_*} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^2 (\frac{3}{2}y, e^y, y) \cdot (0, 1, \frac{3}{2}) dy = \int_0^2 (e^y + \frac{3}{2}y) dy = e^2 + 2.$$



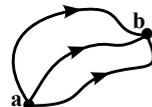
Integrales de gradientes. Generalizamos la fórmula de \mathbf{R} : $\int_a^b g'(x) dx = g(b) - g(a)$.

Teor 3. Sea $U : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ un campo escalar C^1 y $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ camino C^1 a trozos. Entonces: $\int_{\mathbf{c}} \nabla U \cdot d\mathbf{s} = U(\mathbf{c}(b)) - U(\mathbf{c}(a))$.

Si $\mathbf{c} \in C^1$ (si no, dividimos), $\int_a^b \nabla U(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) dt = \int_a^b (U \circ \mathbf{c})'(t) dt = U(\mathbf{c}(b)) - U(\mathbf{c}(a))$.

Por tanto, la integral de línea de un gradiente no depende del camino, sólo del punto inicial y final. Si identificamos un campo como un gradiente, la integral es muy sencilla. Cuando $\mathbf{c}(a) = \mathbf{c}(b)$, \mathbf{c} describe una curva cerrada e

$\oint_{\mathbf{c}} \nabla U \cdot d\mathbf{s} = 0$: la integral de línea de un gradiente a lo largo de cualquier curva cerrada es 0.



Si un campo vectorial \mathbf{f} es gradiente de alguna función U , a U se le llama **función potencial** para \mathbf{f} , y el campo \mathbf{f} se dice **conservativo**.

¿Cómo saber si \mathbf{f} es conservativo? Condiciones necesarias sencillas para $n=2$ y $n=3$ son:

Teor 4. Si $\mathbf{f}(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ de C^1 es conservativo $\Rightarrow f_y \equiv g_x$.
Si $\mathbf{f}(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z))$ de C^1 es conservativo $\Rightarrow \text{rot } \mathbf{f} = \mathbf{0}$.

Si $(f, g) = (U_x, U_y) = \nabla U$, con $U \in C^2$, debe ser $f_y \equiv g_x$, pues, como sabemos, $U_{xy} = U_{yx}$.

Y lo mismo para $n=3$. Ya vimos en 1.2 que el rotacional de un gradiente siempre era $\mathbf{0}$.

Pidiendo muy poco más las implicaciones opuestas se cumplen (aunque es difícil de demostrar):

Teor 5. Si \mathbf{f} es C^1 en todo \mathbf{R}^2 [\mathbf{R}^3] y $f_y \equiv g_x$ [$\text{rot } \mathbf{f} = \mathbf{0}$] $\Rightarrow \mathbf{f}$ es conservativo.

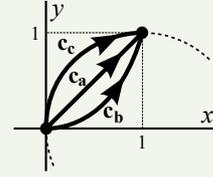
[De hecho basta con que sea C^1 en lo que se llama un 'conjunto simplemente conexo' (sin 'agujeros')].

Si las derivadas cruzadas no coinciden, no puede \mathbf{f} ser gradiente. Si son iguales, muchas veces es sencillo hallar una U tal que $\nabla U = \mathbf{f}$ [aunque la implicación \Leftarrow haya veces que no se cumple].

Ej 12. Sea $\mathbf{f}(x, y) = (y^2, 2xy)$. Hallemos la integral entre $(0, 0)$ y $(1, 1)$ a lo largo de diferentes curvas:
 a) la recta que une los puntos, b) la parábola $y = x^2$, c) la circunferencia $x^2 + y^2 = 2x$.

Posibles parametrizaciones: a) $\mathbf{c}_a = (t, t)$, b) $\mathbf{c}_b = (t, t^2)$, c) $\mathbf{c}_c = (t, \sqrt{2t-t^2})$, con $t \in [0, 1]$ todas.
 Las integrales en cada caso son:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \int_0^1 (t^2, 2t^2) \cdot (1, 1) dt = \int_0^1 3t^2 dt = 1, \\ \text{b) } & \int_0^1 (t^4, 2t^3) \cdot (1, 2t) dt = \int_0^1 5t^4 dt = 1, \\ \text{c) } & \int_0^1 (2t-t^2, 2t\sqrt{2t-t^2}) \cdot \left(1, \frac{1-t}{\sqrt{2t-t^2}}\right) dt = \int_0^1 (4t-3t^2) dt = 1. \end{aligned}$$



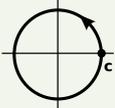
Pero como $\frac{\partial}{\partial y}(y^2) = 2y = \frac{\partial}{\partial x}(2xy)$ y $\mathbf{f} \in C^1$ sabemos por teorema 5 que \mathbf{f} es conservativo. Y es fácil en este caso hallar una U :

$$\begin{aligned} \text{Si } U_x = y^2, & \text{ debe ser } U = xy^2 + p(y) \text{ para alguna función } p \\ \text{Si } U_y = 2xy, & \text{ debe ser } U = xy^2 + q(x) \text{ para alguna función } q \end{aligned} \Rightarrow U(x, y) = xy^2.$$

Por tanto, las parametrizaciones y cálculos de integrales de arriba han sido inútiles, puesto que la integral **a lo largo de cualquier trayectoria** debía valer $U(1, 1) - U(0, 0) = 1 - 0 = 1$.

