3. Ecuaciones diferenciales ordinarias

3.1 Algunas EDOs de primer orden resolubles

Una ecuación diferencial ordinaria o EDO es una ecuación en la que aparecen derivadas de una función incógnita de una variable y se llama orden de la ecuación al orden de la derivada más alta entre las que aparecen. Por tanto:

Una **ecuación diferencial ordinaria de primer orden** es de la forma: $\boxed{\frac{dy}{dx}=f(x,y)}$.

[Aunque no se suele escribir $y(x)$, no se olvide que y es función de x.
Y, aunque usamos ahora esa notación, otras veces será $x(t)$, $T(t)$, ...].

Buscamos sus **soluciones**: las **funciones derivables** $y(x)$ **que convierten la ecuación en una identidad**.

Consideremos la sencilla ecuación $y'=-2y$. Es inmediato comprobar que la cumplen las funciones de la forma $y=Ce^{-2x}$ para cualquier constante C. A esta expresión (que incluye todas las soluciones) se le llama **solución general** y siempre tendrá **una constante arbitraria** (en las EDOs de primer orden).

Para aislar una única solución se debe imponer un **dato inicial**. Por ejemplo, si exigimos que sea $y(0)=7$, la única solución que cumple la ecuación y ese dato es $y=7e^{-2x}$.

Para mayoría de las EDOs no se puede calcular la solución. E incluso hay otras que no tienen solución o tienen más de una cumpliendo un dato inicial, pero esto es raro según el 'teorema de existencia y unicidad [TEU]':

$$\boxed{f,\ f_y \text{ continuas en un entorno de } (a,b) \Rightarrow \text{ existe solución única de } \frac{dy}{dx}=f(x,y) \text{ con } y(a)=b\,.}$$

Citemos algunos casos de EDOs de primer orden resolubles (hay pocos más).

Las ecuaciones **separables** son de la forma: $\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{p(x)}{q(y)}} \to \int q(y)\,dy=\int p(x)\,dx+C$.

[Si podemos hallar las primitivas y despejar la y obtendríamos así la solución explícita $y(x)$].

Pasan a ser separables: $\boxed{\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)}$ con el cambio $z=\frac{y}{x}$. $\boxed{\frac{dy}{dx}=f(ax+by)}$ con $z=ax+by$.

[Por ejemplo, con la primera se obtiene: $y=xz$, $xz'+z=f(z)$, $\frac{dz}{dx}=\frac{f(z)-z}{x}$, $\int\frac{dz}{f(z)-z}=\int\frac{dx}{x}+C$].

La **ecuación lineal** es: $\boxed{\frac{dy}{dx}=a(x)y+f(x)}$. Se dice **homogénea** cuando $f(x)\equiv 0$ y **no homogénea** cuando $f(x)\not\equiv 0$.

La solución general de la homogénea $y'=a(x)y$ es $\boxed{y=C\,e^{\int a(x)dx}}$.

[Fácil de deducir, por ser ecuación separable: $\int\frac{dy}{y}=\ln y=\int a+C^*$, $y=e^{\int a+C^*}=C\,e^{\int a}$,
pero mejor es utilizar la fórmula cuando sea lineal para no repetir este proceso de cálculo].

La de la no homogénea es: $\boxed{y=C\,e^{\int a(x)dx}+e^{\int a(x)dx}\int e^{-\int a(x)dx}f(x)\,dx}$ [fórmula de variación de las constantes **fvc**].

Esta solución tiene la forma de **solución general de la homogénea más una solución particular** y_p **de la no homogénea** y bastantes veces la y_p se puede encontrar por tanteo, en vez de integrar.

Tanto las lineales homogéneas como las no homogéneas aparecen muchas veces resolviendo ecuaciones en derivadas parciales. Estas importantes fórmulas se usarán a menudo en el curso.

Una ecuación es **exacta** cuando escrita en la forma $\boxed{M(x,y)+N(x,y)\frac{dy}{dx}=0}$ es $\boxed{M_y\equiv N_x}$ en $\mathbf{R}^2$.

Caso de serlo, su solución es: $\boxed{U(x,y)=C \text{ con } \begin{matrix}M=U_x\\ N=U_y\end{matrix}}$ [Unas veces y se podrá despejar y otras no].

[Pues las funciones $y(x)$ definidas por $U(x,y(x))=C$, según la regla de la cadena, satisfacen:

$$\frac{d}{dx}U(x,y(x))=U_x\frac{dx}{dx}+U_y\frac{dy}{dx}=M(x,y)+N(x,y)\frac{dy}{dx}=0\,].$$

[La U se halla, desde luego, como se calculaban los campos conservativos en el capítulo 2].

Ej 1. Hallemos la solución general de $\boxed{\frac{dy}{dx}=3-y}$ y la (única) solución con $\boxed{y(0)=3}$.

Siempre que sea lineal, lo mejor es utilizar las fórmulas. Y para utilizar la **fvc** empezamos siempre, porque aparece 3 veces, calculando $e^{\int a(x)\,dx} = e^{-x}$. Yendo a la fórmula:

$y = Ce^{-x} + e^{-x}\int 3e^{x}\,dx = Ce^{-x}+3$, que es, por tanto, la solución general de la ecuación.

Aunque la solución particular $y_p=3$ era clara ($0=3-3$, las soluciones constantes saltan a la vista) y nos hubiera bastado hallar la de la homogénea y sumarle el 3 , ahorrándonos una integral.

Imponiendo el dato inicial a esta solución aislamos la pedida: $y(0)=C+3=3 \;\to\; C=0$, $y=3$.

Pero la ecuación se podía haber visto también como separable:

$\int \frac{dy}{3-y} = -\ln(3-y) = x+C \;\to\; y = 3-e^{C}e^{-x} \overset{\bullet}{=} 3-Ce^{-x}$ (como antes, con otra C arbitraria).

[Lo habitual es ir llamando a las constantes arbitrarias C , aunque sean distintas: e^{C} pasó a ser C . Observemos que sin el último paso • parecería no haber solución con el dato: $3=3-e^{C}$, $e^{C}=0$!!].

Ej 2. Calculemos la solución de la ecuación $T(t)$ de $\boxed{\begin{cases} T'=2tT \\ T(1)=5 \end{cases}}$ (practicando con otras letras).

Es claramente una lineal homogénea: $T=C\,e^{\int 2t\,dt} = C\,e^{t^2}$. Con el dato: $5=Ce \;\to\; T=5\,e^{t^2-1}$.

Ej 3. Hallemos la solución de la lineal $\boxed{\frac{dy}{dx}=-\frac{2y}{x}+3}$ que cumple el dato inicial $\boxed{y(1)=0}$.

Siempre en las lineales empezamos calculando: $e^{\int a} = e^{-2\ln x} = e^{\ln x^{-2}} = \frac{1}{x^2}$. La solución general es:

$y=\frac{C}{x^2}+\frac{1}{x^2}\int 3x^2dx = \frac{C}{x^2}+x \xrightarrow{d.i.} 0 = C+1 \;\to\; y=x-\frac{1}{x^2}$, solución que cumple el dato.

[Los datos iniciales no se podían poner en $x=0$ (discontinuas a y solución); hay que darlos en 'buenos' puntos].

Ej 4. Resolvamos $\boxed{\begin{matrix} y'=3t^2+3t^2y^2 \\ y(0)=0 \end{matrix}}$. Primera ecuación no lineal que aparece, pero se ve que es separable.

$\int \frac{dy}{1+y^2} = \arctan y = \int 3t^2dt + C = t^3+C$. $y=\tan\left(t^3+C\right) \xrightarrow{y(0)=0} 0=\tan C \;\to\; y=\tan\left(t^3\right)$.

Ej 5. $\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{y}{y-x}}$ (con solución única, según el TEU, si $y\neq x$) se puede resolver por tres caminos:

Primero comprobemos que es exacta. Para ellos la reescribimos en la forma $y+(x-y)\frac{dy}{dx}$.

Como $M_y\equiv N_x=1$, existe U tal que $\begin{matrix} U_x=y \;\to\; U=xy+p(y) \\ U_y=x-y \;\to\; U=xy-\frac{1}{2}y^2+q(x) \end{matrix} \;\to\; y^2-2xy=C$.

Ahora la convertimos en separable con un cambio de variable, pues se puede escribir así: $\frac{dy}{dx}=\frac{y/x}{y/x-1}$.

$z=\frac{y}{x} \;\to\; xz'+z=\frac{z}{z-1}$, $xz'=\frac{2z-z^2}{z-1}$, $\int\frac{(2z-2)\,dz}{z^2-2z}=-2\int\frac{dx}{x}+C$, $\ln(z^2-2z)=C-2\ln x$,

$z^2-2z=\frac{C}{x^2}$. Deshaciendo el cambio: $\frac{y^2}{x^2}-2\frac{y}{x}=\frac{C}{x^2}$, que lleva a la expresión anterior.

Las soluciones de la ecuación son las mismas (salvo 0s e ∞s) que las de la lineal $\frac{dx}{dy}=\frac{y-x}{y}=-\frac{x}{y}+1$.

Con la **fvc** (y cambiando papeles de x e y) volvemos a tener: $x=\frac{C}{y}+\frac{1}{y}\int y\,dy=\frac{C}{y}+\frac{y}{2}$.

Dibujemos las soluciones para varios C (mejor a partir de la última expresión):

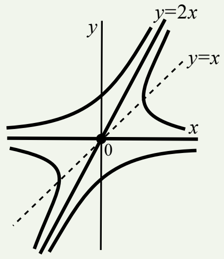
Se ve que hay 2 soluciones $y=0$ e $y=2x$ cumpliendo $y(0)=0$ (ahí f es discontinua).

También se ve que por $y=x$ (donde fallaba el TEU) no pasan soluciones, sino curvas de pendiente infinito (no son funciones derivables ahí, por tanto).

Se llaman '**curvas integrales**' de una ecuación diferencial a las curvas que son soluciones de $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ o de la ecuación 'dada la vuelta' $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f(x,y)}$.

En nuestro caso, esta última tiene solución única $x(y)$ cuando $y\neq 0$ (por el TEyU).

Salvo en $(0,0)$ hay solución única $y(x)$ ó $x(y)$, o sea, hay una única curva integral.



3.2 EDOs lineales de orden 2 resolubles elementalmente

En esta sección y las dos siguientes estudiaremos ecuaciones de **segundo orden** (con derivadas segundas). Y nos limitaremos a las **lineales** (las que más veces nos aparecerán) pues las no lineales casi nunca se pueden resolver. Es de esperar que sus soluciones contengan 2 constantes arbitrarias (esto le pasa a la ecuación más sencilla $y''=0 \to y=c_1+c_2x$), con lo que habrá que imponer 2 datos iniciales para aislar una única solución.

Resultados generales para [e] $\boxed{y''+a(x)y'+b(x)y=0}$ y [n] $\boxed{y''+a(x)y'+b(x)y=f(x)}$.

ecuación homogénea **ecuación no homogénea**

En los libros de ecuaciones diferenciales ordinarias se demuestra:

Teor 1.

