

4. Ecuaciones en derivadas parciales

4.1. EDPs lineales de primer orden

Sea la **EDP de primer orden**: [E] $A(x, y) u_y + B(x, y) u_x = H(x, y) u + F(x, y)$, $u = u(x, y)$.

Para resolverla usaremos la EDO de primer orden [e] $\frac{dy}{dx} = \frac{A(x, y)}{B(x, y)}$ **ecuación característica**

Si $A, B \in C^1$ y no son 0 a la vez en una región del plano, [e] tendrá en ella unas curvas integrales:

$$\xi(x, y) = K \quad \text{curvas características de [E]}$$

Por la regla de la cadena, el **cambio de variable** $\begin{cases} \xi = \xi(x, y) \\ \eta = y \end{cases}$ (o bien $\eta = x$), convierte [E] en:

$$\begin{cases} u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \\ u_x = u_\xi \xi_x \end{cases} \rightarrow Au_\eta + [A\xi_y + B\xi_x]u_\xi = Hu + F$$

Como sobre las soluciones $y(x)$ definidas por $\xi(x, y) = K$ es $\xi_x + \xi_y \frac{dy}{dx} = \frac{1}{B} [A\xi_y + B\xi_x] = 0$, vemos que [1] pasa a ser una ecuación en las nuevas variables (ξ, η) en la que no aparece u_ξ :

$$[E^*] \quad A(\xi, \eta) u_\eta = H(\xi, \eta) u + F(\xi, \eta), \quad u = u(\xi, \eta).$$

Análogamente, si hubiésemos escogido $\eta = x$ habríamos llegado a: [E*] $Bu_\eta = Hu + F$.

(Se observa que tras el cambio queda el término con la variable elegida).

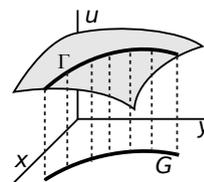
[E*] (o [E*₂]) es una **EDO lineal de primer orden** en la variable η si miramos la ξ como constante y, por tanto, es resoluble (si $F=0$ sería homogénea y si $H=0$ bastaría integrar). En su solución aparecerá una constante arbitraria para cada ξ , es decir, una función arbitraria de ξ :

$$u(\xi, \eta) = p(\xi) e^{\int \frac{H}{A} d\eta} + e^{\int \frac{H}{A} d\eta} \int \frac{F}{A} e^{-\int \frac{H}{A} d\eta} d\eta, \quad \text{con } p \text{ arbitraria de } C^1.$$

Deshaciendo el cambio queda resuelta [E] en función de x e y . En la solución general, como se ve, siempre aparece una función arbitraria de las características.

¿Cómo determinar una **única solución** de [E]?, es decir, ¿cómo precisar la p arbitraria? Cada solución describe una superficie en el espacio. Generalizando los problemas con datos iniciales para EDOs definimos:

El **problema de Cauchy** para [E] consiste en hallar la solución $u(x, y)$ que tome valores dados sobre una curva G del plano xy , es decir, que contenga una curva dada Γ del espacio. En particular, si G es una recta $x = cte$ ó $y = cte$ [por ejemplo, si se pide $u(x, 0) = f(x)$], se tiene lo que se llama un **problema de valores iniciales**.



Ej 1. $\begin{cases} (y-1)u_y - xu_x = 2x^2y \\ u(x, 0) = 0 \end{cases}$ La ecuación característica $\frac{dy}{dx} = \frac{y-1}{-x}$ se puede mirar como lineal:
 $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} + \frac{1}{x}$. $e^{-\int 1/x} = \frac{1}{x}$, $y = \frac{C}{x} + \frac{1}{x} \int \frac{x}{x} dx = \frac{C}{x} + 1$ (o $y_p = 1$ a ojo).
 O separable: $\int \frac{dy}{y-1} = \int \frac{dx}{-x}$, $\ln(y-1) = C - \ln x$, $y-1 = Ce^{-\ln x} = \frac{C}{x} \rightarrow xy - x = C$ **características**.
 Más cortos resultan los cálculos haciendo:
 $\begin{cases} \xi = x(y-1) \\ \eta = x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_y = x u_\xi \\ u_x = (y-1)u_\xi + u_\eta \end{cases} \rightarrow -xu_\eta = 2x^2y, \quad u_\eta = -2xy = -2\eta(\frac{\xi}{\eta} + 1) = -2\xi - 2\eta$.
 Integrando: $u(\xi, \eta) = -2\xi\eta - \eta^2 + p(\xi)$. La **solución general** es, pues: $u(x, y) = x^2 - 2x^2y + p(xy - x)$.
 [Peor: $\begin{cases} \xi = x(y-1) \\ \eta = y \end{cases}$, $\begin{cases} u_y = x u_\xi + u_\eta \\ u_x = (y-1)u_\xi \end{cases} \rightarrow (y-1)u_\eta = 2x^2y, \quad u_\eta = \xi^2 \frac{2\eta}{(\eta-1)^3}, \quad u = -\xi^2 \left[\frac{1}{(\eta-1)^2} + \frac{2}{\eta-1} \right] + p(\xi)$.
 [Aunque en hemos visto qué ecuaciones quedaban eligiendo $\eta = x$ ó y conviene hacer el cambio, usando la regla de la cadena, para detectar posibles errores en la características].
 Imponemos el **dato inicial**: $u(x, 0) = x^2 + p(-x) = 0$, $p(-x) = -x^2$. Para precisar la p llamamos $-x = v \rightarrow x = -v \rightarrow p(v) = -v^2 \rightarrow u(x, y) = x^2 - 2x^2y - x^2y^2 + 2x^2y - x^2 = -x^2y^2$.

Ej 2. $\begin{cases} u_y + 2u_x = u - x + 2y \\ u(x, x) = 1 - x \end{cases}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$, $2y = x + C$. $x - 2y = C$ características [o $2y - x = C$, o $y - \frac{x}{2} = C$, todas pueden valer].

$\begin{cases} \xi = x - 2y \\ \eta = y \end{cases}$, $\begin{cases} u_y = -2u_\xi + u_\eta \\ u_x = u_\xi \end{cases}$, $u_\eta = u - \xi \rightarrow u = p(\xi) e^\eta + \xi$. $u(x, y) = p(x - 2y) e^y + x - 2y$ solución general
 u_p a ojo

O bien: $\begin{cases} \xi = x - 2y \\ \eta = x \end{cases}$, $\begin{cases} u_y = -2u_\xi \\ u_x = u_\xi + u_\eta \end{cases}$, $u_\eta = \frac{u - \xi}{2} \rightarrow u = q(\xi) e^{\eta/2} + \xi = q(x - 2y) e^{x/2} + x - 2y$, casi como antes.

Imponiendo el dato: $u(x, x) = p(-x) e^x - x = 1 - x$, $p(-x) = e^{-x}$, $p(v) = e^v \rightarrow$

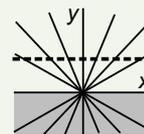
$u(x, y) = e^{x-2y} e^y + x - 2y = e^{x-y} + x - 2y$ (parecido con la q).

Comprobando: $u(x, x) = 1 + x - 2x$. $u_y = -e^{x-y} - 2$, $u_x = e^{x-y} + 1$, $e^{x-y} = e^{x-2y} + x - 2y - x + 2y$.



Ej 3. $\begin{cases} yu_y + xu_x = 2u \\ u(x, 1) = x^3 \end{cases}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ lineal $\rightarrow y = Cx \rightarrow \begin{cases} \xi = y/x \\ \eta = y \end{cases} \rightarrow \eta u_\eta = 2u$ (lineal homogénea)
 $\rightarrow u = p(\xi) \eta^2 = p(\frac{y}{x}) y^2$, $u(x, 1) = p(\frac{1}{x}) = x^3$, $p(v) = \frac{1}{v^3}$; $u = \frac{x^3}{y}$.

[La solución es única, pero, como se ve, no llega más allá de $y=0$].



No siempre los datos de Cauchy (como los anteriores) determinan una sola solución de la ecuación.

Ej 4. $\begin{cases} y^2 u_y + u_x = 2xu \\ \frac{dy}{dx} = y^2 \end{cases}$ (separable), $\frac{1}{y} = K - x \rightarrow x + \frac{1}{y} = K$ características.

$\begin{cases} \xi = x + \frac{1}{y} \\ \eta = x \end{cases}$ [mejor] $\rightarrow u_\eta = 2xu = 2\eta u \rightarrow u = p(\xi) e^{\eta^2} = p(x + \frac{1}{y}) e^{x^2}$, $p \in C^1$.

$\begin{cases} \xi = x + \frac{1}{y} \\ \eta = y \end{cases}$ [peor] $\rightarrow y^2 u_\eta = 2xu \xrightarrow{x = \xi - \frac{1}{\eta}} u_\eta = (\frac{2\xi}{\eta^2} - \frac{2}{\eta^3}) u \rightarrow u = q(\xi) e^{\frac{1}{\eta^2} - \frac{2\xi}{\eta}} = q(x + \frac{1}{y}) e^{-\frac{1}{y^2} - \frac{2x}{y}}$.

[Aunque no lo parezca, las expresiones con p y q definen la misma solución general].

Impongamos ahora diferentes datos de Cauchy a la ecuación y veamos lo que resulta:

$u(x, 1) = 1 \rightarrow p(x+1) e^{x^2} = 1 \xrightarrow{x+1=v} p(v) = e^{-(v-1)^2} \rightarrow u = e^{x^2 - (x + \frac{1}{y} - 1)^2} = e^{2x - \frac{2x}{y} + \frac{1}{y^2} - 1}$.

O bien, $q(x+1) e^{-1-2x} = 1 \xrightarrow{x+1=v} q(v) = e^{2v-1}$ ↗

Estos cálculos han determinado de forma **única** la solución del problema de valores iniciales.

$u(0, y) = y \rightarrow p(\frac{1}{y}) = y \xrightarrow{1/y=v} p(v) = \frac{1}{v} \rightarrow u = \frac{y}{1+xy} e^{x^2}$, que también parece ser **única**.

$u(x, -\frac{1}{x}) = 0$ y $u(x, -\frac{1}{x}) = 1$. Ahora estamos imponiendo datos sobre una característica.