[El campo $(y, 0)$ del ejemplo 10 no era conservativo. No podía serlo desde que vimos que su integral sobre un camino cerrado era no nula. Pero también lo asegura $f_y = 1 \neq 0 = g_x$].

Ej 13. Hallemos la integral de $\mathbf{f}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ a lo largo de $x^2 + y^2 = 1$ en sentido antihorario.



$$\text{Si } \mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi], \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt = 2\pi.$$

No puede haber un potencial C^1 que contenga la curva, pese a ser $f_y = g_x = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$.

Como se ve en el ejemplo anterior, **no basta la igualdad de las derivadas cruzadas para ser conservativo**. Es necesario además que la \mathbf{f} sea 'buena' [y esta \mathbf{f} no era C^1 en $(0, 0)$].

Y ahora un ejemplo de campo conservativo en el espacio:

Ej 14. Calculemos la integral de línea del campo vectorial $\mathbf{f}(x, y, z) = (4x, 3z-2y, 3y)$ desde $(1, 0, 0)$ hasta $(1, 2, 3)$ a lo largo del segmento que une los puntos.

Como en el ejemplo 11 ya parametrizamos el segmento, podemos hallar la integral directamente:

$$\mathbf{c}(t) = (1, 2t, 3t), t \in [0, 1] \rightarrow \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (1, 5t, 6t) \cdot (0, 2, 3) dt = \int_0^1 28t dt = 14t^2 \Big|_0^1 = 14.$$

$$\text{Pero para este campo es } \text{rot } \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 4x & 3z-2y & 3y \end{vmatrix} = (3-3)\mathbf{i} + (0-0)\mathbf{j} + (0-0)\mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

y además \mathbf{f} es C^1 en \mathbf{R}^3 . Existe, por tanto, una función potencial $U(x, y, z)$ para el campo \mathbf{f} .

$$\begin{aligned} U_x = 4x & \rightarrow U = 2x^2 + p(y, z) \\ \text{Debe ser } U_y = 3z-2y & \rightarrow U = 3yz - y^2 + q(x, z), \quad U = 2x^2 + 3yz - y^2 \Rightarrow \\ U_z = 3y & \rightarrow U = 3yz + r(x, y) \end{aligned} \quad \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = U(1, 2, 3) - U(1, 0, 0) = 16 - 2 = 14.$$

Este es el valor de la integral sobre cualquier camino que una los puntos, por complicado que sea.

Por ejemplo, hallemos la integral a lo largo de $\mathbf{c}^*(t) = (e^{t-t^2}, 2t^3, 3t^2)$, $t \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{c}^*} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^1 (4e^{t-t^2}, 9t^2-4t^3, 6t^3) \cdot ((1-2t)e^{t-t^2}, 6t^2, 6t) dt = \int_0^1 (2(2-4t)e^{2t-2t^2} + 90t^4 - 24t^5) dt \\ &= 2e^{2t-2t^2} + 18t^5 - 4t^6 \Big|_0^1 = 14 \end{aligned}$$

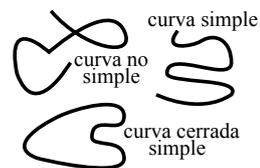
[El campo \mathbf{g} del ejemplo 11 no era conservativo, por ser $\text{rot } \mathbf{g} = (x, 1-y, 0) \neq \mathbf{0}$, y era necesario utilizar la definición para calcular la integral pedida].

Teoremas de Green y de la divergencia

Veamos dos teoremas que relacionan integrales dobles e integrales de línea sobre curvas cerradas en el plano. [Se verán otros similares en el capítulo adicional 5 para integrales de campos en el espacio (estos se pueden ver como casos particulares de aquellos), tras definir las integrales de superficie].

Una **curva simple** será la imagen de una $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2$, C^1 a trozos e **inyectiva**. Si además es $\mathbf{c}(a) = \mathbf{c}(b)$, se llama **curva cerrada simple**.

Una curva de estas puede recorrerse en dos sentidos opuestos; para indicar que se recorre en sentido antihorario indicaremos \oint .