Sea a , b , f continuas en un intervalo I y llamemos $|W|(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ **determinante wronskiano**

Si $x_o \in I$, tienen una sola solución que cumple los datos iniciales $y(x_o)=y_o$, $y'(x_o)=y_o'$.

Si y_1 , y_2 son soluciones de [e] con wronskiano $|W|(s)\neq 0$ para algún $s\in I$, la **solución general de** [e] es $y = c_1\, y_1+c_2\, y_2$, c_1 , c_2 constantes arbitrarias.

Si y_p es una solución de [n], la **solución general de** [n] es: $y = c_1\, y_1+c_2\, y_2+y_p$.

Una solución particular de [n] es $y_p = y_2\int \frac{y_1 f}{|W|}dx - y_1\int \frac{y_2 f}{|W|}dx$ [fórmula de variación de las constantes **fvc**].

[Dicho finamente, las soluciones de [e] son un **espacio vectorial** de dimensión 2 (sumas y múltiplos de soluciones son soluciones) y que su wronskiano sea no nulo asegura que y_1 e y_2 no dependen linealmente].

[En las lineales de primer orden de 3.1 también la **solución de la no homogénea** era la solución general de la homogénea (allí con sólo 1 constante) + y_p de la no homogénea].

Además de las de coeficientes constantes y Euler que vemos luego, hay **dos tipos de ecuaciones** [n] **resolubles**. En el resto de los casos se resuelve mediante series de potencias [sección adicional 5.2]:

a) Si $b(x)\equiv 0$, el cambio $y'=v$ lleva [n] a una lineal de primer orden en v .
b) Si y_1 es solución de [e] $\Rightarrow$ $y_2=y_1\int e^{-\int a\,dx}\, y_1^{-2}dx$ es otra solución de [e].

a) es evidente. Para probar b) se hace $y = y_1\int u\,dx \;\to\; y'=y_1'\int u+y_1u$, $y''=y_1''\int u+2y_1'u+y_1u'$,

que llevadas a [e] dan: $y_1u'+(2y_1'+ay_1)u+(y_1''+ay_1'+by_1)\int u\,dt=0 \;\to\; u'=-\big(2y_1'y_1^{-1}+a\big)u$.

por ser y_1 solución. Por tanto, $u=e^{-\int a\,dx}\, y_1^{-2}$ y deshaciendo el cambio se llega al resultado.

[Según b), no se necesitan las 2 soluciones que pedía el Teor 1 para resolver [e] (y, por tanto, también [n] con la **fvc**). Basta sólo hallar 1. El problema es que en pocas ocasiones podremos encontrarla: a veces a simple vista, a veces tanteando, a veces aparece cuando se está resolviendo por series].

Ej 1. $\boxed{xy''-2y'=2x} \xrightarrow{y'=v} v'=\frac{2v}{x}+2$. En la **fvc** de primer orden, como se dijo, se empieza hallando $e^{\int a}$.

$e^{\int 2dx/x}=e^{2\ln x}=x^2 \;\to\; v=Cx^2+x^2\int\frac{2\,dx}{x^2}=Cx^2-2x \;\to\; y=K+Cx^3-x^2$.

[También será una ecuación de Euler $x^2y''-2xy'=2x^2$, de las que trataremos luego].

Para precisar las 2 constantes (que siempre aparecen) habrá que imponer 2 datos iniciales en un $x_o\neq 0$ [en $x=0$ es $a(x)=\frac{2}{x}$ discontinua y un par de datos nos podrían dar ninguna o infinitas soluciones].

Por ejemplo, $y(1)=0$, $y'(1)=1$ lleva a $\begin{matrix} c_1+c_2-1=0 \\ 3c_2-2=1 \end{matrix} \;\to\; c_2=1$, $c_1=0$, $y=x^3-x^2$ única solución.

Ej 2. $\boxed{x^3y''-xy'+y=0}$. Es claro que $y_1=x$ es solución de esta homogénea.

[También lo serán entonces $y=Cx$ para cualquier constante C , pues sabemos que los múltiplos de soluciones de una lineal homogénea son soluciones. Las rectas $y=x+b$ son soluciones de la homogénea que saltan a la vista, pues, al ser $y''=0$, basta mirar los otros dos términos].

Como $a(x)=-\frac{1}{x^2}$ la otra solución de esta homogénea es $y_2=x\int\frac{e^{-\int -x^{-2}dx}}{x^2}\,dx=x\int\frac{e^{-1/x}}{x^2}=x\,e^{-1/x}$.

Y, por tanto, la solución general de la ecuación lineal es $y=c_1x+c_2\,x\,e^{-1/x}$.

Coeficientes constantes: [h] $\boxed{y''+ay'+by=0}$, [c] $\boxed{y''+ay'+by=f(x)}$, $a,b\in\mathbf{R}$.

Para resolver [h] basta con hallar las raíces del **polinomio característico** $\boxed{\mu^2+a\mu+b=0}$, que se llaman **autovalores** de [h] (la ecuación se dice también **característica**), pues entonces:

La solución general de [h] es:	si $\mu_1\neq\mu_2$ reales $\to$ $y=c_1\,e^{\mu_1 x}+c_2\,e^{\mu_2 x}$ si μ doble (real) $\to$ $y=(c_1+c_2x)\,e^{\mu x}$ si $\mu=p\pm \mathrm{i}\,q$ $\to$ $y=(c_1\cos qx+c_2\,\mathrm{sen}\,qx)\,e^{px}$

[Si $a,b\in\mathbf{C}$ será $y=c_1e^{\mu_1 x}+c_2e^{\mu_2 x}$ ó $y=(c_1+c_2x)\,e^{\mu x}$ con $\mu_1,\mu_2,\mu,c_1,c_2\in\mathbf{C}$].

Ej 3. $y''+4y'=0$, $\mu^2+4\mu=0\ \to\ \mu=0,-4\ \to\ y=c_1+c_2\,e^{-4x}$.
$y''+4y'+3y=0$, $\mu^2+4\mu+3=0\ \to\ \mu=-1,-3\ \to\ y=c_1\,e^{-x}+c_2\,e^{-3x}$.
$y''+4y'+4y=0$, $\mu^2+4\mu+4=0\ \to\ \mu=-2$ doble $\to\ y=(c_1+c_2x)\,e^{-2x}$.
$y''+4y'+5y=0$, $\mu^2+4\mu+5=0\ \to\ \mu=-2\pm\mathrm{i}\ \to\ y=(c_1\cos x+c_2\,\mathrm{sen}\,x)\,e^{-2x}$.

$y''-4\mathrm{i}\,y'-3y=0$, $\mu^2-4\mathrm{i}\,\mu-3=0\ \to\ \mu=2\mathrm{i}\pm\sqrt{-1}=\mathrm{i},3\mathrm{i}\ \to\ y=c_1\,e^{\mathrm{i}x}+c_2\,e^{3\mathrm{i}x}$, $c_1,c_2\in\mathbf{C}$.

Para dar una solución particular y_p de [c] siempre se dispone de la **fvc**, pero si $f(x)$ es polinomio, exponencial, seno o coseno o producto de ellos es mucho más corto obtenerla con un tanteo sugerido por la forma de $f(x)$. Antes de dar el teorema general, demos unos ejemplos para justificarlo.

Para calcular la solución general de $\boxed{y''+4y'+3y=f(x)}$ con $\boxed{f(x)=x}$ buscamos una y_p que la cumpla.
(La solución general de la homogénea está escrita arriba en el ejemplo 3).

A la vista de la x parece buena idea buscar un polinomio que la cumpla. Llevemos $y_p=Ax+B$ a la ecuación precisar los A y B : $0+4A+3(Ax+B)=x$. Para que esto se cumpla debe ser $3A=1$ y $4A+3B=0$, es decir, $A=\frac{1}{3}$ y $B=-\frac{4}{9}$. Es la $y_p=\frac{1}{3}x-\frac{4}{9}$ [y la solución de la ecuación será entonces $y=c_1\,e^{-x}+c_2\,e^{-3x}+\frac{x}{3}-\frac{4}{9}$].

Si ahora $\boxed{f(x)=e^x}$ no es adecuado probar polinomios. La buena conjetura será $y_p=Ae^x$ pues sus derivadas son otras exponenciales. Yendo a ecuación obtenemos $A(1+4+3)\,e^x=e^x\ \to\ A=\frac{1}{8}$, $y=c_1\,e^{-x}+c_2\,e^{-3x}+\frac{1}{8}\,e^x$.

¿Y si $\boxed{f(x)=e^{-x}}$? Probar $y_p=Ae^{-x}$ no va a funcionar, porque ya hay soluciones de la homogénea de esa misma forma (es decir, porque -1 era uno de los dos autovalores de la ecuación). En esos casos (como dirá el teorema) hay que multiplicar la y_p por potencias de x [lo que se llevaría la ecuación es $y_p=Axe^{-x}$]

Por último, sea $\boxed{f(x)=\cos x}$. ¿Qué se debe probar? Como al derivar cosenos aparecen senos y viceversa, la conjetura será $y_p=A\cos x+B\,\mathrm{sen}\,x\ \to\ y_p'=-As+Bc$, $y_p''=-Ac-Bs\ \to\ (2A+4B)c+(2B-4A)s=c$. $B=2A$, $10A=1$, $A=\frac{1}{10}$, $B=\frac{1}{5}$. La solución general es en este caso $y=c_1\,e^{-x}+c_2\,e^{-3x}+\frac{1}{10}\cos x+\frac{1}{5}\,\mathrm{sen}\,x$.

El **método de coeficientes indeterminados** de los ejemplos anteriores se precisa en este teorema:

Teor 2.
Si $f(x)=p_m(x)$, p_m polinomio de grado m , y $\mu=0$ no es autovalor tiene[c] una solución particular $y_p=P_m(x)$ con P_m del mismo grado m . Si $\mu=0$ es autovalor de multiplicidad r , existe solución $y_p=x^rP_m(x)$.
Si $f(x)=e^{\mu x}p_m(x)$, con p_m de grado m , y μ no es autovalor, hay $y_p=e^{\mu x}P_m(x)$, con P_m de grado m . Si μ es autovalor de multiplicidad r , hay $y_p=x^re^{\mu x}P_m(x)$.
Si $f(x)=e^{px}\big[p_j(x)\cos qx+q_k(x)\,\mathrm{sen}\,qx\big]$, p_j , q_k de grados j , k , y $p\pm iq$ no es autovalor, hay $y_p=e^{px}\big[P_m(x)\cos qx+Q_m(x)\,\mathrm{sen}\,qx\big]$ con P_m y Q_m de grado $m=\text{máx}\{j,k\}$. Si $p\pm iq$ es autovalor hay $y_p=x\,e^{px}\big[P_m(x)\cos qx+Q_m(x)\,\mathrm{sen}\,qx\big]$.

[Los P y Q tienen coeficientes arbitratrios que se precisan llevando la y_p a la ecuación].
[El método también es aplicable a las lineales de primer orden con coeficientes constantes].