Para el primero: $p(0) e^{x^2} = 0$. Lo cumple toda $p \in C^1$ con $p(0) = 0$. **Infinitas soluciones**.

Para el segundo: $p(0) e^{x^2} = 1$, $p(0) = e^{-x^2}$. Imposible. **No tiene solución**.

Datos sobre características dan lugar siempre a 0 o ∞ soluciones [se acaba en $p(\text{cte}) = \text{algo}$, que puede ser constante o no].

Ej 5. $\begin{cases} 2xu_y - u_x = 4xy \\ \frac{dy}{dx} = -2x \end{cases} \rightarrow y + x^2 = K$ características.

$\begin{cases} \xi = y + x^2 \\ \eta = y \end{cases} \rightarrow 2xu_\eta = 4xy$, $u_\eta = 2\eta \rightarrow u = p(\xi) + \eta^2 = p(y + x^2) + y^2$.

$\begin{cases} \xi = y + x^2 \\ \eta = x \end{cases} \rightarrow -u_\eta = 4xy \xrightarrow{y = \xi - \eta^2} -u_\eta = 4\xi\eta - 4\eta^3 \rightarrow u = q(\xi) + \eta^4 - 2\xi\eta^2 = q(y + x^2) - 2yx^2 - x^4$.

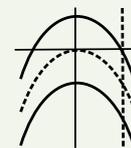
Imponemos como en el ejemplo anterior varios datos de Cauchy y analizamos la unicidad:

$u(1, y) = 0 \rightarrow p(y+1) + y^2 = 0$, $p(v) = -(v-1)^2 \rightarrow u = 2y + 2x^2 - 2yx^2 - x^4 - 1$.

[Solución **única**, p ó q fijadas $\forall v$. $x=1$ no es tangente a las características].

$u(x, -x^2) = 0 \rightarrow p(0) + x^4 = 0$. Imposible, **no hay solución**. Dato sobre característica, como:

$u(x, -x^2) = x^4 \rightarrow p(0) = 0$. Cada $p \in C^1$ con $p(0) = 0$ da una solución diferente: hay **infinitas**.



En general, no sólo hay problemas de unicidad si se imponen datos sobre característica, sino también cuando hay tangencia entre la curva G y las características. De hecho se prueba que **si G no es tangente en ningún punto a las características hay solución única del problema**.

4.2. Orden 2. Clasificación y problemas clásicos

Clasificación, formas canónicas y soluciones

Consideremos [E] $L[u] \equiv \boxed{A u_{yy} + B u_{xy} + C u_{xx} + D u_y + E u_x + H u = F(x, y)}$.

Nos limitamos en estas notas al caso de que A, B, \dots, H sean constantes (A, B y C no todas nulas). Como en las de primer orden, quizás un **cambio de variable** bien elegido haga desaparecer términos de [E], de forma que resulte una ecuación resoluble elementalmente. Hagamos un cambio genérico y analicemos la expresión de [E] en función de las nuevas variables:

$\begin{cases} \xi = px+qy \\ \eta = rx+sy \end{cases}$, con p, q, r, s constantes y jacobiano $J = ps - qr \neq 0$. Entonces:

$$\begin{aligned} u_{yy} &= q^2 u_{\xi\xi} + 2qsu_{\xi\eta} + s^2 u_{\eta\eta} \\ u_y &= qu_{\xi} + su_{\eta} \\ u_{xy} &= pqu_{\xi\xi} + (ps+qr)u_{\xi\eta} + rsu_{\eta\eta} \rightarrow \\ u_x &= pu_{\xi} + ru_{\eta} \\ u_{xx} &= p^2 u_{\xi\xi} + 2pru_{\xi\eta} + r^2 u_{\eta\eta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &[q^2 A + pqB + p^2 C] u_{\xi\xi} + [2qsA + (ps+qr)B + 2prC] u_{\xi\eta} + [s^2 A + rsB + r^2 C] u_{\eta\eta} + \dots \\ &= A^* u_{\xi\xi} + B^* u_{\xi\eta} + C^* u_{\eta\eta} + \dots = F(\xi, \eta) \quad [\text{los puntos son los términos en } u_{\xi}, u_{\eta} \text{ y } u]. \end{aligned}$$

Intentemos hacer $A^* = C^* = 0$ eligiendo p, q, r, s adecuados. Para ello debe ser: $\begin{cases} q^2 A + pqB + p^2 C = 0 \\ s^2 A + rsB + r^2 C = 0 \end{cases}$.

Si $B^2 - 4AC > 0$ y $A \neq 0$ podemos elegir $p=r=1$ y $q, s = \frac{1}{2A} [-B \mp \sqrt{B^2 - 4AC}]$.

[Si $A=0$ y $C \neq 0$ tomamos $q=1, p=0$ y $s=1, r=-\frac{B}{C}$; $A=C=0$ es caso trivial].

Si $B^2 - 4AC = 0$, q y s coinciden y sería $J=0$. Y si es < 0 , q y s serían complejas.

Además, es fácil verificar que $(B^*)^2 - 4A^*C^* = [B^2 - 4AC] J^2$ y, por tanto, el signo de $B^2 - 4AC$ no varía con cambios de coordenadas. Todo lo anterior nos lleva a definir:

$\begin{aligned} &> 0 \\ \text{Si } B^2 - 4AC &= 0 \\ &< 0 \end{aligned}$	se dice, respectivamente, que la EDP [E] es	hiperbólica parabólica elíptica
---	---	--

Encontremos la forma más sencilla en que podemos escribir [E] (su **forma canónica**) en cada caso. Si es **hiperbólica**, arriba hemos visto que se convierte con el cambio

$$\begin{cases} \xi = x - \frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} y \\ \eta = x - \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} y \end{cases} \text{ en } B^* u_{\xi\eta} + \dots = F. \text{ Como } (B^*)^2 > 0, \text{ podemos escribir la} \\ \text{forma canónica de las hiperbólicas: } \boxed{u_{\xi\eta} + \dots = F^*(\xi, \eta)}.$$

A las dos familias de rectas $\xi = K, \eta = K$ se les llama **características** de [E].

Si [E] es **parabólica**, sólo tenemos $\xi = x - \frac{B}{2A} = K$ [una familia de características]. Para esta ξ es $A^* = 0$, y como $(B^*)^2 - 4A^*C^* = 0$ también es $B^* = 0$. Como η se suele tomar $\eta = y$. Así haciendo

$$\begin{cases} \xi = x - \frac{B}{2A} y \\ \eta = y \end{cases} \text{ y dividiendo por } C^* \text{ se obtiene la} \\ \text{forma canónica de las parabólicas: } \boxed{u_{\eta\eta} + \dots = F^*(\xi, \eta)}.$$

Si es **elíptica**, las ξ, η son rectas complejas: $\frac{2Ax - By}{2A} \pm i \frac{\sqrt{4AC - B^2}}{2A}$ y (no hay características reales). Pero no es difícil comprobar que el cambio:

$$\begin{cases} \xi = \frac{2Ax - By}{\sqrt{4AC - B^2}} \\ \eta = y \end{cases} \text{ lleva [E] a la forma canónica de las elípticas: } \boxed{u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \dots = F^*(\xi, \eta)}.$$

[Si A, B y C son no constantes y es $B(x, y)^2 - 4A(x, y)C(x, y) >, =, < 0$ en cada (x, y) de una región Ω del plano se dice, respectivamente, que la EDP [E] es **hiperbólica**, **parabólica** o **elíptica** en Ω . Las características en este caso general son soluciones de EDOs de primer orden (quizás no resolubles)].

Ej 1. $u_{yy} - 4u_{xy} + 5u_{xx} + u = 0 \rightarrow B^2 - 4AC = -4 < 0$, elíptica. Con el cambio de la página anterior:

$$\begin{cases} \xi = x+2y \\ \eta = y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_y = 2u_\xi + u_\eta \\ u_x = u_\xi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_{yy} = 4u_{\xi\xi} + 4u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \\ u_{xy} = 2u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta} \\ u_{xx} = u_{\xi\xi} \end{cases}$$

Llevándolo a la ecuación se llega a la forma canónica: $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + u = 0$.

Ej 2. $4u_{yy} - 4u_{xy} + u_{xx} = 0 \rightarrow B^2 - 4AC = 0 \rightarrow$ parabólica en todo \mathbf{R}^2 .

El cambio en este caso sería $\xi = x + \frac{y}{2}$, o mejor (son las mismas características):

$$\begin{cases} \xi = 2x+y \\ \eta = y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_y = u_\xi + u_\eta \\ u_x = 2u_\xi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \\ u_{xy} = 2u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} \\ u_{xx} = 4u_{\xi\xi} \end{cases} \rightarrow 4u_{\eta\eta} = 0, \quad u_{\eta\eta} = 0.$$

Esta forma canónica tan sencilla se resuelve fácilmente: $u_\eta = p(\xi) \rightarrow u = \eta p(\xi) + q(\xi)$.

Por tanto, la **solución general** de la ecuación es:

$$u(x, y) = y p(2x+y) + q(2x+y), \text{ con } p \text{ y } q \text{ funciones } C^2 \text{ arbitrarias.}$$

Como en este caso, a veces es posible hallar elementalmente la **solución general** de [E] tras ponerla en forma canónica (en la mayoría, como en el ejemplo 1, será imposible). Identifiquemos las **formas canónicas resolubles**:

Si sólo hay derivadas respecto a una de las variables: $u_{\eta\eta} + E^*u_\eta + H^*u = F^*$.

Esta lineal de orden 2, ordinaria si la vemos como función de η , se integra viendo la ξ como un parámetro. Un par de constantes para cada ξ dan lugar a dos funciones arbitrarias de ξ en la solución. La ecuación, como vemos, debe ser parabólica.

Si sólo aparece $u_{\xi\eta}$ y una derivada primera: $u_{\xi\eta} + D^*u_\xi = F^*$ o $u_{\xi\eta} + E^*u_\eta = F^*$.

La primera se resuelve haciendo $u_\xi = v$: la lineal de primer orden $v_\eta + D^*v = F^*$ se resuelve viendo ξ como parámetro. La v contiene, pues, una función arbitraria de ξ . Al integrarla para hallar la u aparece otra función arbitraria (de η). Las cosas son análogas cuando en vez de la u_ξ aparece la u_η . La ecuación es hiperbólica.