Teorema de Green:

Sea $D \subset \mathbf{R}^2$ limitado por ∂D curva cerrada simple y el campo $\mathbf{f} = (f, g) \in C^1(D)$. Entonces:

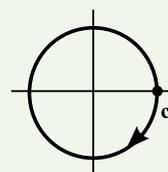
$$\iint_D [g_x - f_y] dx dy = \oint_{\partial D} f dx + g dy \equiv \oint_{\partial D} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}.$$

[Obsérvese que si \mathbf{f} es conservativo, el teorema de Green dice $0 = \oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$ como debía ser].

Ej 10*. Encontramos, usando Green, el valor π de la integral de $\mathbf{f}(x, y) = (y, 0)$ sobre la circunferencia unidad calculado ya en el ejemplo 10.

Como el sentido de recorrido es opuesto al que pide Green y $g_x - f_y = -1$ es:

$$\oint_{\partial D} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = - \iint_D (-1) dx dy = \iint_D dx dy = \text{área de } D = \pi \cdot 1^2 = \pi.$$



Ej 15. Comprobemos el teorema para $\mathbf{f}(x, y) = (y, 2x)$ en la región acotada por $y = -x^2$ e $y = -1$.

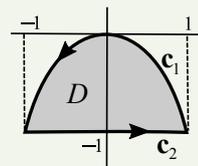
$g_x - f_y = 1$ (por tanto la \iint_D medirá el área de la región y debe ser positiva).

La integral doble: $\iint_D [g_x - f_y] dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^{-x^2} dy dx = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \frac{4}{3}$.

La frontera ∂D está formada por dos curvas:

$$\mathbf{c}_1(x) = (x, -x^2), x \in [1, -1], \quad \mathbf{c}_2(x) = (x, -1), x \in [-1, 1] \rightarrow$$

$$\oint_{\partial D} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_1^{-1} (-x^2, 2x) \cdot (1, -2x) dx + \int_{-1}^1 (-1, 2x) \cdot (1, 0) dx = \int_{-1}^1 5x^2 dx + \int_{-1}^1 (-1) dx = \frac{4}{3}.$$



Ej 16. Halleemos $\oint_{\partial D} e^x \sin y dx + e^{2x} \cos y dy$ siendo D el rectángulo $[0, 2] \times [0, \frac{\pi}{2}]$.

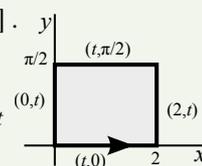
La ∂D está constituida ahora por 4 curvas (segmentos sencillos) distintas:

$$\int_0^2 (0 \cdot 1 + 0) dt + \int_0^{\pi/2} (0 + e^4 \cos t \cdot 1) dt - \int_0^2 (e^t \cdot 1 + 0) dt - \int_0^{\pi/2} (0 + \cos t \cdot 1) dt$$

$$= e^4 [-\sin t]_0^{\pi/2} - [e^t]_0^2 - [\sin t]_0^{\pi/2} = e^4 - e^2$$

Utilizando Green los cálculos son bastante más cortos: $g_x - f_y = 2e^{2x} \cos y - e^x \cos y$,

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^2 (2e^{2x} - e^x) \cos y dx dy = [\sin y]_0^{\pi/2} [e^{2x} - e^x]_0^2 = e^4 - e^2.$$



Las integrales de línea normalmente son de peor cálculo que las dobles (como en los ejemplos anteriores), con lo que Green se usa más para hacer las segundas en vez de las primeras. Pero en casos excepcionales no es así, como en el ejemplo siguiente, en la que calculamos un área:

Ej 17. Calculemos el área encerrada por la 'hipocicloide' $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

Como para el campo $\mathbf{f}(x, y) = (-y, x)$ es $g_x - f_y = 2$, un área se puede poner:

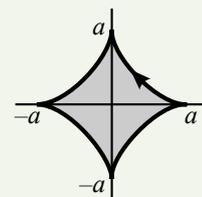
$$A = \iint_D dx dy = \frac{1}{2} \oint_{\partial D} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}. \text{ En este caso particular:}$$

$\mathbf{c}(\theta) = (a \cos^3 \theta, a \sin^3 \theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$ es una posible parametrización de ∂D .

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (-a \sin^3 \theta, a \cos^3 \theta) \cdot (-3a \cos^2 \theta \sin \theta, 3a \sin^2 \theta \cos \theta) d\theta$$

$$= \frac{3}{2} a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta = \frac{3}{8} a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 2\theta d\theta = \frac{3}{16} a^2 \int_0^{2\pi} [1 - \cos 4\theta] d\theta = \frac{3}{8} \pi a^2.$$

[Calcular directamente $A = 4 \int_0^a (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2} dx$ es difícil].