Ej 4. Resolvamos $\boxed{y''+4y'+ay=8x+2}$ si $a=4$ y si $a=0$. [Soluciones de la no homogénea en Ej 3.].

En el primer caso ($\lambda=0$ no autovalor) se lleva a la ecuación: $y_p=Ax+B\ \to\ 4A+4Ax+4B=8x+2$
$\to\ 4A=8$, $4A+4B=2$, $A=2$, $B=-\frac{3}{2}$. La solución general es: $y=(c_1+c_2x)\,e^{-2x}+2x-\frac{3}{2}$.

En el segundo, $\mu=0$ es autovalor y hay que multiplicar por x : $y_p=Ax^2+Bx$, $y_p'=2Ax+B$, $y_p''=2A$
$\to\ 2A+8Ax+4B=8x+2\ \to\ A=1$, $B=0$. Solución general: $y=c_1+c_2\,e^{-4x}+x^2$.

[O bien: $y'=v\ \to\ v'=-4v+8x+2$. Con la **fvc** o probando $v_p=Ax+B$ se llega a $v\overset{\uparrow}{=}Ce^{-4x}+2x$].

Ej 5. $\boxed{\begin{cases} y''-y=4\,e^x \\ y(0)=y'(0)=0 \end{cases}}$ $\mu^2-1=0$, $\mu=\pm 1$. Solución general de la homogénea: $y=c_1e^x+c_2e^{-x}$.
Como $\mu=1$ es autovalor, hay que 'engordar' la y_p con una x:
$y_p=Ax\,e^x,\ y_p''=A(x+2)\,e^x \to A(x+2)-Ax=2A=4 \to A=2,\ y_p=2x\,e^x$.

O (más largo) con la **fvc**: $|W|(x)=\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix}=-2,\ y_p=e^{-x}\int\frac{e^x4e^x}{-2}dx-e^x\int\frac{e^{-x}4e^x}{-2}dx=-e^x+2x\,e^x$.

La solución de la no homogénea es $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+2x\,e^x \xrightarrow{d.i.} \begin{cases} c_1+c_2=0 \\ c_1-c_2+2=0 \end{cases} \to y=e^{-x}-e^x+2x\,e^x$.

Ej 6. Hallemos una y_p de $\boxed{y''+y=f(x)}$ para varias $f(x)$. $\big[\mu=\pm i \to y=c_1\cos x+c_2\,\mathrm{sen}\,x+y_p\big]$.

Si $f(x)=7$, la $y_p=7$ salta a la vista (siempre lo hacen las soluciones constantes).

Si $f(x)=x^3$, hay $y_p=Ax^3+Bx^2+Cx+D$ $\big(P_3$ arbitrario, no siendo $\lambda=0$ autovalor$\big)$
$\to 6Ax+2B+Ax^3+Bx^2+Cx+D=x^3 \to A=1,B=0,6A+C=0,D=0,\ y_p=x^3-6x$.

Si $f(x)=2xe^x$, existe $y_p=e^x(Ax+B)$, $y_p'=e^x(Ax+B+A)$, $y_p''=e^x(Ax+B+2A)$
$\to e^x[(Ax+B+2A)+(Ax+B)]=2xe^x \to A=1,\ B=-1,\ y_p=e^x(x-1)$.

Si $f(x)=e^x\cos x$, como $1\pm i$ no es autovalor, hay que probar una $y_p=e^x(A\cos x+B\,\mathrm{sen}\,x)$
$\to (A+2B)\cos x+(B-2A)\,\mathrm{sen}\,x=\cos x \to \begin{cases} A+2B=1 \\ B-2A=0 \end{cases} \to y_p=e^x\big(\frac{1}{5}\cos x+\frac{2}{5}\,\mathrm{sen}\,x\big)$.

Si $f(x)=3\,\mathrm{sen}\,2x$, por no ser $\pm 2i$ autovalores se prueba: $y_p=A\cos 2x+B\,\mathrm{sen}\,2x \to$
$-4A\cos 2x-4B\,\mathrm{sen}\,2x+A\cos 2x+B\,\mathrm{sen}\,2x=3\,\mathrm{sen}\,2x \to A=0,B=-1,\ y_p=-\mathrm{sen}\,2x$.

[En este caso sin y' de hecho bastaba probar $y_p=B\,\mathrm{sen}\,2x$ porque todo son senos].

Si $f(x)=2\,\mathrm{sen}\,x$, como $\pm i$ es autovalor hay que engordar: $y_p=x(A\cos x+B\,\mathrm{sen}\,x)$
Derivando y sustituyendo: $2B\cos x-2A\,\mathrm{sen}\,x=2\,\mathrm{sen}\,x \to A=-1,B=0,\ y_p=-x\cos x$.

Si $f(x)=\cos^2 x$, parecería que no podemos usar coeficientes indeterminados, pero como
$\cos^2x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x) \to$ hay $y_p=A+B\cos 2x+C\,\mathrm{sen}\,2x \to y_p=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\cos 2x$.

Si $f(x)=(\cos x)^{-1}$, no hay más remedio que acudir a la fórmula de variación de las constantes:
$|\mathbf{W}|(x)=1 \to y_p=\mathrm{sen}\,x\int\frac{\cos x}{\cos x}dx-\cos x\int\frac{\mathrm{sen}\,x}{\cos x}dx=x\,\mathrm{sen}\,x+\cos x\ln(\cos x)$.

[En los casos anteriores también se podría haber usado la **fvc**, pero alargando los cálculos innecesariamente].

Imponemos ahora **datos iniciales** en $x=0$ a ecuaciones del Ej 6 y, por primera vez, **datos de contorno** (en $x=a$ y $x=b$ distintos). Como sabemos (por ser las funciones continuas), los iniciales proporcionan siempre una **única solución**. Pero las cosas **se complican con los de contorno** (que serán estudiados en 3.3 y 3.4).

Ej 6*. Imponemos $\boxed{y(0)=y'(0)=0}$ a las ecuaciones $\boxed{\text{a) } y''+y=0,\ \text{b) } y''+y=7,\ \text{c) } y''+y=3\,\mathrm{sen}\,2x}$.

Obtenemos: a) $\begin{cases} c_1=0 \\ c_2=0 \end{cases} \to y=0$, b) $\begin{cases} c_1+7=0 \\ c_2=0 \end{cases} \to y=7-7\cos x$, c) $\begin{cases} c_1=0 \\ c_2-2=0 \end{cases} \to y=2\,\mathrm{sen}\,x-\mathrm{sen}\,2x$,
que son en los tres casos la única solución cumpliendo esos datos, como nos aseguraba el teorema 1.

Unos primeros datos de contorno $\boxed{y(0)=y\big(\frac{\pi}{2}\big)=0}$ nos van a seguir dando soluciones únicas. Se tiene:

a) $\begin{cases} c_1=0 \\ c_2=0 \end{cases} \to y=0$, b) $\begin{cases} c_1+7=0 \\ c_2+7=0 \end{cases} \to y=7-7\cos x-7\,\mathrm{sen}\,x$, c) $\begin{cases} c_1=0 \\ c_2=0 \end{cases} \to y=-\mathrm{sen}\,2x$,

Pero van a suceder cosas raras con estos segundos datos de contorno: $\boxed{y(0)=y(\pi)=0}$.

Para el caso a) $\begin{cases} c_1=0 \\ -c_1=0 \end{cases} \to c_1=0$, pero es válido cualquier c_2. Hay **infinitas soluciones** $y=c_2\,\mathrm{sen}\,x$.

Para el b) $\begin{cases} c_1+7=0 \\ -c_1+7=0 \end{cases}$ que es imposible que se cumpla. **No tiene solución** la ecuación con esos datos.

Para c) $\begin{cases} c_1=0 \\ -c_1=0 \end{cases}$ que se cumple $\forall\, c_2$. También aquí hay **infinitas soluciones**: $y=c_2\,\mathrm{sen}\,x-\mathrm{sen}\,2x$.

[Se verá en la próxima sección que cuando el problema de contorno para la ecuación homogéna tenga la solución única $y\equiv 0$, también será única la solución del problema para la ecuación no homogénea. Y cuando tenga soluciones no triviales, el problema no homogéneo podrá tener infinitas o ninguna solución].

Ecuaciones de Euler: [u] $\boxed{x^2y''+axy'+by=h(x)}$, $x>0$.

Haciendo el cambio de variable independiente $x=e^s$ (o sea, $s=\ln x$): $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{ds}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{x^2}\big[\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{dy}{ds}\big]$, [u] se convierte en la siguiente ecuación lineal con coeficientes constantes:

$$\frac{d^2y}{ds^2}+(a-1)\frac{dy}{ds}+by=h(e^s)\,,\quad \text{de ecuación característica}\quad \boxed{\mu^2+(a-1)\mu+b=0}\,.$$

Conocemos las soluciones de la ecuación homogénea para esta lineal de coeficientes constantes. Deshaciendo el cambio, tenemos que la solución general de una ecuación de Euler **homogénea** es:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Si }\ \mu_1\neq\mu_2\ \text{ reales, }\ y=c_1x^{\mu_1}+c_2x^{\mu_2}\\ \text{Si }\ \mu\ \text{ doble (real), }\ y=(c_1+c_2\ln x)\,x^{\mu}\\ \text{Si }\ \mu=p\pm qi\,,\ y=\big[c_1\cos(q\ln x)+c_2\,\text{sen}(q\ln x)\big]x^p\end{array}}$$

(observemos que la 'ecuación característica' de una ecuación de Euler sería la que obtendríamos probando en la homogénea soluciones de la forma x^μ y la de una de coeficientes constantes se obtendría probando soluciones $e^{\mu x}$).

Para hallar la solución particular de la no homogénea disponemos siempre de la **fórmula de variación de las constantes con** $f(x)=h(x)/x^2$. Para la ecuación de coeficientes constantes en s tenemos además el método de **coeficientes indeterminados** de las lineales con coeficientes constantes, **si** $h(e^s)$ **es del tipo adecuado**.

Ej 1*. $\boxed{xy''-2y'=2x}$, o bien, $y''-\frac{2}{x}y'=2$, ó $x^2y''-2xy'=2x^2$ $\to$ $\mu(\mu-1)-2\mu+0=0$, $\mu=0,3$.

Como $h(e^s)$ sería e^{2s} existe solución particular $y_p=Ae^{2s}=Ax^2$ (al no ser 2 autovalor).

Llevamos esta y_p a la (primera) ecuación: $2Ax-4Ax=2x$ $\to$ $y_p=-x^2$ $\to$ $\boxed{y=c_1+c_2x^3-x^2}$, que es la solución general que ya obtuvimos en el ejemplo 1.

En este caso el tanteo sí ahorra tiempo, pero volvemos a hallar la y_p con la **fvc**:

$$|\mathbf{W}|(x)=\begin{vmatrix}1 & x^3\\ 0 & 3x^2\end{vmatrix}=3x^2,\ f(x)=2\to\ y_p=x^3\int\frac{2\,dx}{3x^2}-\int\frac{2x^3dx}{3x^2}=-\frac{2x^2}{3}-\frac{x^2}{3}=-x^2\,.$$

Y vamos a imponer un par de parejas de datos adicionales que no proporcionan solución única.