[En las EDOs de segundo orden aparecen dos constantes arbitrarias; aquí hay, en los dos casos, dos funciones arbitrarias (evaluadas en las características como en las EDPs de primer orden)].

[También se ve que, al aparecer dos funciones arbitrarias, para aislar una única solución de la ecuación se deberán imponer dos funciones dato. En la página siguiente se presentará el problema de Cauchy para las EDPs de segundo orden].

[Otras pocas EDPs más pueden llevarse a estas formas resolubles haciendo cambios del tipo $u = e^{py} e^{qx} w$ que hacen desaparecer alguna derivada de menor orden o el término con la u].

[Ni la ecuación del calor $u_t - u_{xx}$ ni ninguna elíptica son resolubles por este camino].

Ej 3. $u_{yy} + 5u_{xy} + 4u_{xx} + 3u_y + 3u_x = 9 \rightarrow B^2 - 4AC = 9$, hiperbólica.

$$\frac{B \mp \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{1}{4} \rightarrow \begin{cases} \xi = x-y \\ \eta = x-4y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_y = -u_\xi - 4u_\eta \\ u_x = u_\xi + u_\eta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_{yy} = u_{\xi\xi} + 8u_{\xi\eta} + 16u_{\eta\eta} \\ u_{xy} = -u_{\xi\xi} - 5u_{\xi\eta} - 4u_{\eta\eta} \\ u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \end{cases}$$

Sustituyendo en la EDP se llega a: $u_{\xi\eta} + u_\eta = -1$, del segundo de los tipos citados. Para resolverla:

$$u_\eta = v \rightarrow v_\xi = -v - 1 \rightarrow v = p^*(\eta) e^{-\xi} - 1 \rightarrow u(\xi, \eta) = p(\eta) e^{-\xi} + q(\xi) - \eta$$

La solución general es, pues: $u(x, y) = p(x-4y) e^{y-x} + q(x-y) + 4y-x$, con p, q arbitrarias.

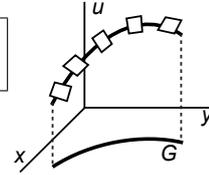
[La ecuación similar $u_{yy} + 5u_{xy} + 4u_{xx} + 3u_x = 9 \rightarrow u_{\xi\eta} - \frac{1}{3}u_\eta - \frac{1}{3}u_\xi = -1$, no es resoluble].

Unicidad de los problemas clásicos

¿Qué datos adicionales se piden a la EDP lineal [E] $L[u] = F$ de orden 2 para aislar una única solución? Para una EDO de orden 2 se fijaba el valor de la solución y de su derivada en el instante inicial. En una EDP de primer orden se daban los valores de u en toda una curva G (no tangente a las características). Cuando [E] era resoluble aparecían dos funciones arbitrarias en la solución. Todo lleva a plantear el

Problema de Cauchy para [E]: hallar la solución que tome unos valores dados de u y la derivada u_n en la dirección del vector normal sobre una curva G del plano xy .

[Geoméricamente: hallar la superficie solución que contenga una curva dada y tenga en cada punto de ella unos planos tangentes también dados. La derivada normal u_n será casi siempre una derivada parcial: u_x o u_y].



En particular, al tomar como G el eje x se tiene el **problema de valores iniciales** que consiste en hallar la solución de [E] que cumple $u(x, 0) = f(x)$, $u_y(x, 0) = g(x)$. Como en las de primer orden se prueba que:

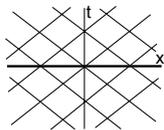
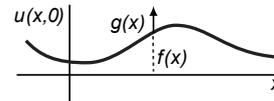
Teor 1. Si los datos f y g son derivables y el eje x no es una recta característica de la EDP, el problema de valores iniciales tiene solución única.

¿Es el problema de Cauchy adecuado a toda EDP de orden 2? No, no lo es. En los problemas reales surgen condiciones mucho más variadas: en unos casos condiciones iniciales y de contorno a la vez, en otros sólo de contorno... Además los datos de Cauchy tienen malas propiedades para algunas EDPs. Por ejemplo, para Laplace (sin características reales) un problema de valores iniciales tiene solución única pero puede no tener 'dependencia continua' (variando poco los datos, varían mucho las soluciones). Conozcamos los principales problemas asociados a las **ecuaciones clásicas** en dos variables [en más variables las cosas son análogas]. Sólo (P₁) será de Cauchy. Para cada uno habría que probar (y esto es muy complicando, en general) que tiene solución única y dependencia continua (se dice entonces que el problema está 'bien planteado').

Ondas. La ecuación de ondas es la única de las clásicas resoluble a partir de su forma canónica. Para la **cuerda infinita** sí es un problema bien planteado este problema de Cauchy:

problema puro de valores iniciales:

$$(P_1) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t), & x, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), & u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$$



(tiene sentido real cuando t es pequeño y estamos lejos de los extremos).

$B^2 - 4AC = 4c^2$, hipérbolica. Características $x \pm ct = K$ (página 43).

El teorema 1 nos dice que hay solución única y se puede probar la dependencia continua.

La resolvemos para $F \equiv 0$: $\begin{cases} \xi = x+ct \\ \eta = x-ct \end{cases}$, $\begin{cases} u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \\ u_{tt} = c^2[u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}] \end{cases}$, $-4c^2 u_{\xi\eta} = 0$, $u_{\xi\eta} = 0$ forma canónica \rightarrow

$u_{\xi} = p^*(\xi) \rightarrow u = p(\xi) + q(\eta)$. La **solución general de la ecuación de ondas homogénea** es:

$$u(x, t) = p(x+ct) + q(x-ct), \text{ con } p \text{ y } q \text{ funciones arbitrarias de } C^2.$$

Imponiendo los datos: $\begin{cases} p(x) + q(x) = f(x) \\ cp'(x) - cq'(x) = g(x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} p'(x) + q'(x) = f'(x) \\ p'(x) - q'(x) = \frac{1}{c}g(x) \end{cases}$ p' y q' son las mismas derivadas ordinarias en ambas expresiones.

$$\rightarrow 2p'(x) = f'(x) + \frac{1}{c}g(x), \quad p(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds + k, \quad q(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds - k \rightarrow$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds$$

fórmula de D'Alembert

Para la **cuerda finita** se ve que tiene solución única

$$(P_2) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t), & x \in [0, L], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), & u_t(x, 0) = g(x) \\ u(0, t) = h_0(t), & u(L, t) = h_L(t) \end{cases}$$

Sus extremos se mueven verticalmente según $h_0(t)$ y $h_L(t)$ dadas [un caso particular importante es que estén fijos $u(0, t) = u(L, t) = 0$]. Como **siempre que hay extremos**, aparecen **condiciones de contorno** adicionales y el camino habitual para resolverlos será la **separación de variables**.

Calor. Para la **varilla infinita** el problema adecuado es:

$$(P_3) \begin{cases} u_t - ku_{xx} = F(x, t), & x \in \mathbf{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & u \text{ acotada} \end{cases}$$

Se prueba que está bien planteado. Basta un solo dato, la distribución inicial de temperaturas $f(x)$, para fijar las posteriores [$t=0$ es característica y (P_3) no es problema de valores iniciales típico]. Para resolverlo se necesita la transformada de Fourier de la última sección adicional 5.4.

Para la **varilla acotada** hay varias condiciones de contorno, con diferentes significados físicos. Si los extremos toman a lo largo del tiempo las **temperaturas dadas** $h_0(t)$ y $h_L(t)$ se tiene:

$$(P_4) \begin{cases} u_t - ku_{xx} = F(x, t), & x \in (0, L), t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & u(0, t) = h_0(t), u(L, t) = h_L(t) \end{cases}$$

Si lo que fijamos es el **flujo de calor** en los extremos obtenemos:

$$(P_5) \begin{cases} u_t - ku_{xx} = F(x, t), & x \in (0, L), t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & u_x(0, t) = h_0(t), u_x(L, t) = h_L(t) \end{cases}$$

[En particular, si $h_0(t) = h_L(t) = 0$, los extremos están **aislados**].

Combinando u y u_x se expresa la **radiación libre** de calor hacia un medio a temperatura dada:

$$u(0, t) - au_x(0, t) = h_0(t) \quad \text{ó} \quad u(L, t) + bu_x(L, t) = h_L(t), \quad \text{con } a, b > 0$$

[Si el extremo $x=L$ está más (menos) caliente que h_L irradia (chupa) calor pues $u_x = (h_L - u)/b < 0$ (> 0) y el calor viaja en sentido opuesto al gradiente de las temperaturas; igual en el otro extremo].

(P_4) ó (P_5) (y los otros 7 problemas que aparecen combinando los 3 tipos de condiciones) están bien planteados. Probemos la **unicidad**. Si u_1 y u_2 son soluciones, $u = u_1 - u_2$ cumple el problema con $F = f = h_0 = h_L = 0$. Nuestro objetivo es deducir que $u \equiv 0$. Multiplicando la ecuación por u e integrando en x entre 0 y L :

$$\int_0^L uu_t dx - k \int_0^L uu_{xx} dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L u^2 dx - k [uu_x]_{(0,t)}^{(L,t)} + k \int_0^L u_x^2 dx = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_0^L [u(x, t)]^2 dx \leq 0$$

[si $u=0$ ó $u_x=0$ en los extremos la implicación es clara; es también fácil verlo si $u - au_x = 0, a > 0$ ó si $u + bu_x = 0, b > 0$; no se puede probar la unicidad si $a < 0$ ó $b < 0$ (físicamente inadmisibles)].

La última integral es una función $U(t)$ no creciente ($U' \leq 0$), que cumple $U(0) = 0$ (pues $u(x, 0) = 0$) y es $U(t) \geq 0$ (integrando positivo). De las tres cosas se sigue que $U(t) \equiv 0 \Rightarrow u \equiv 0, u_1 \equiv u_2$. Unicidad.

Laplace. Los problemas son de contorno. Los dos más importantes son:

Problema de Dirichlet:	$(P_D) \begin{cases} \Delta u = F \text{ en } D \\ u = f \text{ en } \partial D \end{cases}$	Problema de Neumann:	$(P_N) \begin{cases} \Delta u = F \text{ en } D \\ u_n = f \text{ en } \partial D \end{cases}$
-------------------------------	--	-----------------------------	--



con D abierto acotado y u_n derivada según el vector normal unitario exterior \mathbf{n} .