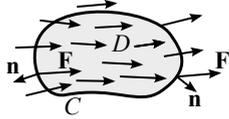


Del teorema de Green se deduce fácilmente el **teorema de la divergencia en el plano**:

Sean $D \subset \mathbf{R}^2$ limitado por ∂D curva cerrada simple, $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbf{R}^2$ campo vectorial C^1 , y \mathbf{n} el vector normal unitario exterior a ∂D . Entonces $\iint_D \operatorname{div} \mathbf{f} \, dx \, dy = \oint_{\partial D} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, ds$.

Si ∂D viene dada por $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$, la normal es $\mathbf{n} = \frac{(y'(t), -x'(t))}{\|\mathbf{c}'(t)\|}$.

Si $\mathbf{f} = (f, g)$, $\oint_{\partial D} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_a^b [f(x(t), y(t)) y'(t) - g(x(t), y(t)) x'(t)] dt$
 $= \oint_{\partial D} f \, dy - g \, dx \stackrel{\text{Green}}{=} \iint_D (f_x + g_y) \, dx \, dy$.



[Imaginemos una curva cerrada C sobre la superficie de un fluido y sea $\mathbf{F} = f \mathbf{v}$, donde f es la densidad del fluido y \mathbf{v} su velocidad. Entonces $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds$ mide el ritmo con el que el fluido entra o sale de D .

Si la cantidad de fluido en D disminuye (aumenta) será $\oint_C < 0$ ($\oint_C > 0$). La integral coincide con $\iint_D \operatorname{div} \mathbf{F}$. Por tanto, la $\operatorname{div} \mathbf{F}$ describe la tendencia del fluido a acumularse o dispersarse].

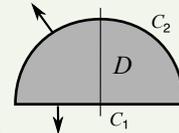
Ej 18. Comprobemos este teorema para $\mathbf{f}(x, y) = (7, y^2 - 1)$ en el semicírculo $r \leq 3$, $0 \leq \theta \leq \pi$:

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = 2y, \quad \iint_D 2y \, dx \, dy = \int_0^\pi \int_0^3 2r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta = 36.$$

Para C_1 , si $\mathbf{c}(x) = (x, 0)$, $x \in [-3, 3]$, $\mathbf{n} = (0, -1)$, $\int_{C_1} (1 - y^2) \, ds = \int_{-3}^3 dx = 6$.

Para C_2 , si $\mathbf{c}(t) = (3 \cos t, 3 \sin t)$, $t \in [0, \pi]$, $\|\mathbf{c}'(t)\| = 3$. Como $\mathbf{n} = (\cos t, \sin t)$,

$$\int_{C_2} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, ds = 3 \int_0^\pi (7 \cos t + 9 \sin^3 t - \sin t) \, dt = 30.$$



Ej 19. Comprobemos los teoremas de Green y de la divergencia para el campo $\mathbf{f}(x, y) = (x^3, x^2 y)$ y el recinto D del primer cuadrante acotada por $y = 2x$ e $y = x^2$.

Green: $\iint_D [g_x - f_y] \, dx \, dy = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} 2xy \, dy \, dx = \int_0^2 (4x^3 - x^5) \, dx = [x^4 - \frac{x^6}{6}]_0^2 = \frac{16}{3}$.

Posibles parametrizaciones de los dos tramos de ∂D :

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_1(x) &= (x, x^2), \quad x \in [0, 2], \quad \mathbf{c}'_1 = (1, 2x), \quad \mathbf{f}(\mathbf{c}_1) = (x^3, x^4) \\ \mathbf{c}_2(x) &= (x, 2x), \quad x \in [2, 0], \quad \mathbf{c}'_2 = (1, 2), \quad \mathbf{f}(\mathbf{c}_2) = (x^3, 2x^3) \end{aligned} \rightarrow$$

$$\oint_{\partial D} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^2 (x^3 + 2x^5) \, dx - \int_0^2 (x^3 + 4x^3) \, dx = \frac{2^6}{3} - 2^4 = \frac{16}{3}.$$

Divergencia: $\operatorname{div} \mathbf{f} = 4x^2$. $\mathbf{n}_1 = \frac{(2x, -1)}{\sqrt{1+4x^2}}$, $\mathbf{n}_2 = \frac{(-2, 1)}{\sqrt{5}}$. $\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} 4x^2 \, dy \, dx = \int_0^2 (8x^3 - 4x^2) \, dx = \frac{32}{5}$.

$$\oint_{\partial D} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_0^2 (x^3, x^4) \cdot \frac{(2x, -1)}{\sqrt{1+4x^2}} \sqrt{1+4x^2} \, dx - \int_0^2 (x^3, 2x^3) \cdot \frac{(-2, 1)}{\sqrt{5}} \sqrt{5} \, dx = \int_0^2 x^4 \, dx = \frac{32}{5}.$$