Los primeros los damos en el punto patológico $x=0$ en el que la función $a(x)$ es discontinua:

$y(0)=y'(0)=0$, lo cumplen las infinitas soluciones $y=c_2x^3-x^2$,

Y los otros son datos de contorno: $y'(1)=y'(2)=0$ $\to \begin{cases}3c_2-2=0\\ 12c_2-4=0\end{cases}$. Imposible. No hay solución.

Ej 7. Calculemos la solución general de $\boxed{x^2y''+xy'-y=2x}$.

La 'ecuación característica' es $\mu^2+(1-1)\mu-1=0$ $\to$ $\mu=\pm1$ $\to$

La homogénea tiene por solución general $x_h=c_1x+c_2x^{-1}$ (válida como otras veces $\forall x\neq0$).

$$|\mathbf{W}|(x)=\begin{vmatrix}x & x^{-1}\\ 1 & -x^{-2}\end{vmatrix}=-2x^{-1},\ f(x)=2x^{-1}\to\ y_p=x^{-1}\int\frac{xx^{-1}dx}{-x^{-1}}-x\int\frac{x^{-1}x^{-1}dx}{-x^{-1}}=x\ln x-\frac{x}{2}\,.$$

La solución general de la no homogénea es $y=c_1x+\frac{c_2}{x}+x\ln x$ (incluyendo el $-\frac{x}{2}$ en c_1x).

La y_p se podría hallar utilizando coeficientes indeterminados en la ecuación $y''-y=2e^s$ a la que conduce el cambio $x=e^s$. La y_p que deberíamos probar en la ecuación en s (por ser $\mu=1$ autovalor) es $y_p=Ase^s$, o lo que es lo mismo, podríamos probar $y_p=Ax\ln x$ en la de Euler inicial. Haciéndolo, se comprueba que debe ser $A=1$ como antes y se llega a la misma solución.

Que quede claro que el método de coeficientes indeterminados se ha dado para ecuaciones de coeficientes constantes y no (directamente) para las de Euler. En este ejemplo no tiene sentido, a la vista del $2x$ de la derecha de la ecuación, probar en ella $y_p=Ax+B$. De hecho, si se hace, se obtiene la expresión sin sentido $-B=2x$ (una constante no puede ser igual a una función).

3.3 Autovalores y autofunciones de problemas de contorno

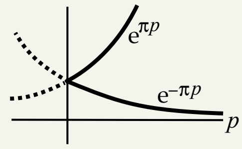
Problemas homogéneos

Vimos que una EDO lineal de orden 2 con coeficientes continuos tenía una única solución cumpliendo un par de **datos iniciales**. Los **problemas de contorno**, que se suelen plantear para EDOs con una constante λ (que aparece al resolver EDPs separando variables), tienen propiedades muy diferentes. Para ciertos valores de λ (**autovalores**) existirán soluciones no triviales $\{y_n\}$ (**autofunciones**). Antes de dar la teoría general, estudiemos un par de ejemplos para la ecuación homogénea más sencilla (y que aparecerá más veces cuando resolvamos EDPs): $y''+\lambda y=0$.

Ej 1. $\boxed{(\mathrm{P}_1)\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y(0)=y(\pi)=0 \end{cases}}$ $y\equiv 0$ es siempre solución de este problema. ¿Las habrá no triviales? Como su polinomio característico es $\mu^2+\lambda=0 \;\to\; \mu=\pm\sqrt{-\lambda}$, será diferente la solución general según λ sea menor, igual o mayor que 0.

Imponemos las condiciones de contorno en cada caso:

Si $\lambda<0$ la solución general es $y=c_1\,e^{px}+c_2\,e^{-px}$, con $p=\sqrt{-\lambda}>0$.



$$\left.\begin{array}{l} y(0)=c_1+c_2=0 \\ y(\pi)=c_1\,e^{\pi p}+c_2\,e^{-\pi p}=0 \end{array}\right\} \to \begin{array}{l} c_2=-c_1 \searrow \\ \quad c_1[e^{\pi p}-e^{-\pi p}]=0 \;\to \end{array}$$

$c_1=c_2=0$ $\big($pues $e^{\pi p}\neq e^{-\pi p}$ si $p>0\big)$. Ningún $\lambda<0$ es autovalor.

Si $\lambda=0$ es $y=c_1+c_2x \;\to\; \left.\begin{array}{l} y(0)=c_1=0 \\ y(\pi)=c_1+c_2\pi=0 \end{array}\right\} \to\; y\equiv 0$. $\lambda=0$ tampoco es autovalor.

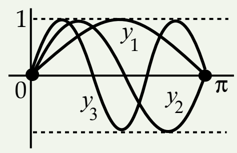
Y para $\lambda>0$ es $y=c_1\cos wx+c_2\,\mathrm{sen}\,wx$, con $w=\sqrt{\lambda}>0 \;\to\; \left.\begin{array}{l} y(0)=c_1=0 \downarrow \\ y(\pi)=c_2\,\mathrm{sen}\,w\pi=0 \end{array}\right\}$

Para tener solución no trivial debe ser $c_2\neq 0$.

Esto sucede si $\mathrm{sen}\,w\pi=0$, $w\pi=\pi\sqrt{\lambda}=n\pi \;\to\; \lambda_n=n^2,\ n=1,2,\dots$

Para cada uno de estos λ_n (**autovalores**) hay soluciones no triviales

$$y_n=c_2\,\mathrm{sen}\,nx\equiv\{\mathrm{sen}\,nx\}\ \ (\textbf{autofunciones}).$$



[No confundamos estos autovalores de problemas de contorno con los autovalores raíces del polinomio característico]. La teoría de problemas de contorno está llena de notaciones de aire algebraico como las llaves anteriores que simplemente significan los 'múltiplos de lo de dentro'. Los ángulos de la siguiente expresión también tienen ese origen, porque las integrales que definen tienen las propiedades de un producto escalar.

Comprobemos que se cumple si $m\neq n$:

$$\langle y_n,y_m\rangle\equiv\int_0^\pi \mathrm{sen}\,nx\,\mathrm{sen}\,mx\,dx=\frac{1}{2}\int_0^\pi\big[\cos(n-m)x-\cos(n+m)x\big]\,dx\big|=\frac{1}{2}\Big[\frac{\mathrm{sen}(n-m)x}{n-m}-\frac{\mathrm{sen}(n+m)x}{n+m}\Big]_0^\pi=0.$$

$$\Big[\text{Si } m=n\text{, el valor no es } 0\text{, sino } \langle y_n,y_n\rangle=\int_0^\pi \mathrm{sen}^2 nx\,dx=\frac{1}{2}\int_0^\pi(1-\cos 2nx)\,dx=\frac{\pi}{2}\Big].$$

(P_1) **posee infinitos autovalores** $\lambda_n=n^2,\ n=1,2,\dots$. **Las autofunciones** $y_n=\{\mathrm{sen}\,nx\}$ **asociadas a cada** λ_n **son un espacio vectorial de dimensión** 1. **La** n**-sima autofunción tiene** $n{-}1$ **ceros en** $(0,\pi)$. **Autofunciones distintas son ortogonales en** $[0,\pi]$ $\big[$respecto del **producto escalar** $\langle u,v\rangle=\int_0^\pi u\,v\,dx\big]$.

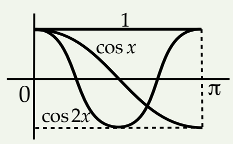
Ej 2. $\boxed{(\mathrm{P}_2)\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y'(0)=y'(\pi)=0 \end{cases}}$ Imponemos estas nuevas condiciones:

$$\lambda<0,\ y'=p\big[c_1e^{px}-c_2e^{-px}\big] \to \left.\begin{array}{l} y'(0)=p[c_1-c_2]=0 \;\to c_2=c_1 \searrow \\ y'(\pi)=p\big[c_1\,e^{\pi p}-c_2\,e^{-\pi p}\big]=0 \quad c_1p\big[e^{\pi p}-e^{-\pi p}\big]=0 \end{array}\right\} \to\; y\equiv 0.$$

$$\lambda=0,\ y'=c_2 \;\to\; \left.\begin{array}{l} y'(0)=c_2=0 \\ y'(\pi)=c_2=0 \end{array}\right\} \to\; \lambda=0 \text{ autovalor con autofunción } \ y_0=c_1=\{1\}.$$

$$\lambda>0,\ y'=w[-c_1\,\mathrm{sen}\,wx+c_2\cos wx] \;\to\; \left.\begin{array}{l} y'(0)=wc_2=0,\ c_2=0 \downarrow \\ y'(\pi)=-wc_1\,\mathrm{sen}\,w\pi=0 \end{array}\right\} \to \lambda_n=n^2,\ y_n=c_1\cos nx.$$

Los autovalores $\lambda_n=n^2$ y autofunciones $y_n=\{\cos nx\}$, $n=0,1,2,\dots$ $\big($suelen escribirse así, poniendo $\{1\}$ como caso particular $\{\cos 0\}\big)$ tienen las mismas propiedades resaltadas para el problema anterior. Por ejemplo, la y_n que ocupa el lugar n se anula $n-1$ veces y sigue habiendo ortogonalidad:



$$\langle y_n,y_m\rangle=\int_0^\pi \cos nx\cos mx\,dx=\frac{1}{2}\int_0^\pi\big[\cos(n-m)x+\cos(n+m)x\big]\,dx=\frac{1}{2}\Big[\frac{\mathrm{sen}(n-m)x}{n-m}+\frac{\mathrm{sen}(n+m)x}{n+m}\Big]_0^\pi=0.$$

Tratemos ya el problema general. Consideremos la ecuación lineal de orden dos dependiente de λ:

$$y''+a(x)y'+b(x)y+\lambda c(x)y=0\,,\quad \text{con}\quad a,b,c\ \text{ continuas en } [a,b]\ \text{ y }\ c(x)>0\ \text{ en }\ [a,b]\,.$$

La reescribimos en la forma llamada '**autoadjunta**' o '**Sturm-Liouville**' multiplicando por $e^{\int a}$:

$$\left[e^{\int a}y'\right]'+b\,e^{\int a}y+\lambda\,c\,e^{\int a}y\equiv\left[py'\right]'-qy+\lambda ry=0\,,\ \text{con}\ \ p\in C^1,\ q,r\in C\,,\ p,r>0\,.$$

Las condiciones que más nos interesan son las llamadas condiciones **separadas** (cada una afecta a los valores de y o de y' sólo en uno de los extremos del intervalo).