Si la ecuación está describiendo una distribución estacionaria de temperaturas en una placa, en (P_D) fijamos la temperatura en el borde y en (P_N) el flujo de calor en dirección normal al borde.

Si F y f son regulares y ∂D es C^1 a trozos, **el (P_D) es un problema bien planteado.**

Probemos su unicidad mediante una fórmula que generaliza la integración por partes a \mathbf{R}^2 :

Fórmula de Green Sea $u \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$. Entonces $\iint_D u \Delta u \, dx dy = \oint_{\partial D} u u_n \, ds - \iint_D \|\nabla u\|^2 \, dx dy$

[Identidad $u \Delta u = \text{div}[u \nabla u] - \|\nabla u\|^2$ y teorema de la divergencia $\iint_D \text{div } \mathbf{f} \, dx dy = \oint_{\partial D} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, ds$].

u_1, u_2 soluciones de (P_D) . $u = u_1 - u_2$ cumple el problema con $F = f = 0$. Por la fórmula de Green:

$$\iint_D \|\nabla u\|^2 \, dx dy = 0 \Rightarrow \nabla u = \mathbf{0} \Rightarrow u = \text{cte} \Rightarrow u \equiv 0 \text{ (pues } u=0 \text{ en } \partial D \text{)}.$$

Para que (P_N) pueda tener solución es necesario que F y f satisfagan la relación:

$$\iint_D F \, dx dy = \oint_{\partial D} f \, ds$$

[basta aplicar el teorema de la divergencia a ∇u para verlo],

y si el problema de Neumann (P_N) tiene solución, esta contiene una constante arbitraria.

Ecuación y condición de contorno sólo contienen derivadas. En la prueba de la unicidad, podemos dar todos los pasos excepto la última implicación. Se dice que (P_N) 'tiene unicidad salvo constante'.

Además se imponen a Laplace condiciones del tipo $u + au_n = f, a > 0$, y hay problemas mixtos con condiciones tipo Dirichlet en partes de ∂D , en otras tipo Neumann... (todos con solución única).

4.3. Separación de variables. Ecuación del calor

Este antiguo método nos permitirá hallar la solución (en forma de **serie de Fourier**) de parte de los problemas clásicos citados en 4.2: los planteados en un **intervalo finito** en una variable. En esta sección resolveremos varios para el calor en **varillas finitas**. En 4.4 y 4.5 veremos los de la cuerda finita y los de Laplace.

Empezamos resolviendo un **problema homogéneo** (lo son ecuación y condiciones de contorno).

$$\text{Sea } \boxed{\begin{array}{l} [P_1] \left\{ \begin{array}{l} u_t - k u_{xx} = 0, \quad x \in (0, L), \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \end{array} \right. \end{array}} \quad \begin{array}{l} \text{[edp]} \\ \text{[ci]} \\ \text{[cc]} \end{array}$$

No hay fuentes de calor externas, los extremos de la varilla se mantienen a 0 grados y suponemos que los datos iniciales vienen dados por una f que es C^1 a trozos en $[0, L]$.

Busquemos soluciones de la forma $u(x, t) = X(x)T(t)$. Debe ser entonces:

$$XT' - kX''T = 0, \text{ es decir, } \frac{X''}{X} = \frac{T'}{kT} \quad (\text{mejor que } \frac{kX''}{X} = \frac{T'}{T}).$$

Como un miembro es función sólo de x y el otro de t , ambos deben ser iguales a una constante:

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{k} \frac{T'}{T} = -\lambda \quad (\text{ponemos } -\lambda \text{ para que nos quede la ecuación habitual}).$$

Así obtenemos una EDO para $X(x)$ y otra para $T(t)$: $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 & \text{[eX]} \\ T' + \lambda k T = 0 & \text{[eT]} \end{cases}$.

El producto de una solución de [eX] por una de [eT] es entonces solución de la [edp], para cualquier valor de λ . Pero nos interesan sólo las soluciones que satisfacen las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} u(0, t) = X(0)T(t) = 0 &\Rightarrow X(0) = 0 \quad (\text{si fuese } T(t) \equiv 0 \text{ obtendríamos } u \equiv 0 \rightarrow \\ u(L, t) = X(L)T(t) = 0 &\Rightarrow X(L) = 0 \quad \text{y no se cumpliría la condición inicial}). \end{aligned}$$

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad X_n = \left\{ \text{sen } \frac{n\pi x}{L} \right\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Llevando estos valores de λ a la ecuación [eT] obtenemos: $T' = -\frac{kn^2 \pi^2}{L^2} T \rightarrow T_n = \left\{ e^{-kn^2 \pi^2 t / L^2} \right\}$.

Hemos deducido hasta ahora que para cada n son soluciones de [edp] cumpliendo [cc] las funciones

$$u_n(x, t) = \left\{ e^{-kn^2 \pi^2 t / L^2} \text{sen } \frac{n\pi x}{L} \right\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Una combinación lineal finita de las u_n también lo hará. Suponemos que también lo hace la serie:

$$\boxed{u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-kn^2 \pi^2 t / L^2} \text{sen } \frac{n\pi x}{L}} \quad \text{[S]}$$

Sólo le falta a [S] cumplir la condición inicial [ci]. Para que lo haga:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sen } \frac{n\pi x}{L} = f(x) \Rightarrow \boxed{c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \text{sen } \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots} \quad \text{[c]}$$

pues la serie es precisamente la **serie de Fourier en senos** en $[0, L]$ de f , conocida desde 3.4.

La serie [S], con los coeficientes dados por [c], es la solución de [P₁].

Observemos que $u(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \quad \forall x \in [0, L]$ (**la varilla tiende a ponerse a 0 grados**, como era de esperar).

Se debería ver que la convergencia es suficientemente buena (suma infinita de funciones derivables puede ser no derivable). Cuando f es C^1 a trozos, se puede probar que converge en $[0, L] \times (0, \infty)$ y que u_t y u_{xx} se pueden calcular derivando término a término (y así se satisface la ecuación). En $x=0$ y $x=L$ está claro que es $u=0$. Y la condición inicial se satisface en este sentido: la $u(x, t)$ definida por la serie para $t > 0$ y por $u(x, 0) = f(x)$ es una función continua salvo en los puntos de $t=0$ en que la f es discontinua.

[Aunque f sea discontinua, se ve que la solución (como ocurre también en la varilla infinita) es C^∞ para cualquier $t > 0$: **las discontinuidades desaparecen instantáneamente**. Esto será muy distinto en la ecuación de ondas: para ella las soluciones heredan los picos y discontinuidades de los datos iniciales].

Si las **condiciones de contorno son no homogéneas, comenzaremos haciéndolas 0 hallando una v que las satisfaga y realizando un cambio de variable.** Por ejemplo, para:

$$[P_2] \begin{cases} u_t - k u_{xx} = 0, & x \in (0, L), t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & u(0, t) = T_0, u(L, t) = T_L \end{cases}, T_0, T_L \text{ constantes,}$$

una v que las cumple es $v(x) = [1 - \frac{x}{L}]T_0 + \frac{x}{L}T_L$. Haciendo $w = u - v$, nuestro problema pasa a ser uno como el [P₁] del que acabamos de hallar la solución:

$$\begin{cases} w_t - k w_{xx} = 0 \\ w(x, 0) = f(x) - v(x) \\ w(0, t) = w(L, t) = 0 \end{cases} \rightarrow u(x, t) = [1 - \frac{x}{L}]T_0 + \frac{x}{L}T_L + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-kn^2 \pi^2 t / L^2} \text{sen} \frac{n\pi x}{L} = v + w,$$

$$\text{con } c_n = \frac{2}{L} \int_0^L [f(x) - v(x)] \text{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, n = 1, 2, \dots$$

Como $w \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, $v(x)$ es la **distribución estacionaria** de temperaturas hacia la que tienden las temperaturas en la varilla, independientemente de las condiciones iniciales.

[Si T_0 y T_L son funciones de t , la $v(x, t)$ de arriba sigue cumpliendo las condiciones de contorno, pero la ecuación para w resulta ser no homogénea, del tipo de las que vamos a resolver ahora].

[Separando variables directamente en [P₂] se llegaría a $X(0)T(t) = T_1$ (y otra análoga para $x = L$), expresión de la que no se deduce absolutamente nada y por eso se debe buscar la v].

Ej 1.
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) = 1, & u(0, t) = 1, u(1, t) = 0 \end{cases} \rightarrow v(x) = 1 - x.$$

Operando se llega a
$$u(x, t) = 1 - x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-n^2 \pi^2 t} \text{sen}(n\pi x).$$

[No importa que para $t=0$ sea incoherente el dato inicial con el de contorno en $x=1$; la solución será, como dijimos, una función continua para $t > 0$ y para hallar las integrales el valor en un punto no influye].

Veamos cómo se resuelve el **problema no homogéneo con condiciones de contorno homogéneas** (si estas no lo fuesen empezariamos como en [P₂] con un cambio $w = u - v$):

$$[P_3] \begin{cases} u_t - k u_{xx} = F(x, t), & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases} \quad [\text{Tomamos } L = \pi \text{ para abreviar las expresiones}].$$

Las **autofunciones del problema homogéneo** [P₁] eran $\{\text{sen } nx\}$, $n = 1, 2, \dots$. Probamos en [P₃] la siguiente serie (relacionada con la ecuación) que ya satisface las condiciones de contorno :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \text{sen } nx \quad \text{con las } T_n(t) \text{ funciones a determinar.}$$

[Tomando las $T_n = c_n e^{-kn^2 t}$ que aparecieron al resolver [P₁], la u satisfaría la ecuación con $F \equiv 0$.

Debemos dar más libertad a las T_n para conseguir al meter la serie en la ecuación una $F \neq 0$].

Llevando la serie a la ecuación (se supone que es derivable término a término) obtenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} [T'_n(t) + kn^2 T_n(t)] \text{sen } nx = F(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \text{sen } nx \Rightarrow \boxed{T'_n + kn^2 T_n = B_n(t)}.$$

$$\text{con } B_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(x, t) \text{sen } nx dx \quad [\text{desarrollo de } F(x, t) \text{ en senos para } t \text{ fijo}].$$

E imponiendo a la serie el **dato inicial** deducimos:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \text{sen } nx = f(x) \Rightarrow \boxed{T_n(0) = c_n}, \text{ con } c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \text{sen } nx dx.$$

Resolviendo la EDO lineal **no homogénea** para T_n con este dato inicial (mediante la fórmula de las lineales de primer orden o, a veces, por tanteo) hallamos la $T_n(t)$ y, con ello, la solución de [P₃].

Otra posibilidad (más larga) de resolver [P₃] es dividirlo en 2 subproblemas más sencillos, uno con $F = 0$ (el [P₁]) y otro con $f = 0$ que sería como el anterior, pero con las condiciones iniciales $T_n(0) = 0$. Por ser ecuación y condiciones adicionales lineales, la solución total sería la suma de las soluciones de ambos. Como se ve, en general, para los problemas no homogéneos hay que hacer dos desarrollos en serie y resolver EDOs no homogéneas (frente al único desarrollo y las EDOs homogéneas de los homogéneos).

Resolvemos ahora el problema **homogéneo** para la varilla con **extremos aislados**:

$$[P_4] \begin{cases} u_t - k u_{xx} = 0, & x \in (0, L), t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0 \end{cases}$$

Separando variables aparecen las mismas EDOs del problema [P₁] (claro, es la misma EDP). Pero ahora cambian las condiciones de contorno de la X :

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X'(L) = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad n=0, 1, 2, \dots, \quad X_n = \left\{ \cos \frac{n\pi x}{L} \right\} \quad [X_0 = \{1\}].$$

Para estos valores de λ se tienen las $T_n = \{e^{-kn^2 \pi^2 t / L^2}\} \quad [T_0 = \{1\}]$.

Siguiendo los caminos del [P₁], probamos la serie:
$$u(x, t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-kn^2 \pi^2 t / L^2} \cos \frac{n\pi x}{L}.$$

Queremos que se satisfaga la condición inicial: $u(x, 0) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi x}{L} = f(x)$.

Así que los c_n desconocidos serán aquí los coeficientes de la serie de Fourier en cosenos de f :

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

Observemos que de nuevo la solución se puede interpretar como la suma de una distribución de temperaturas estacionaria [$c_0/2$] y otra transitoria que tiende a 0 cuando $t \rightarrow \infty$. Era esperable que toda la varilla (aislada) tendiese a la misma temperatura y que esta fuese el valor medio de las temperaturas iniciales:

$$\frac{c_0}{2} = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx$$

Para resolver un problema **no homogéneo** con estas condiciones en la u_x , se prueba, como se hace siempre, una serie construida con las **autofunciones del homogéneo** que hemos hallado:

$$u(x, t) = T_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cos \frac{n\pi x}{L},$$

y se resuelven las EDOs que aparecen, con los datos que se deducen del dato inicial de la EDP.

Si las condiciones de contorno fueran $u_x(0, t) = F_0(t)$, $u_x(L, t) = F_L(t)$ (flujo dado en los extremos), no se puede encontrar (en general) una $v(x, t)$ que sea una recta (se pueden probar parábolas) y, al hacer $w = u - v$, la ecuación en w que resulta es normalmente no homogénea.

Ej 2.
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) = 0 \\ u_x(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = 2 \end{cases}$$

Tanteando con $v = Ax^2 + Bx$ obtenemos que $v = x^2$ cumple las condiciones de contorno.
Y haciendo $w = u - x^2$ se tiene el problema:

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} = 2 \\ w(x, 0) = -x^2 \\ w_x(0, t) = w_x(1, t) = 0 \end{cases} \rightarrow w = T_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cos n\pi x \rightarrow T_0' + \sum_{n=1}^{\infty} [T_n' + n^2 \pi^2 T_n] \cos n\pi x = 2$$

[la función 2 ya está desarrollada en cosenos].

Del dato inicial: $T_0(0) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \cos n\pi x = -x^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x = -\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2 \pi^2} \cos n\pi x$,
pues $a_0 = -2 \int_0^1 x^2 dx = -\frac{2}{3}$, $a_n = -2 \int_0^1 x^2 \cos n\pi x dx = \frac{2x^2}{n\pi} \sin n\pi x \Big|_0^1 - \frac{4}{n\pi} \int_0^1 x \sin n\pi x dx$
 $= -\frac{4x}{n^2 \pi^2} \cos n\pi x \Big|_0^1 + \frac{4}{n^2 \pi^2} \int_0^1 \cos n\pi x dx$

Resolvemos, pues: $\begin{cases} T_0' = 2 \\ T_0(0) = -\frac{1}{3} \end{cases} \rightarrow T_0 = 2t + C \xrightarrow{d.i.} C = -\frac{1}{3}$, $\begin{cases} T_n' + n^2 \pi^2 T_n = 0 \\ T_n(0) = a_n \end{cases} \rightarrow T_n = a_n e^{-n^2 \pi^2 t}$.

La solución es, por tanto, $u(x, t) = 2t + x^2 - \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} e^{-n^2 \pi^2 t} \cos n\pi x$.

[$u \rightarrow \infty$ si $t \rightarrow \infty$ pues $u_x = 2$ significa que por la derecha metemos constantemente calor].

Un ejemplo **no homogéneo**, cuyas condiciones de contorno no nos han aparecido aquí todavía:

Ej 3.
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = t \operatorname{sen} x, & x \in (0, \frac{\pi}{2}), t > 0 \\ u(x, 0) = u(0, t) = u_x(\frac{\pi}{2}, t) = 0 \end{cases}$$
 Para saber qué serie probar, hallamos las **autofunciones del homogéneo**. Al separar variables en $u_t - u_{xx} = 0$ vimos que aparecía $X'' + \lambda X = 0$ (y la $T' + \lambda T = 0$ que no es útil ahora).

Esto, y las $X(0) = X'(\frac{\pi}{2}) = 0$, que salen de los datos de contorno, da las $X_n = \{\operatorname{sen}(2n-1)x\}$, $n = 1, 2, \dots$

Llevamos, pues, a la EDP:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \operatorname{sen}(2n-1)x \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} [T'_n + (2n-1)^2 T_n] \operatorname{sen}(2n-1)x = t \operatorname{sen} x.$$

La $F(x, t)$ de la derecha ya está desarrollada en esas autofunciones (no necesitamos hacer integrales).

Hemos obtenido las ecuaciones ordinarias: $T'_1 + T_1 = t$ y $T'_n + (2n-1)^2 T_n = 0$, $n > 1$.

Además, del dato inicial deducimos: $u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \operatorname{sen}(2n-1)x = 0 \rightarrow T_n(0) = 0 \forall n$.

La única $T_n \neq 0$ saldrá de: $\begin{cases} T'_1 + T_1 = t \\ T_1(0) = 0 \end{cases} \rightarrow T_1 = Ce^{-t} + e^{-t} \int e^t t dt = Ce^{-t} + t - 1$
[O más corto: $T_{np} = At + B \rightarrow A + At + B = t$].

Imponiendo $T_1(0) = 0$, hallamos T_1 y la solución única del problema: $u(x, t) = (e^{-t} + t - 1) \operatorname{sen} x$.

[La 'serie solución' sólo tiene un término y no hemos integrado para dar los $T_n(0)$ y los $B_n(t)$. Esto ocurrirá cuando f o F sean autofunciones o sumas finitas de ellas. Si el dato inicial fuese $u(x, 0) = f(x)$ no autofunción, o la ecuación hubiera sido $u_t - u_{xx} = F(x, t)$, deberíamos desarrollarlas en las autofunciones del problema haciendo las correspondientes integrales].

En este el problema de contorno es más complicado (aunque acabará siendo problema homogéneo).

Ej 4.
$$\begin{cases} u_t - k u_{xx} = 0, & x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) = x \\ u_x(0, t) - u(0, t) = 0, & u_x(1, t) = 1 \end{cases}$$
 Vimos en 4.2 que hay unicidad. Para resolverlo lo primero será **hacer las condiciones de contorno homogéneas**.

Tanteando con rectas $v = Mx + N$, se ve que las cumple:
$$v = x + 1 \rightarrow w = u - v \rightarrow \begin{cases} w_t - k w_{xx} = 0 \\ w(x, 0) = -1 \\ w_x(0, t) - w(0, t) = w_x(1, t) = 0 \end{cases}$$
 (problema homogéneo)

Separando variables se llega a $T' + \lambda k T = 0$ y al problema de contorno:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) - X(0) = X'(1) = 0 \end{cases} \text{ que sabemos que no tiene autovalores } < 0.$$

Si $\lambda = 0$: $X = c_1 + c_2 x \rightarrow \begin{cases} c_2 - c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda = 0$ no autovalor.

Si $\lambda > 0$: $X = c_1 \cos wx + c_2 \operatorname{sen} wx$, $w = \sqrt{\lambda} \rightarrow \begin{cases} c_2 w - c_1 = 0 \\ c_2 \cos w - c_1 \operatorname{sen} w = 0 \end{cases} \rightarrow c_2 = \frac{1}{w} c_1 = \frac{\operatorname{sen} w}{\cos w} c_1$
 $\rightarrow c_1 (\cos w - w \operatorname{sen} w) = 0 \rightarrow \tan w = \frac{1}{w}$.

Hay infinitos autovalores $\lambda_n = w_n^2 > 0$ (que se pueden aproximar numéricamente). Y las autofunciones se pueden poner:

$$\left\{ \cos w_n x + \frac{1}{w_n} \operatorname{sen} w_n x \right\}, \text{ o mejor, } X_n = \left\{ \cos w_n (x-1) \right\}.$$

Yendo a la ecuación en T :

$$T_n = \{e^{-\lambda_n k t}\} \rightarrow w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-w_n^2 k t} \cos w_n (x-1).$$

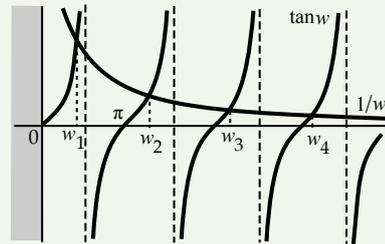
Imponiendo el dato inicial se determinan los c_n [serán aproximados al serlo los λ_n]:

$$w(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n(x) = -1 \rightarrow c_n = -\frac{1}{\langle X_n, X_n \rangle} \int_0^1 X_n(x) dx = -\frac{4 \operatorname{sen} w_n}{2w_n + \operatorname{sen} 2w_n},$$

$$\text{pues } \int_0^1 \cos^2 w_n (x-1) dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{4w_n} [\operatorname{sen} 2w_n (x-1)]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2w_n}{4w_n}.$$

Sí es fácil de dar la distribución estacionaria hacia la que tienden las temperaturas en la varilla:

$$u(x, t) = w(x, t) + x + 1 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} x + 1.$$



Se puede usar el método en muchas otras ecuaciones separables además de la del calor:

Ej 5.
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + 2u = 0, & x \in (0, \frac{\pi}{2}), t > 0 \\ u(x, 0) = \cos 5x, & u_x(0, t) = u(\frac{\pi}{2}, t) = 0 \end{cases}$$
 [El término $+2u$ representa una pérdida de calor hacia el medio a lo largo de la varilla].