Se llama **problema de Sturm-Liouville separado regular** a uno de la forma:

$$(\mathrm{P_s})\begin{cases}[py']'-qy+\lambda ry=0\\ \alpha y(a)-\alpha' y'(a)=0\,,\ \beta y(b)+\beta' y'(b)=0\quad\text{(condiciones separadas)}\end{cases}$$

siendo $p\in C^1$, q,r continuas, $p,r>0$ en $[a,b]$, $|\alpha|+|\alpha'|\,,|\beta|+|\beta'|\neq 0$.

[Si $p,r\leq 0$ todo se complica. Las últimas condiciones dicen que α y α', β y β' no se anulan a la vez].

En estos problemas homogéneos siempre $y\equiv 0$ es solución y lo son los múltiplos de cualquier otra. Los ejemplos 1 y 2 eran unos ($\mathrm{P_s}$). Se prueba este teorema que generaliza sus propiedades:

Teor 1. Los autovalores de ($\mathrm{P_s}$) son una sucesión infinita $\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n<\cdots$ que tiende a ∞. Las autofunciones $\{y_n\}$ forman un espacio vectorial de dimensión 1 y cada y_n posee exactamente $n-1$ ceros en (a,b). Las autofunciones asociadas a autovalores distintos son ortogonales en $[a,b]$ respecto al **peso** r, es decir:

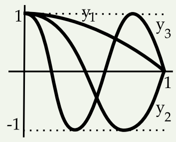
$$\langle y_n,y_m\rangle\equiv\int_a^b r\,y_n\,y_m\,dx=0\,,\ \text{si}\ \ y_n,\ y_m\ \text{ están asociadas a }\ \lambda_n\neq\lambda_m\,.$$

Si $\alpha\alpha'\geq 0$, $\beta\beta'\geq 0$ y $q(x)\geq 0$ en $[a,b]$, entonces todos los $\lambda_n\geq 0$.

Ej 3. $(\mathrm{P_3})\begin{cases}y''+\lambda y=0\\ y'(0)=y(1)=0\end{cases}$ $\big[$Casi escrito en forma autoadjunta: $\left[y'\right]'+\lambda y=0$. Es el peso $r\equiv 1\big]$. Hallemos sus λ_n. Como $\alpha\alpha'=\beta\beta'=0$, $q\equiv 0$, bastará mirar los $\lambda\geq 0$.

[Ahora sabemos que podíamos haber hecho esto con ($\mathrm{P_1}$) y ($\mathrm{P_2}$). Que conste que **hay problemas con** $\lambda<0$, como el $(\mathrm{P_5})$, aunque todos los problemas de interés físico del capítulo 4 darán lugar a $\lambda\geq 0$].

$\lambda=0$: $y=c_1+c_2x$, $y'=c_2$ $\to\begin{cases}y'(0)=c_2=0\\ y(1)=c_1+c_2=0\end{cases}\to y\equiv 0$. $\lambda=0$ no es autovalor.



$\lambda>0$: $y=c_1\cos wx+c_2\,\mathrm{sen}\,wx$. $y'(0)=0\to c_2=0\to\ y(1)=c_1\cos w=0$

$\to\ w_n=\frac{2n-1}{2}\pi$, $\lambda_n=\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4}$, $y_n=\left\{\cos\frac{2n-1}{2}\pi x\right\}$, $n=1,2,\ldots$

Según el teorema las $\{y_n\}$ son ortogonales: $\int_0^1 y_ny_m\,dx=0\,,\,n\neq m$, lo que es fácil de comprobar, y la autofunción n-sima (como las tres dibujadas) tiene $n-1$ ceros en $(0,1)$.

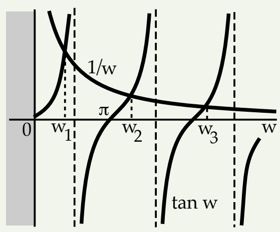
Ej 4. $(\mathrm{P_4})\begin{cases}y''+\lambda y=0\\ y'(0)=y(1)+y'(1)=0\end{cases}$ Aquí es $\alpha\alpha'=0$, $\beta\beta'=1>0$, $q\equiv 0\ \Rightarrow\ \lambda\geq 0$.

$\lambda=0\ \to\begin{cases}y'(0)=c_2=0\\ y(1)+y'(1)=c_1+2c_2=0\end{cases}\to\ y\equiv 0$. No es autovalor.

$\lambda>0$: $y=c_1\cos wx+c_2\,\mathrm{sen}\,wx$. $y'(0)=wc_2=0\ \to\ y(1)+y'(1)=c_1[\cos w-w\,\mathrm{sen}\,w]=0$.

No podemos calcular exactamente los λ_n, pero el corchete se anula infinitas veces, por ser $\tan w_n=\frac{1}{w_n}$ para infinitos w_n, que sólo se pueden dar aproximadamente (con ordenador: $w_1\approx 0.860$, $w_2\approx 3.426$, $w_3\approx 9.529,\ldots$). Por quedar c_1 indeterminado para cada $\lambda_n=w_n^2$ serán las $y_n=\{\cos w_nx\}$. Las y_n resultarán ortogonales (lo que también se puede comprobar).

[La mayoría de problemas de S-L no son resolubles exactamente, pues pocas lineales de orden dos lo son elementalmente, y aunque lo sean puede ocurrir lo del ejemplo].



Ej 5. $(\mathrm{P_5})\begin{cases}y''+\lambda y=0\\ y(0)+y'(0)=y(1)+y'(1)=0\end{cases}$ Como $\alpha\alpha'<0$ podrían aparecer autovalores negativos. Vamos a comprobar que, de hecho, $\lambda=-1$ **es autovalor**.

$$\lambda=-1\to\mu=\pm 1\to\ \begin{matrix}y=c_1e^x+c_2e^{-x}\\ y'=c_1e^x-c_2e^{-x}\end{matrix}\ \to\begin{cases}y(0)+y'(0)=2c_1=0\\ y(1)+y'(1)=2c_1e=0\end{cases}\forall c_2.\ \ \text{Autovalor con }\ y_0=\left\{e^{-x}\right\}.$$

$\big[$No es difícil ver que no hay más autovalores negativos y que $\lambda=0$ no lo es. Los infinitos positivos:

$$\begin{matrix}y(0)+y'(0)=c_1+wc_2=0\,,\ c_1=-wc_2\downarrow\\ y(1)+y'(1)=c_2(1+w^2)\,\mathrm{sen}\,w=0\end{matrix}\ \to\ \lambda_n=n^2\pi^2\,,\ y_n=\left\{\mathrm{sen}\,n\pi x-n\pi\cos n\pi x\right\},\ n=1,2,\ldots\big].$$

En los dos siguientes problemas de Sturm-Liouville aparecen ecuaciones nuevas (resolubles), el peso ya no va a ser $r(x)=1$ y debermos escribirlas en forma autoadjunta para saber quién es:

Ej 6. $\boxed{(\mathrm{P}_6)\begin{cases} x^2y''+xy'+\lambda y=0 \\ y(1)=y(\mathrm{e})=0\end{cases}}$ $\quad p(x)=\mathrm{e}^{\int a}=\mathrm{e}^{\int\frac{dx}{x}}=x \;\to\; \big[xy'\big]'+\lambda\frac{y}{x}=0$. Es $r(x)=\frac{1}{x}$.

Es problema separado regular $\big(p,r>0$ en $[1,\mathrm{e}]\big)$.

La ecuación es de Euler: $\mu(\mu-1)+\mu+\lambda=0 \;\to\; \mu=\pm\sqrt{-\lambda}$. Basta mirar los $\lambda\geq 0$.

$\lambda=0$, $y=c_1+c_2\ln x$. Imponiendo los datos: $\left.\begin{array}{c} c_1=0 \\ c_1+c_2=0\end{array}\right\}\Rightarrow c_1=c_2=0$ (no es autovalor).

$\lambda>0$, $y=c_1\cos(w\ln x)+c_2\,\mathrm{sen}(w\ln x)$, $\left.\begin{array}{c} c_1=0 \\ c_2\,\mathrm{sen}\,w=0\end{array}\right\}\;\lambda_n=n^2\pi^2,\; y_n=\big\{\mathrm{sen}(n\pi\ln x)\big\}$, $n=1,2,\dots$

Y como siempre, las autofunciones serán ortogonales (**respecto al peso** r , no sin él):

$$\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{sen}(n\pi\ln x)\;\mathrm{sen}(m\pi\ln x)}{x}\,dx=0\,,\; m\neq n\,.$$

Ej 7. $\boxed{(\mathrm{P}_7)\begin{cases} y''-2y'+\lambda y=0 \\ y'(0)=y'(1)=0\end{cases}}$ $\;\to\;$ $\begin{array}{l}\mu^2-2\mu+\lambda=0\,, \\ \mu=1\pm\sqrt{1-\lambda}\,.\end{array}$ Forma autoadjunta; $\big[\mathrm{e}^{-2x}y'\big]'+\lambda\mathrm{e}^{-2x}y=0$.

Sabemos que los $\lambda\geq 0$, pero esto no ahorra cálculos aquí, pues hay que mirar los $\lambda<,=,>1$:

$\lambda<1$: $\;y=c_1\,\mathrm{e}^{(1+p)x}+c_2\,\mathrm{e}^{(1-p)x}$, $\;y'=c_1(1+p)\,\mathrm{e}^{(1+p)x}+c_2(1-p)\,\mathrm{e}^{(1-p)x}$, con $p=\sqrt{1-\lambda}>0$

$\to\left.\begin{array}{l} c_1[1+p]+c_2[1-p]=0 \\ c_1[1+p]\mathrm{e}^{1+p}+c_2[1-p]\mathrm{e}^{1-p}=0\end{array}\right\}\to c_2(1-p)\mathrm{e}[\mathrm{e}^{-p}-\mathrm{e}^{p}]=0\to p=1\;\;(\lambda=0),\;y_0=\{1\}$.

$\lambda=1$: $\;y=[c_1+c_2x]\,\mathrm{e}^x$, $\;y'=[c_1+c_2+c_2x]\,\mathrm{e}^x \;\to\; \left.\begin{array}{l} c_1+c_2=0 \\ c_1+2c_2=0\end{array}\right\}\to y\equiv 0$. $\lambda=1$ no autovalor.

$\lambda>1$: $\begin{array}{l} y=[c_1\cos wx+c_2\,\mathrm{sen}\,wx]\,\mathrm{e}^x\,,\;\; w=\sqrt{\lambda-1} \\ y'=\big[(c_1+c_2w)\cos wx+(c_2-c_1w)\,\mathrm{sen}\,wx\big]\mathrm{e}^x\end{array}\;\to y'(0)=c_1+c_2w=0,\; c_1=-wc_2\;\to$

$y'(1)=c_2\,\mathrm{e}(1+w^2)\,\mathrm{sen}\,w=0\;\to$

$w=n\pi,\,n=1,2,\dots\;\to\;\lambda_n=1+n^2\pi^2$, $\;y_n=\big\{\mathrm{e}^x[\mathrm{sen}\,n\pi x-n\pi\cos n\pi x]\big\}$, $n=1,2,\dots$

Las autofunciones serán ortogonales respecto al peso $r(x)=\mathrm{e}^{-2x}$:

$$\langle y_0,y_n\rangle=\int_0^1\mathrm{e}^{-x}[\mathrm{sen}\,n\pi x-n\pi\cos n\pi x]\,dx=\big[-\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{sen}\,n\pi x\big]_0^1=0\,,$$

$$\langle y_n,y_m\rangle=\int_0^1[\mathrm{sen}\,n\pi x-n\pi\cos n\pi x][\mathrm{sen}\,m\pi x-m\pi\cos m\pi x]\,dx=\cdots=0\quad(\text{si } m\neq n)\,.$$

Problema periódico. En 4.5 nos aparecerá también el siguiente problema, único que no es separado, pues sus condiciones de contorno mezclan valores en los extremos del intervalo:

Ej 8. $\boxed{(\mathrm{P}_8)\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y(-\pi)=y(\pi)\,,\,y'(-\pi)=y'(\pi)\end{cases}}$ **[Estas condiciones equivalen a pedir que y sea 2π-periódica]**.