Separando variables: $u(x, t) = X(x)T(t) \rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} + 2 = -\lambda$ [damos el 2 mejor a la T para obtener la clásica para la X]

$\rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ T' + (2 + \lambda)T = 0 \end{cases}$ y de los datos de contorno: $u_x(0, t) = X'(0)T(t) = 0 \rightarrow X'(0) = 0$
 $u(\frac{\pi}{2}, t) = X(\frac{\pi}{2})T(t) = 0 \rightarrow X(\frac{\pi}{2}) = 0$

$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = (2n-1)^2, X_n = \{ \cos(2n-1)x \} \rightarrow T' = -(2 + \lambda_n)T, T_n = \{ e^{-[2+(2n-1)^2]t} \}$
 $n = 1, 2, \dots$

La solución será de la forma: $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-[2+(2n-1)^2]t} \cos(2n-1)x$. Y, por el dato inicial:

$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(2n-1)x = \cos 5x \rightarrow c_3 = 1$ y el resto 0. Así pues: $u(x, t) = e^{-27t} \cos 5x$.

Ej 6.
$$\begin{cases} u_t - \frac{1}{2t} u_{xx} = 3 \sin 2x, & x \in (0, \frac{\pi}{2}), t > 1 \\ u(x, 1) = u(0, t) = u(\frac{\pi}{2}, t) = 0 \end{cases}$$
 Haciendo $u = XT$ en la homogénea:

$\frac{X''}{X} = \frac{2tT'}{T} = -\lambda \rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$ [además $T' + \frac{1}{2t}T = 0$].

$\rightarrow X_n = \{ \sin 2nx \}, n = 1, 2, \dots. u = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin 2nx$ a la EDP $\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} [T'_n + \frac{2n^2}{t} T_n] \sin 2nx = 3 \sin 2x$.

Y del dato inicial $u(x, 1) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(1) \sin 2nx = 0 \rightarrow T_n(1) = 0 \forall n$. Sólo es no nula la solución de:

$\begin{cases} T'_1 + \frac{2}{t} T_1 = 3 \\ T_1(1) = 0 \end{cases}, T_1 = \frac{C}{t^2} + \frac{1}{t^2} \int 3t^2 dt = \frac{C}{t^2} + t \xrightarrow{d.i.} C = -1$. La solución es $u(x, t) = [t - \frac{1}{t^2}] \sin 2x$.

Hasta ahora la EDO del problema de contorno siempre ha sido $X'' + \lambda X = 0$, y, por eso, las series de Fourier eran con peso $r(x) = 1$. Aquí aparece otra distinta para la que es necesario utilizar la teoría general de 3.4.

Ej 7.
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} - 4u_x - 4u = 0, & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = e^{-2x}, & u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$$
 $u = XT \rightarrow \frac{T'}{T} = \frac{X'' + 4X'}{X} + 4 = -\lambda \rightarrow$ más corto ahora aquí

$\begin{cases} X'' + 4X' + (4 + \lambda)X = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}$ (en forma autoadjunta $[e^{4x} X']' + 4e^{4x} X + \lambda e^{4x} X = 0$) y $T' + \lambda T = 0$.

Hay que resolver el problema de contorno (y debemos considerar los $\lambda < 0$). $\mu = -2 \pm \sqrt{-\lambda}$.

$\lambda < 0$: $X = c_1 e^{(-2+\mu)x} + c_2 e^{(-2-\mu)x} \xrightarrow{c.c.} X \equiv 0$. $\lambda = 0$: $X = (c_1 + c_2 x) e^{-2x} \xrightarrow{c.c.} X \equiv 0$.

$\lambda > 0$: $X = (c_1 \cos wx + c_2 \sin wx) e^{-2x}, c_1 = 0, c_2 e^{-2\pi} \sin w\pi = 0, \lambda_n = n^2, X_n = \{ e^{-2x} \sin nx \}, n = 1, 2, \dots$

Probamos pues la solución: $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 t} e^{-2x} \sin nx$. Sólo falta el dato inicial:

$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-2x} \sin nx = e^{-2x}$. Aunque hay atajos seguimos con la teoría general:

Para calcular los c_n necesitamos hallar $\langle X_n, X_n \rangle = \int_0^\pi e^{4x} e^{-4x} \sin^2 nx dx = \frac{\pi}{2}$,

y además: $\langle e^{-2x}, X_n \rangle = \int_0^\pi e^{4x} e^{-2x} e^{-2x} \sin nx dx = -\frac{1}{n} \cos nx \Big|_0^\pi = \frac{1 - (-1)^n}{n}$ ($= 0$ si n par).

Por tanto, la solución es: $u(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m-1} e^{-(2m-1)^2 t} e^{-2x} \sin(2m-1)x$.

Veamos ahora los atajos. El primero es observar que la igualdad de $u(x, 0)$ equivale a:

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx = 1$ (desarrollo de 1 en senos) $\rightarrow c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin nx dx$ (calculado arriba).

El segundo viene de recordar (4.2) que cambios $u = e^{pt+qx} w$ pueden simplificar la ecuación. Podríamos tantear, pero en este caso todo pide hacer:

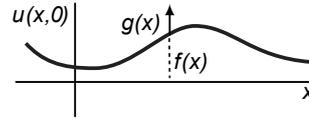
$u = e^{-2x} w \rightarrow u_t = e^{-2x} w_t, u_x = e^{-2x} [w_x - 2w], u_{xx} = e^{-2x} [w_{xx} - 4w_x + 4w] \rightarrow$

$\begin{cases} w_t - w_{xx} = 0 \\ w(x, 0) = 1, w(0, t) = w(\pi, t) = 0 \end{cases}$, primer problema resuelto por separación de variables.

4.4. Ondas. D'Alembert y separación de variables

En la sección 4.2 vimos que la solución general del **problema puro de valores iniciales**

$$(P_1) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x, t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = f(x), & u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$$



era $u(x, t) = p(x+ct) + q(x-ct)$, $p, q \in C^2$, y que la solución única de (P_1) venía dada por:

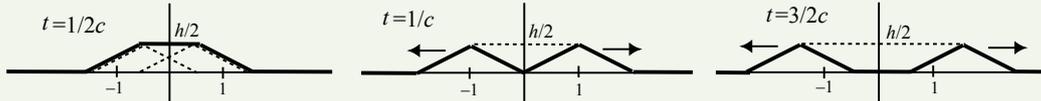
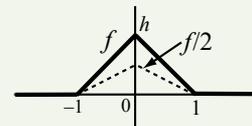
$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds \quad \text{fórmula de D'Alembert}$$

La solución de (P_1) es suma de dos ondas que viajan a velocidad c , una hacia las x crecientes y otra hacia las decrecientes. A la vista de D'Alembert, llamando $G(x) \equiv \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds$:

$q(x) = \frac{1}{2}f(x) - G(x)$ va hacia la derecha y $p(x) = \frac{1}{2}f(x) + G(x)$ va hacia la izquierda.

Ej 1. Supongamos $f=0$ salvo una perturbación en forma de triángulo en torno a 0 y que soltamos la cuerda sin impulso ($g=0$).

Hagamos un dibujo de la solución para diferentes t . Bastará trasladar las dos ondas que viajan en sentidos opuestos [aquí ambas son $\frac{1}{2}f(x)$]:



Ha sido fácil dibujar la solución [bastante más costaría dar su expresión analítica]. Los picos de la f inicial **siguen indefinidamente** y viajan también a velocidad c . Para que u sea solución de verdad (C^2), debe $f \in C^2$ y $g \in C^1$. Si u es continua pero no C^2 , como ésta, se llama 'solución débil'.

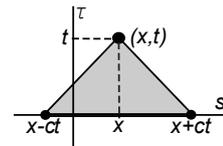
Si hay **fuerzas externas**, el problema es:

$$(P_2) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t), & x, t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = f(x), & u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

Se comprueba que su solución es:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c[t-\tau]}^{x+c[t-\tau]} F(s, \tau) ds d\tau \quad \text{[DA]}$$

Se ve que $u(x, t)$ sólo depende de los valores de f en $x-ct$ y $x+ct$ [puntos de corte con el eje x de las características que pasan por (x, t)] y de los de g en el intervalo $[x-ct, x+ct]$. Este intervalo se llama dominio de dependencia del punto (x, t) . Y se comprueba que el recinto de la integral doble es el triángulo del plano $s\tau$ limitado por el eje $\tau=0$ y esas características. Así pues, para dar la solución u en un punto (x, t) se necesita sólo: i) los valores de F en el triángulo, ii) los de g en su base, iii) los de f en los dos puntos.



Ej 2.

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 2 \\ u(x, 0) = x, & u_t(x, 0) = 3 \end{cases}$$

Utilizando directamente la última fórmula [DA]:

$$u = \frac{1}{2} [(x+t) + (x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} 3 ds + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-[t-\tau]}^{x+[t-\tau]} 2 ds d\tau = x+3t+2 \int_0^t [t-\tau] d\tau = x+3t+t^2.$$

A veces es fácil hallar una solución particular v de la ecuación no homogénea y así evitar el cálculo de la integral doble, pues $w = u - v$ conduce a un problema más sencillo con $F = 0$, (esto no se podrá hacer siempre cuando haya condiciones de contorno, pues podrían dejar de ser homogéneas). Por ejemplo si F depende sólo de x o de t se puede buscar una $v(x)$ o una $v(t)$:

$$-v_{xx} = 2 \rightarrow v = -x^2 + Cx + K \rightarrow \text{si } v(x) = -x^2, \quad w \text{ cumple } \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0 \\ w(x, 0) = x + x^2, & w_t(x, 0) = 3 \end{cases}$$

$$\rightarrow w = \frac{1}{2} [(x+t) + (x+t)^2 + (x-t) + (x-t)^2] + \int_{x-t}^{x+t} 3 ds = x + x^2 + t^2 + 3t \rightarrow u = x + 3t + t^2.$$

$$v_{tt} = 2 \rightarrow v(t) = t^2 + 3t \rightarrow \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0 \\ w(x, 0) = x, & w_t(x, 0) = 0 \end{cases} \rightarrow w = x \rightarrow u = x + 3t + t^2.$$

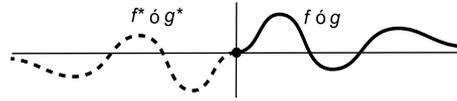
Pasemos a resolver problemas con **condiciones de contorno**. En primer lugar, el problema para la **cuerda semi-infinita**, sin fuerzas externas y fija en un extremo:

$$(P_3) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), & u_t(x, 0) = g(x), u(0, t) = 0 \end{cases} \quad \text{[para que no esté rota, debe ser } f(0) = 0 \text{].}$$

D'Alembert exige funciones definidas $\forall x$ y f y g no lo están cuando $x < 0$. ¿Cómo extender estas funciones a todo \mathbf{R} ? Si llamamos f^* y g^* a sus extensiones se debe cumplir la condición:

$$u(0, t) = \frac{1}{2} [f^*(ct) + f^*(-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{-ct}^{ct} g^*(s) ds = 0,$$

es claro que f^* y g^* han de ser **impares respecto a 0**, es decir, $f^*(-x) = -f^*(x)$, $g^*(-x) = -g^*(x)$.



Así pues, la solución de (P_3) es la del siguiente problema (para la cuerda infinita):

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f^*(x), & u_t(x, 0) = g^*(x) \end{cases}, \quad u(x, t) = \frac{1}{2} [f^*(x+ct) + f^*(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g^*(s) ds \quad \text{[De]}$$

pues u cumple la ecuación, las condiciones iniciales para $x \geq 0$, y la de contorno. El problema del uso de [De] es que f^* y g^* tienen, en general, **diversas expresiones en distintos intervalos**.

Resolvamos ahora el problema más general con **fuerzas externas y extremo móvil**:

$$(P_4) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t), & x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), & u_t(x, 0) = g(x), u(0, t) = h_0(t) \end{cases} \quad \text{[debe ahora ser } f(0) = h_0(0) \text{].}$$

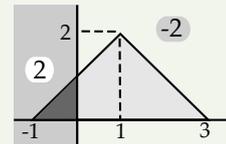
Primero **debemos hacer la condición de contorno homogénea**, hallando una v que la cumpla y haciendo $w = u - v$, ya que entonces será $w(0, t) = 0$, aunque probablemente se complicarán la ecuación y el resto de condiciones. La v más clara (no siempre la mejor) es: $v(t) = h_0(t)$.

La solución del problema en w la dará [DA] si sustituimos sus f , g y F por f^* , g^* y F^* , siendo ésta última la **extensión impar de F mirándola como función de x** .

Ej 3.
$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, & u(0, t) = t^2 \end{cases}$$
 Hallemos primero simplemente $u(1, 2)$.

Para anular la condición de contorno podemos usar la v citada:

$$w = u - t^2 \rightarrow \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = -2 \\ w(x, 0) = w_t(x, 0) = 0 \\ w(0, t) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = \begin{cases} 2, & x < 0 \\ -2, & x > 0 \end{cases} \\ w(x, 0) = w_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$



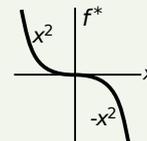
$$w(1, 2) = \frac{1}{2} \iint_{\Delta} F^* = \frac{1}{2} \left[(2) \text{área}_{\triangle} + (-2) \text{área}_{\triangle} \right] = -3 \rightarrow u(1, 2) = -3 + 4 = 1.$$

[Por ser constantes las F a integrar, nos hemos ahorrado el cálculo de integrales dobles. Pero si F fuese otra, habría que hacer 3 integrales dobles, una para el triángulo y 2 para el trapecio].

Pero podríamos conseguir un problema sin F , haciendo el cambio con una v mejor. Tanteando un poco se ve que $v = x^2 + t^2$ cumple la condición y también la ecuación:

$$w = u - v \rightarrow \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0 \\ w(x, 0) = -x^2, w_t(x, 0) = 0 \\ w(0, t) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0, & x, t \in \mathbf{R} \\ w(x, 0) = f^*(x) \\ w_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow w(1, 2) = \frac{1}{2} [f^*(3) + f^*(-1)] = -4 \rightarrow u(1, 2) = 5 - 4 = 1.$$



Con este segundo cambio no es difícil dar la $u(x, t)$ para todo $x, t \geq 0$ (con el primero costaría mucho). Está claro que hay que considerar **dos posibilidades**, pues, aunque $x+t$ es positivo, $x-t$ puede ser también negativo, y la f^* tiene expresiones distintas para valores positivos y negativos:

$$w = \frac{1}{2} [f^*(x+t) + f^*(x-t)] = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x+t)^2 + \frac{1}{2}(x-t)^2 = -2tx, & x \leq t \\ -\frac{1}{2}(x+t)^2 - \frac{1}{2}(x-t)^2 = -x^2 - t^2, & x \geq t \end{cases} \rightarrow u = \begin{cases} (x-t)^2, & x \leq t \\ 0, & x \geq t \end{cases}$$

[Como las ondas viajan a velocidad $c=1$ los puntos a distancia $\geq t$ debían estar parados en el instante t].

[Una condición de contorno de la forma $u_x(0, t) = 0$ (que no trataremos aquí y que representa un extremo de la cuerda al que se le da libertad de subir y bajar) conduce a extensiones pares].

Estudiamos la **cuerda acotada** y fija en los extremos [única resoluble por separación de variables]:

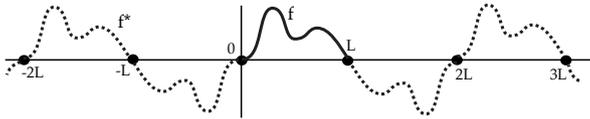


$$(P_5) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x \in [0, L], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), & u_t(x, 0) = g(x) \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \end{cases}$$

[debe ser $f(0) = f(L) = 0$].

Para hallar su solución única usando D'Alembert **extendemos f y g a $[-L, L]$ de forma impar respecto a 0 y luego de forma $2L$ -periódica a todo \mathbf{R}** :

$$f^*(-x) = -f^*(x), f^*(x+2L) = f^*(x), g^*(-x) = -g^*(x), g^*(x+2L) = g^*(x).$$



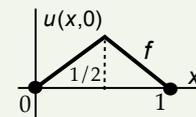
[Entonces f^* y g^* también serán impares respecto a L y tendrán, en general, infinitas expresiones].

La solución de (P_5) se obtiene entonces aplicando [De] a $\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f^*(x), & u_t(x, 0) = g^*(x) \end{cases}$.

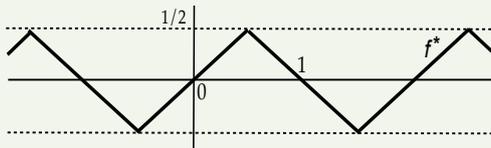
Ej 4.

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in [0, 1], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1-x, & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases} \\ u_t(x, 0) = u(0, t) = u(1, t) = 0 \end{cases}$$

(Puede representar la pulsación de la cuerda de una guitarra).



Es muy complicado hallar explícitamente $u(x, t) = \frac{1}{2} [f^*(x+t) + f^*(x-t)] \forall x, t$ pues f^* tiene infinitas expresiones y habría que discutir en qué intervalos se mueven $x+t$ y $x-t$:



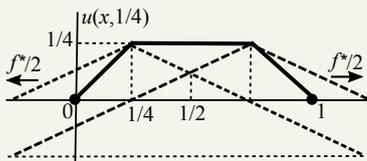
$$f^*(x) = \begin{cases} \dots \\ -1-x, & -3/2 \leq x \leq -1/2 \\ x, & -1/2 \leq x \leq 1/2 \\ 1-x, & 1/2 \leq x \leq 3/2 \\ x-2, & 3/2 \leq x \leq 5/2 \\ \dots \end{cases}$$

Algo más sencillo, pero aún largo, sería hallar la solución para un t o un x fijo. Pero sí es muy fácil hallar u para un (x, t) dado. No se necesita siquiera la expresión de f^* . Por ejemplo:

$$u\left(\frac{1}{4}, 3\right) = \frac{1}{2} [f^*\left(\frac{13}{4}\right) + f^*\left(-\frac{11}{4}\right)] = \frac{1}{2} [f^*\left(-\frac{3}{4}\right) + f^*\left(-\frac{3}{4}\right)] = -f\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{4}.$$

f^* es 2-periódica f^* es impar

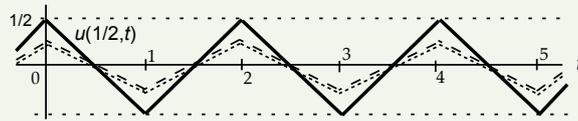
Tampoco se precisa conocer f^* (sí su gráfica) para hacer **dibujos**: basta trasladar $\frac{1}{2}f^*$ a izquierda y derecha y sumar. Por ejemplo, empecemos dibujando $u(x, \frac{1}{4}) = \frac{1}{2} [f^*(x+\frac{1}{4}) + f^*(x-\frac{1}{4})]$:



El máximo de la gráfica de $\frac{1}{2}f^*$ (la de f^* con la mitad de altura), se ha ido al ir hacia la izquierda hasta $(1/4, 1/4)$ y al ir hacia la derecha a $(3/4, 1/4)$. Al sumar dos rectas con la misma pendiente sale otra con el doble, y al sumar dos con pendiente opuesta queda una constante.