$\lambda<0\;\to\;\left.\begin{array}{l} c_1[\mathrm{e}^{\pi p}-\mathrm{e}^{-\pi p}]-c_2[\mathrm{e}^{\pi p}-\mathrm{e}^{-\pi p}]=0 \\ c_1[\mathrm{e}^{\pi p}-\mathrm{e}^{-\pi p}]+c_2[\mathrm{e}^{\pi p}-\mathrm{e}^{-\pi p}]=0\end{array}\right\}\;\begin{vmatrix}\mathrm{e}^{\pi p}-\mathrm{e}^{-\pi p} & \mathrm{e}^{-\pi p}-\mathrm{e}^{\pi p} \\ \mathrm{e}^{\pi p}-\mathrm{e}^{-\pi p} & \mathrm{e}^{\pi p}-\mathrm{e}^{-\pi p}\end{vmatrix}=2(\mathrm{e}^{\pi p}-\mathrm{e}^{-\pi p})^2\neq 0$ si $p>0$.

El determinante de los coeficientes no es 0 y sólo tiene la solución $c_1=c_2=0$. No hay $\lambda<0$.

$\lambda=0\;\to\;\left.\begin{array}{l} c_1-c_2\pi=c_1+c_2\pi \\ c_2=c_2\end{array}\right\}$ se satisface para $c_2=0$ y cualquier c_1 : $\;y_0=c_1=\{1\}$.

$\lambda>0\;\to\;\left.\begin{array}{l} 2c_2\,\mathrm{sen}\,\pi w=0 \\ 2c_1w\,\mathrm{sen}\,\pi w=0\end{array}\right\}\to\;\mathrm{sen}\,\pi w=0\;\to\;\lambda_n=n^2$, $n=1,2,\dots$

Para esos λ_n las condiciones de contorno se cumplen para todo c_1 y todo c_2 .

Las autofunciones son, pues: $\;y_n=c_1\cos nx+c_2\,\mathrm{sen}\,nx\equiv\{\cos nx,\mathrm{sen}\,nx\}$.

[Es claro que exigir simplemente que y sea 2π-periódica lleva a los mismos λ_n e $\{y_n\}$].

Las propiedades de (P_7) son algo distintas: sigue habiendo una **sucesión infinita de autovalores** $\lambda_n=n^2$, $n=1,2,\dots$ tendiendo a ∞, pero **las autofunciones** $y_0=\{1\}$**,** $y_n=\{\cos nx,\mathrm{sen}\,nx\}$ **forman**, si $n>0$, **un espacio vectorial de dimensión** 2. Utilizando relaciones trigonométricas se comprueba que sigue siendo cierto que **autofunciones diferentes son ortogonales** entre sí.

Problemas no homogéneos

Resolviendo EDPs por serparación de variables aparecerán sobre todo problemas de contorno homogéneos. Pero a veces (en 4.5) también alguno no homogéneo, de propiedades diferentes. En ellos ni $y\equiv 0$ será solución ni lo son los múltiplos de una solución dada. Damos brevemente la teoría empezando por un ejemplo sencillo:

Ej 9. Discutamos cuántas soluciones tiene $\boxed{\begin{cases} y''=3x-d \\ y(1)=y(2)+by'(2)=0 \end{cases}}$, con d , b constantes.

La solución general es: $y = c_1+c_2x+\frac{1}{2}x^3-\frac{d}{2}x^2$ $\big($con $y'=c_2+\frac{3}{2}x^2-dx\big)$. Imponiendo los datos:

$$\begin{cases} y(1)=c_1+c_2+\frac{1}{2}-\frac{d}{2}=0 \\ y(2)+by'(2)=c_1+2c_2+4-2d+bc_2+6b-2bd=0 \end{cases} \text{, es decir: } \begin{cases} c_1+c_2=\frac{d}{2}-\frac{1}{2} \\ c_1+(2+b)c_2=2bd+2d-6b-4 \end{cases} .$$

Hay **solución única** en c_1 y c_2 del sistema **si el homogéneo tiene sólo la trivial** (si el determinante de los coeficientes $1+b\neq 0$). **Si el homogéneo tiene infinitas, el no homogéneo tendrá infinitas o ninguna**. Para $b\neq -1$, se puede despejar de forma única c_1 y c_2 , y la solución queda precisada $\forall d$.

Pero si $b=-1$: $\begin{cases} c_1+c_2=\frac{d-1}{2} \\ c_1+c_2=2 \end{cases}$, este sistema sólo tiene solución cuando $\frac{d-1}{2}=2 \Leftrightarrow d=5$, y entonces una de las dos constantes queda libre. Si $b=-1$, $d\neq 5$, no hay solución.

Generalicemos este ejemplo. Sea el problema para la **ecuación no homogénea**:

$$\boxed{(\mathrm{P_f}) \begin{cases} \big[p(x)y'\big]'+g(x)y=f(x) \\ \alpha y(a)-\alpha' y'(a)=\beta y(b)+\beta' y'(b)=0 \end{cases}} \ , \ p\in C^1,\ g,f\in C\ ,\ p>0 \text{ en } [a,b]\ .$$

y llamemos $(\mathrm{P_h})$ al problema homogéneo asociado ($f\equiv 0$). Entonces se demuestra que:

Teor 2. $(\mathrm{P_f})$ tiene solución única $\Leftrightarrow$ $(\mathrm{P_h})$ tiene sólo la solución $y\equiv 0$. Si $(\mathrm{P_h})$ tiene soluciones no triviales $\{y_h\}$ entonces según sea $\int_a^b f(x)\,y_h(x)\,dx \begin{smallmatrix} =0 \\ \neq 0 \end{smallmatrix}$, $(\mathrm{P_f})$ tiene $\begin{smallmatrix} \text{infinitas soluciones} \\ \text{ninguna solución} \end{smallmatrix}$.

$$\boxed{\begin{array}{c} 1\to 1 \\ \infty\to \begin{smallmatrix}\infty \\ 0\end{smallmatrix} \end{array}}$$

Gran parte del teorema sale de imponer las condiciones de contorno a la solución $y=c_1y_1+c_2y_2+y_p$, por las propiedades de los sistemas algebraicos. Más complicado es probar que esa integral, donde f **es la del problema escrito en forma autoadjunta**, distingue entre infinitas y ninguna solución.

Ej 9*. Para el Ej 9, $(\mathrm{P_h})$ tiene sólo la solución $y\equiv 0$ si $b\neq -1$. Y si $b=-1$ es $y_h=\{1-x\}$ (pues $c_1+c_2=0$).

El $(\mathrm{P_f})$ $\big[$para $[y']'=x-d$, f es la inicial$\big]$, tendrá entonces solución única si $b\neq -1$, e infinitas ó 0, para $b=-1$, según se anule o no la integral $\int_1^2(3x-d)(1-x)\,dx=\frac{d}{2}-\frac{5}{2}$ $\big(=0 \Leftrightarrow d=5\big)$.

$\big[$Tiene las mismas propiedades un problema con **condiciones de contorno no homogéneas**:

$(\mathrm{P_{AB}}) \begin{cases} [p(x)y']'+g(x)y=0 \\ \alpha y(a)-\alpha' y'(a)=A,\ \beta y(b)+\beta' y'(b)=B \end{cases}$ Solución única si $(\mathrm{P_h})$ sólo tiene la $y\equiv 0$ e infinitas o ninguna si $(\mathrm{P_h})$ tiene infinitas$\big]$

Para estudiar un **problema de S-L no homogéneo**: $\boxed{(\mathrm{P_\lambda}) \begin{cases} [py']'-qy+\lambda ry=f(x) \\ \alpha y(a)-\alpha' y'(a)=\beta y(b)+\beta' y'(b)=0 \end{cases}}$

del Teor 2 se deduce, si $(\mathrm{P_s})$ es el problema separado de Sturm-Liouville homogéneo (el de $f\equiv 0$):

Teor 3. $(\mathrm{P_\lambda})$ tiene solución única $\Leftrightarrow$ λ no es autovalor de $(\mathrm{P_s})$. Si λ_n es autovalor con autofunción $\{y_n\}$, $(\mathrm{P_{\lambda_n}})$ $\begin{smallmatrix} \text{no tiene solución} \\ \text{tiene infinitas} \end{smallmatrix}$ según sea $\int_a^b f\,y_n\,dx \begin{smallmatrix} \neq 0 \\ =0 \end{smallmatrix}$.

Ej 10. Sea $\begin{cases} x^2y''-2xy'+\lambda y=2 \\ y'(1)=y(2)=0 \end{cases}$. Precisar si $\lambda=0$ y $\lambda=2$, son o no autovalores del homogéneo y cuántas soluciones tiene el no homogéneo en esos dos casos.

Ecuación de Euler con $\mu^2-3\mu+\lambda=0$. Si $\lambda=0$ la solución de la ecuación homogénea es $y=c_1+c_2x^3$.

Imponiéndole los datos $\begin{cases} y'(1)=3c_2=0 \\ y(2)=c_1+8c_2=0 \end{cases} \to c_1=c_2=0$. $\lambda=0$ no es autovalor y el no homgéneo tendrá solución única (no es corto hallarla).

Si $\lambda=2,\ y=c_1x+c_2x^2 \to \begin{cases} y'(1)=c_1+2c_2=0 \\ y(2)=2c_1+4c_2=0 \end{cases} \to c_1=-2c_2$. Autovalor con autofunción $\{x^2-2x\}$. No homogéneo con infinitas o ninguna.

Para discutirlo con el teorema: $\big[\frac{y'}{x^2}\big]'+\frac{2}{x^4}y=\frac{2}{x^4}$, $\int_1^2\frac{2}{x^4}(x^2-2x)dx=\big[\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x}\big]_1^2=-\frac{1}{2}\neq 0$. Sin solución.

O se puede deducir a partir de la solución general de la no homogénea $y=c_1x+c_2x^2+1$ (y_p a ojo).

3.4. Series de Fourier

Sean $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ las **autofunciones** del problema de Sturm-Liouville separado regular: $\text{(P)} \begin{cases} [py']' - qy + \lambda r y = 0 \\ \alpha y(a) - \alpha' y'(a) = y(b) + \beta' y'(b) = 0 \end{cases}$

Y llamemos, como en 3.3, $\langle u, v\rangle = \int_a^b r\, u\, v\, dx$ al producto escalar respecto al peso $r(x)$.

[El r es el de forma autoadjunta de arriba; muchas veces ese peso será 1, pero no siempre].

Toda función f suficientemente buena en $[a,b]$ puede ser escrita como una suma infinita de las autofunciones de (P), que se denomina **serie de Fourier de f**: $\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, y_n(x)}$.

Los c_n deben ser (si la serie puede ser integrada término a término), por ser las y_n ortogonales:

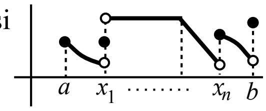
$$\int_a^b r f y_m\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_a^b r\, y_n y_m\, dx = c_m \int_a^b r\, y_m y_m\, dx \ \Rightarrow \ \boxed{c_n = \frac{\langle f, y_n\rangle}{\langle y_n, y_n\rangle}} \ , \ n=1,2,\dots$$

Para qué la serie con esos coeficientes converja realmente hacia f le pediremos que sea C^1 a trozos:

Una f **es C^1 a trozos** en $[a,b] = [a,x_1] \cup [x_1,x_2] \cup \cdots \cup [x_n,b]$ si

i. f y f' son continuas en cada (x_k, x_{k+1}),

ii. los límites laterales de f, f' en cada x_k son finitos.



Teor 1. Si f es C^1 a trozos en $[a,b]$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle f, y_n\rangle}{\langle y_n, y_n\rangle} y_n(x) = f(x)$ en los $x \in (a,b)$ en que f es continua y en los $x \in (a,b)$ en que f es discontinua la suma es $\frac{1}{2}\big[f(x^-) + f(x^+)\big]$.

El teorema **no dice nada sobre la convergencia en los extremos a y b**.

Caso particular de los desarrollos de Fourier son estos **desarrollos en series trigonométricas**:

Los autovalores y autofunciones de $\boxed{(\text{P}_s) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(L) = 0 \end{cases}}$ son $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$ e $y_n = \big\{\text{sen}\frac{n\pi x}{L}\big\}, n=1,2,\dots$

$\big[$Fácil de comprobar. Un problema en $[a,b]$ se llevaría al anterior (con $L = b-a$) haciendo $s = x-a$ $\big]$.

Se llama **serie de Fourier en senos** de f en $[0,L]$ a su desarrollo de Fourier en estas autofunciones:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \,\text{sen}\frac{n\pi x}{L} \ , \ \text{ con } \ b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\text{sen}\frac{n\pi x}{L}\, dx \ , \ n=1,2,...} \quad \text{[s]}$$

Ya que el peso es $r(x) \equiv 1$ y se tiene que $\langle y_n, y_n\rangle = \int_0^L \text{sen}^2\frac{n\pi x}{L}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^L \big[1 - \cos\frac{2n\pi x}{L}\big] dx = \frac{L}{2}$.

Los de $\boxed{(\text{P}_c) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = y'(L) = 0 \end{cases}}$ son $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$, $y_n = \big\{\cos\frac{n\pi x}{L}\big\}$, $n=0,1,\dots$ $\big[\, y_o = \{1\} \,\big]$

Y la **serie de Fourier en cosenos** de una f en $[0,L]$ será:

$$\boxed{f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} \ , \ \text{ con } \ a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\, dx \ , \ n=0,1,2,...} \quad \text{[c]}$$

Pues $\langle y_o, y_o\rangle = \int_0^L 1^2\, dx = L$ e $\langle y_n, y_n\rangle = \int_0^L \big[\cos\frac{n\pi x}{L}\big]^2 dx = \frac{L}{2}$, si $n \geq 1$.

$\big[$**Ponemos $\frac{a_o}{2}$ en la serie para que la fórmula del a_n valga también para a_o** $\big]$.

Otras familias de autofunciones muy habituales (dan lugar a las llamadas, respectivamente, series en **senos impares** y en **cosenos impares** en $[0,L]$) son las de estos problemas fáciles de resolver:

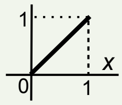
$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y'(L) = 0 \end{cases} \text{con } \lambda_n = \frac{[2n-1]^2\pi^2}{2^2L^2} \ , \ y_n = \Big\{\text{sen}\,\frac{[2n-1]\pi x}{2L}\Big\} \ , \ \langle y_n, y_n\rangle = \frac{L}{2} \ , \ n=1,2,\dots$$

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = y(L) = 0 \end{cases} \text{con } \lambda_n = \frac{[2n-1]^2\pi^2}{2^2L^2} \ , \ y_n = \Big\{\cos\,\frac{[2n-1]\pi x}{2L}\Big\} \ , \ \langle y_n, y_n\rangle = \frac{L}{2} \ , \ n=1,2,\dots$$

En los 4 casos anteriores la fórmula para el coeficiente c_n de la serie de Fourier $\big($que se deduce de la general $\langle f, y_n\rangle / \langle y_n, y_n\rangle \big)$ adopta la forma: $\boxed{c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) y_n(x)\, dx}$.

[No olvidando el $\frac{a_o}{2}$ de las series en cosenos, únicas con ese término, pues las otras empiezan desde $n=1$].

Ej 1. Sea $\boxed{f(x)=x\,,\ x\in[0,1]}$. Desarrollémosla en senos, en cosenos y en cosenos impares:



En senos: $b_n = 2\int_0^1 x\,\mathrm{sen}\,n\pi x\,dx = -\frac{2x}{n\pi}\cos n\pi x\Big]_0^1 + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \cos n\pi x\,dx = -\frac{2}{n\pi}\cos n\pi$,

$$\to\ f(x)=x=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\,\mathrm{sen}\,n\pi x = \frac{2}{\pi}\Big[\,\mathrm{sen}\,x-\tfrac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,2x+\tfrac{1}{3}\,\mathrm{sen}\,3x+\cdots\Big]\,.$$

En cosenos, aunque tenemos una única fórmula, hay que hacer dos cálculos: para a_o y para el resto.

$$a_o = 2\int_0^1 x\,dx = 1\,,\quad a_n = 2\int_0^1 x\cos n\pi x\,dx = \frac{2x}{n\pi}\,\mathrm{sen}\,n\pi x\Big]_0^1 - \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \mathrm{sen}\,n\pi x\,dx = \frac{2}{n^2\pi^2}\,[\cos n\pi - 1]\,,$$
$$n=1,2,\ldots$$

$$\to\ x = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos n\pi x = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}\cos(2m-1)\pi x\,.$$

Y el que falta: $x=\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(2n-1)}-\frac{8}{\pi^2(2n-1)^2}\Big]\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}$, pues $c_n = 2\int_0^1 x\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}\,dx = \cdots$

Las tres series, por el teorema 1, convergen hacia x para cada $x\in(0,1)$. Lo mismo haría el desarrollo en autofunciones de cualquier otro problema de Sturm-Liouville. En general no sabremos qué sucede en $x=0$ y en $x=1$, pero sí se podrá decir para las dos primeras series, por los argumentos que siguen.

Observemos que todos los sumandos de una **serie en senos** $\big(\mathrm{sen}\frac{n\pi x}{L}\big)$ son impares y que además todos ellos tienen periodo $2L$ con lo que la serie tendrá esas mismas propiedades. Si la f inicialmente definida en $[0,L]$ que desarrollamos se extiende de forma **impar** a $[-L,L]$ y luego de forma **$2L$-periódica** a todo $\mathbf{R}$, esa función extendida será la suma de la serie. Donde sea continua, la serie tenderá hacia su valor (y si no, tenderá hacia el valor medio, pudiendo aparecer discontinuidades en los extremos del intervalo inicial).

Razonando análogamente, una **serie en cosenos** (de sumandos pares y periódicos) **convergerá hacia la extensión par y $2L$-periódica** de la f inicial, lo que permite ver también lo que sucede en los extremos.

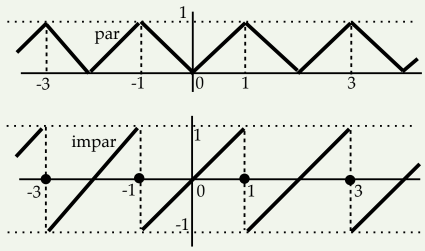
En el caso particular de que la f sea continua deducimos de las ideas anteriores:

La serie en cosenos de una f continua en $[0,L]$, con f' continua a trozos, converge hacia f en todo $[0,L]$. Para que lo haga la serie en senos debe ser además $f(0)=f(L)=0$.

[Si fuese $f(0)\neq 0$ ó $f(L)\neq 0$, la f extendida impar y $2L$-periódica no sería continua en 0 o en L . Además es claro que las series en senos se anulan en 0 y L , pues lo hace cada sumando].

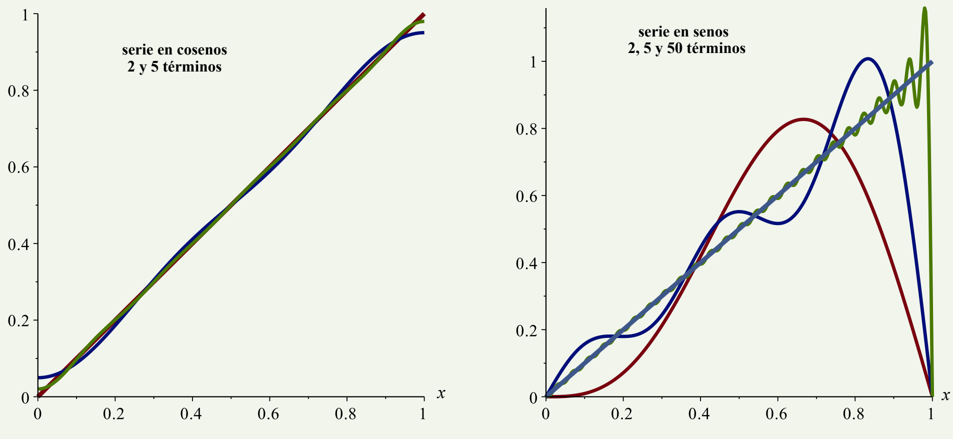
Ej 1*. Ya podemos saber hacia qué convergen en los extremos las dos primeras series del ejemplo anterior.

La serie de cosenos sí converge a f en todo $[0,1]$. Pero la serie en senos no converge hacia f en todo el intervalo (lo hace en $[0,1)$, en $x=1$ la suma será 0).



[Aunque las series en cosenos converjan mejor, al resolver EDPs por separación de variables no elegiremos el tipo de series en las que desarrollar las funciones. El problema nos impondrá unas autofunciones determinadas].

Utilizamos el ordenador para comprobarlo. Para la serie en cosenos sumamos 2 y 5 términos y ya se tiene una buena aproximación. Para la de senos, en cambio, además de acercarse más lentamente se ve que cerca de $x=1$, aunque sumemos 50 términos de la serie, no se ajusta bien al valor real.



[Cerca de las discontinuidades siempre aparecen esos 'picos'. Es el llamado '**fenómeno de Gibbs**'].

[Aunque se pueden dar argumentos para las series en senos y cosenos impares, no entraremos en ello].

Ej 2. Hallemos el desarrollo de $\boxed{f(x)=\pi}$ en serie de las autofunciones $y_n(x)$ de $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y'(0)=y(\frac{\pi}{2})=0 \end{cases}$.

El problema es uno de los 4 conocidos: el de los cosenos impares.

Sustituyendo en las expresiones dadas deducimos las autofunciones: $y_n=\{\cos(2n-1)x\}$, $n=1,2,\ldots$

Y tenemos la fórmula para hallar los $c_n=\frac{2}{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\pi\cos(2n-1)x\,dx=\frac{4}{2n-1}\,\text{sen}(2n-1)x\Big]_0^{\pi/2}$.

Por tanto: $\pi=4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\cos(2n-1)x=4\big[\cos x-\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{1}{5}\cos 5x-\frac{1}{7}\cos 7x\cdots\big]$.

Como la f desarrollada es continua en $\big[0,\frac{\pi}{2}\big]$, la suma de la serie $\forall x\in\big(0,\frac{\pi}{2}\big)$ será $\pi=f(x)$.

Aunque no tenemos resultados generales en los extremos para estas series, en este caso es posible ver que en $x=0$ sí es $\pi=4\big[1-\frac{1}{3}+\cdots\big]=4\arctan 1$ (pues $\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\cdots$), pero que en $\frac{\pi}{2}$ suma 0 (los cosenos se anulan).

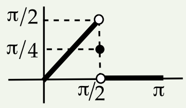
En cualquier otro punto, por ejemplo, el $x=1$, con ordenador podemos comprobar lo que asegura el teorema 1: sumando 100 términos de la serie se obtiene $3.132\ldots$, sumando 1000, $3.14227\ldots$.

Parecemos estar haciendo tonterías escribiendo una sencilla constante como una serie infinita de cosenos, pero este tipo de cálculos será necesario para resolver ecuaciones en derivadas parciales.

Ej 3. Desarrollemos la discontinua $\boxed{f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<\frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2}\le x\le\pi \end{cases}}$ en serie de autofunciones de $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y(0)=y'(\pi)=0 \end{cases}$.

Las autofunciones son los conocidos senos impares: $y_n=\big\{\text{sen}\frac{(2n-1)x}{2}\big\}$, $n=1,2,\ldots$

$$c_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\,\text{sen}\frac{(2n-1)x}{2}\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}x\,\text{sen}\frac{(2n-1)x}{2}\,dx=\frac{8\,\text{sen}\frac{(2n-1)\pi}{4}}{\pi(2n-1)^2}-\frac{2\cos\frac{(2n-1)\pi}{4}}{2n-1}.$$



La serie tiende hacia $f(x)$ en los $x\in(0,\pi)$ en que es continua $\big[$en $\big(0,\frac{\pi}{2}\big)$ y $\big(\frac{\pi}{2},\pi\big)\big]$, hacia $\frac{1}{2}[f(x^+)+f(x^-)]=\frac{\pi}{4}$ en el $x=\frac{\pi}{2}$ donde f es discontinua (y en los extremos no lo sabemos).

[Es claro que la serie suma 0 en $x=0$ (son 0 los senos) y el ordenador sugiere que también en $x=\pi$ vale 0].

Cuando desarrollemos en cualquier familia de autofunciones que no sean las 4 clásicas habrá que acudir a la **expresión general de los coeficientes** $c_n=\langle f,y_n\rangle/\langle y_n,y_n\rangle$. Esto nos pasa en los dos ejemplos siguientes.

Ej 4. Desarrollamos $\boxed{f(x)=x,\ x\in[0,1]}$ en las autofunciones del Ej 4 de 3.3: $\{\cos w_n x\}$ con $\tan w_n=\frac{1}{w_n}$.

El peso es $r(x)=1$ $\to$
$$\langle\cos w_n x,\cos w_n x\rangle=\int_0^1\cos^2 w_n x\,dx=\frac{1}{2}+\frac{\text{sen}\,w_n\cos w_n}{2w_n}=\frac{w_n^2+\cos^2 w_n}{2w_n^2}.$$
$$\langle x,\cos w_n x\rangle=\int_0^1 x\cos w_n x\,dx=\frac{\text{sen}\,w_n}{w_n}+\frac{\cos w_n-1}{w_n^2}=\frac{2\cos w_n-1}{w_n^2}.$$

Por tanto: $x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2(2\cos w_n-1)}{w_n^2+\cos^2 w_n}\cos w_n x$.

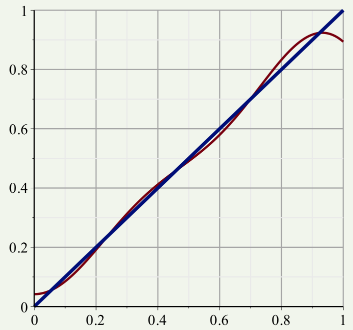
[Usamos el Maple para calcular varios coeficientes y dibujar algunas sumas parciales de la serie. Lo primero será aproximar los w_n:

$w_1\approx 0.8603$, $w_2\approx 3.4256$, $w_3\approx 6.4373$, $w_4\approx 9.5293\ldots$

De ellos deducimos los c_n:

$c_1\approx 0.5223$, $c_2\approx -0.4614$, $c_3\approx 0.0460$, $c_4\approx -0.0651\ldots$

A la derecha está el dibujo de $f(x)=x$ y de la cuarta suma parcial. Parece también converger en los extremos, cosa que no sabíamos].



Ej 5. Desarrollamos ahora $\boxed{f(x)=1}$ en las y_n del Ej 5 de 3.3: $y_0=\{e^{-x}\}$ e $y_n=\{\text{sen}\,n\pi x-n\pi\cos n\pi x\}$.

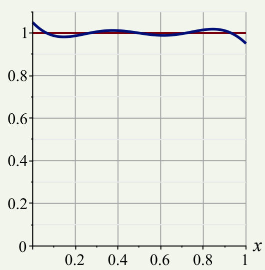
$$c_0=\frac{\langle 1,e^{-x}\rangle}{\langle e^{-x},e^{-x}\rangle}=\frac{\int_0^1 e^{-x}dx}{\int_0^1 e^{-2x}dx}=\frac{1-e^{-1}}{(1-e^{-2})/2}=\frac{2e}{e+1}.$$

$\langle y_n,1\rangle=\big[-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x-\text{sen}\,n\pi x\big]_0^1=\frac{1-(-1)^n}{n\pi}$ (se anula si n par).

$$\langle y_n,y_n\rangle=\int_0^1\big[\text{sen}^2 n\pi x+n^2\pi^2\cos^2 n\pi x-2n\pi\,\text{sen}\,n\pi x\cos n\pi x\big]dx=\frac{1+n^2\pi^2}{2}.$$

El desarrollo es, pues: $1=\frac{2e}{e+1}e^{-x}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2[1-(-1)^n]}{n\pi[1+n^2\pi^2]}(\text{sen}\,n\pi x-n\pi\cos n\pi x)$.

Para cada $x\in(0,1)$ la suma de los infinitos términos de la serie debe ser 1.



Maple muestra que la convergencia es buena (incluso en los extremos). El dibujo es sólo la suma del término con la exponencial y de los dos primeros trigonométricos no nulos ($n=1$ y $n=3$).

La teoría de series de Fourier se puede extender para incluir los problemas periódicos. Así para:

$$\boxed{(\mathrm{P}_p)\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y(-L)=y(L),\, y'(-L)=y'(L)\end{cases}}\ ,\ \lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{L^2}\ ,\ n=0,1,\ldots\ ,\ y_o=\{1\}\ ,\ y_n=\left\{\cos\frac{n\pi x}{L}, \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\right\}$$

se deduce la siguiente **serie de Fourier en senos y cosenos** en $[-L,L]$:

$$[\mathrm{p}]\quad \boxed{f(x)=\frac{a_o}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\right]}\ ,\ \text{con coeficientes:}$$

$$[1]\quad \boxed{a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx\ ,\ n=0,1,2,\ldots}\quad \text{y}\quad [2]\quad \boxed{b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx\ ,\ n=1,2,\ldots}\ ,$$

ya que se cumple: $\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dt=0$ para todo m y n; $\int_{-L}^{L}1^2\,dx=2L$;

$$\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx=\begin{cases}0 & m\neq n\\ L & m=n\end{cases}\ ;\quad \int_{-L}^{L}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx=\begin{cases}0 & m\neq n\\ L & m=n\end{cases}\ .$$

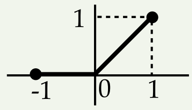
[Las fórmulas [1] y [2] también valen para desarrollar una f definida inicialmente en cualquier otro intervalo $[a,a{+}2L]$ (cambiando los límites a la integral) pues $\int_a^{a+2L}\cos^2=\int_a^{a+2L}\operatorname{sen}^2=L$].

La serie [p] también converge hacia $f(x)$ en los puntos de continuidad. Y además se puede decir qué sucede en los extremos $-L$ y L (por definir una función $2L$-periódica en todo $\mathbf{R}$):

Teor 2. Supongamos que f es C^1 a trozos en $[-L,L]$ y extendamos f fuera de $[-L,L]$ de forma $2L$-periódica. Entonces la serie [p] con a_n y b_n dados por [1] y [2] converge hacia $f(x)$ en todos los puntos en que su extensión es continua (y en los puntos de discontinuidad converge hacia $\frac{1}{2}\left[f(x^-)+f(x^+)\right]$).

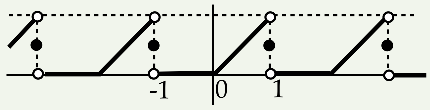
Las fórmulas [s] y [c] para los coeficientes de las series en senos y en cosenos se pueden ver como casos particulares de [1] y [2]. Si una f es **impar** en $[-L,L]$, es impar $f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}$ y es par $f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}$. Si f es **par**, $f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}$ es par y $f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}$ es impar. Por tanto, $a_n=0$ y [1] se convierte en [s] en el primero, y en el segundo $b_n=0$ y [2] pasa a ser [c].

Ej 6. Sea $\boxed{f(x)=\begin{cases}0\,, & -1\le x\le 0\\ x\,, & 0\le x\le 1\end{cases}}$.



Su serie en senos y cosenos está casi calculada en el Ej 1:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos n\pi x-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\operatorname{sen}n\pi x\ .$$



Viendo su extensión 2π-periódica, deducimos que la suma de esta serie será 0 en $(-1,0]$ y x en $[0,1)$ (valores de la f inicial), pero sumará $1/2$ (valor medio entre 0 y 1) en -1 y 1. Cerca de estos dos puntos de discontinuidad la convergencia volverá a ser mala y lenta como en todos los casos, y volverá a darse el fenómeno de Gibbs.