Dibujemos ahora:

$$\begin{aligned} u\left(\frac{1}{2}, t\right) &= \frac{1}{2} [f^*\left(\frac{1}{2}+t\right) + f^*\left(\frac{1}{2}-t\right)] \\ &= \frac{1}{2} [f^*\left(\frac{1}{2}+t\right) - f^*\left(t-\frac{1}{2}\right)] \rightarrow \end{aligned}$$



La gráfica tiene periodo 2. Por las propiedades de f^* y g^* , **la u dada por [De] es $\frac{2L}{c}$ -periódica en t** .

Las complicaciones de D'Alembert desaparecen sólo cuando las funciones extendidas son las propias funciones iniciales, es decir, si son ellas mismas impares y periódicas. Si fuese nuestra $f(x) = \sin \pi x$, simplemente la solución $\forall x, t$ sería $u(x, t) = \frac{1}{2} [\sin(x+t) + \sin(x-t)] = \sin x \cos t$.

Si queremos resolver

$$(P_6) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t), & x \in [0, L], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), & u_t(x, 0) = g(x) \\ u(0, t) = h_0(t), & u(L, t) = h_L(t) \end{cases}$$

(hay fuerzas externas y movemos los extremos)

primero se halla una v que cumpla las condiciones de contorno y se hace $w = u - v$. Tanteando con

funciones $v = a(t)x + b(t)$ se ve fácilmente que una posible v es $v(x, t) = \left[1 - \frac{x}{L}\right] h_0(t) + \frac{x}{L} h_L(t)$.

La solución del problema en w vuelve a venir dada por [DA], poniendo en vez de sus f, g y F , las extensiones impares y $2L$ -periódicas f^*, g^* y F^* (vista F como función de x).

Separación de variables para ondas

Resolvamos el **problema homogéneo** para la **cuerda vibrante** con **extremos fijos** (que acabamos de resolver extendiendo los datos y aplicando la fórmula de D'Alembert y podremos comparar).

$$(P_5) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x \in [0, L], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), & u_t(x, 0) = g(x) \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \end{cases}$$

Separando variables $u = X(x)T(t)$ e imponiendo los datos de contorno obtenemos:

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2} \frac{T''}{T} = -\lambda \rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda X = 0, & X(0) = X(L) = 0 \\ T'' + \lambda c^2 T = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, X_n = \left\{ \sin \frac{n\pi x}{L} \right\}_{n=1, 2, \dots}$$

Las soluciones T_n para esos λ_n son combinaciones lineales de $\sin \frac{n\pi ct}{L}$ y $\cos \frac{n\pi ct}{L}$, $n = 1, 2, \dots$

Así que las $u_n(x, t) = \left[k_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + c_n \sin \frac{n\pi ct}{L} \right] \sin \frac{n\pi x}{L}$, satisfacen EDP y condiciones de contorno.

$$\text{Probamos, pues: } u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[k_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + c_n \sin \frac{n\pi ct}{L} \right] \sin \frac{n\pi x}{L}$$

con k_n y c_n constantes que debemos determinar (en el calor sólo quedaba una arbitraria). Para que se cumplan las condiciones iniciales (que aquí son dos):

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \sin \frac{n\pi x}{L} = f(x) \rightarrow k_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, n = 1, 2, \dots$$

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{L} c_n \sin \frac{n\pi x}{L} = g(x) \rightarrow c_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, n = 1, 2, \dots$$

pues $\frac{n\pi c}{L} c_n$ son los coeficientes del desarrollo de g en senos.

Se prueba que la serie converge y satisface realmente el problema si las extensiones impares y de periodo $2L$ de f y g son C^2 y C^1 , respectivamente. Si f, g no son tan buenas, la suma de la serie es lo que llamamos una solución débil (en las ondas, como ya se dijo, no desaparecen las discontinuidades).

Para ciertas cuestiones (valores concretos, dibujos, ...) es mejor D'Alembert, pero la serie muestra mejor otras propiedades. Por ejemplo, por ser $\frac{2L}{c}$ -periódicas en t las u_n , también u tiene este periodo.

Observemos además que la solución aparece como suma infinita de 'modos naturales de vibración' [$\sin \frac{n\pi x}{L}$] cada uno de los cuales vibra con una frecuencia $\frac{n\pi c}{L}$ (las 'frecuencias naturales' de la cuerda).

En términos acústicos u_1 da el tono fundamental (su frecuencia es $\frac{\pi c}{L}$) y los demás son los 'armónicos' (de frecuencia múltiplo de la anterior).

Como siempre (y como con D'Alembert), para empezar a resolver por separación de variables, **han de ser las condiciones de contorno homogéneas**. Y **para resolver los problemas no homogéneos se probarían series de autofunciones del homogéneo**.

Ej 4*.

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in [0, 1], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1-x, & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases} \\ u_t(x, 0) = u(0, t) = u(1, t) = 0 \end{cases}$$

(Ejemplo 4 de antes que podía representar la pulsación de la cuerda de una guitarra).

Basta copiar de arriba: $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \cos n\pi t \sin n\pi x$ (2-periódica),

con $k_n = 2 \int_0^{1/2} x \sin n\pi x dx + 2 \int_{1/2}^1 (1-x) \sin n\pi x dx$

$$= -\frac{2x}{n\pi} \cos n\pi x \Big|_0^{1/2} - \frac{2(1-x)}{n\pi} \cos n\pi x \Big|_{1/2}^1 + \frac{2}{n\pi} \int_0^{1/2} \cos n\pi x dx - \frac{2}{n\pi} \int_{1/2}^1 \cos n\pi x dx$$

$$= \frac{2}{n\pi} \left[-\cos \frac{n\pi}{2} + \cos \frac{n\pi}{2} \right] + \frac{2}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{2}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} = \frac{4}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} \quad (=0 \text{ si } n \text{ par}).$$

(Pulsando la cuerda en el centro desaparecen los armónicos pares).

También aquí las cosas serían muy simples si fuese $f(x) = \sin \pi x$, pues no habría que calcular integrales:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \sin n\pi x = \sin \pi x \rightarrow k_1 = 1 \text{ y los demás } 0 \rightarrow u(x, t) = \cos t \sin \pi x.$$

Ej 5.
$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in [0, \pi], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = 0, & u_t(x, 0) = x \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$$

a) Resolverla por separación de variables.
b) Calcular $u(2, 2)$ mediante la fórmula de D'Alembert y comparar ese valor con el que proporciona la serie,

a) Rehacemos cálculos sin mirar lo anterior. De los datos 0 se deduce $X(0) = X(\pi) = 0$ y $T(0) = 0$.

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = n^2, X_n = \{ \text{sen } nx \}, \quad \begin{cases} T'' + \lambda T = 0 \\ T(0) = 0 \end{cases} \rightarrow T_n = \{ \text{sen } nt \}, n = 1, 2, \dots$$

$\rightarrow u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sen } nt \text{sen } nx$. $u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n \text{sen } nx = x \rightarrow n c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \text{sen } nx \, dx = -\frac{2 \cos n\pi}{n}$.

Por tanto, la solución es la serie: $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n^2} \text{sen } nt \text{sen } nx$.

b) $u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g^*$, con g^* extensión impar y 2π -periódica de x .

$$u(2, 2) = \frac{1}{2} \int_0^4 g^* = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} s \, ds + \frac{1}{2} \int_{\pi}^4 (s-2\pi) \, ds = 4 - 4\pi + \pi^2 = (\pi-2)^2.$$

O como es impar respecto a π : $u(2, 2) = \frac{1}{2} \int_0^{2(\pi-2)} s \, ds = (\pi-2)^2$.

[Sumando 10 términos de la serie con $x=t=2$ se obtiene $u(2,2) \approx 1.3047$ y es $(\pi-2)^2 \approx 1.3032$].

Ecuación de ondas (no homogénea) con un término más (podría representar un rozamiento con el medio):

Ej 6.
$$\begin{cases} u_{tt} + 2u_t - u_{xx} = (t+2) \text{sen } x, & x \in [0, \pi], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$$

Separando variables en la ecuación homogénea:
 $u = XT \rightarrow X(T'' + 2T') = X''T, \quad \frac{X''}{X} = \frac{T'' + 2T'}{T} = -\lambda$.

$\rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases} \rightarrow X_n = \{ \text{sen } nx \}, n = 1, 2, \dots$ [y además $T_n'' + 2T_n' + \lambda T_n = 0$ que aquí no se usa].

Llevamos a la EDP: $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \text{sen } nx$, obteniendo $\sum_{n=1}^{\infty} [T_n'' + 2T_n' + n^2 T_n] \text{sen } nx = (t+2) \text{sen } x$.
ya desarrollada

Además: $u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \text{sen } nx = 0, u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(0) \text{sen } nx = 0 \Rightarrow T_n(0) = T_n'(0) = 0 \forall n$.

Todas las ecuaciones son homogéneas con datos nulos (y es $T_n \equiv 0$) menos $\begin{cases} T_1'' + 2T_1' + T_1 = t+2 \\ T_1(0) = T_1'(0) = 0 \end{cases}$,

$T_1 = (c_1 + c_2 t) e^{-t} + t$ [$\mu = -1$ doble y $T_{1p} = At + B$] $\xrightarrow{d.i.}$ $u(x, t) = t(1 - e^{-t}) \text{sen } x$.

Acabamos la sección con algunas **reflexiones sobre el método de separación de variables**.

Todos los problemas que hemos visto estaban formados por una **EDP lineal** $L[u] = F$, con L lineal (es decir, $L[au_1 + bu_2] = aL[u_1] + bL[u_2]$) y unas **condiciones adicionales lineales** también.

Ha sido posible resolverlos porque todas las ecuaciones eran '**separables**' (hay EDPs que no lo son) y los recintos que aparecieron eran '**simples**' (limitados por ' $variable = cte$ ').

Siempre nos hemos ocupado primero de garantizar que fueran **homogéneas las condiciones de contorno**.

En todos los **problemas homogéneos** hemos buscado soluciones de la EDP que eran productos $u = XT$, y ello nos llevó a unas X_n autofunciones de un problema de contorno y unas T_n soluciones de otra EDO también homogénea. Gracias a la linealidad pudimos construir la serie $u(x, t) = \sum c_n T_n(t) X_n(x)$ y fijamos los c_n imponiendo la condición inicial (o las condiciones) y haciendo desarrollos de Fourier.

Para los **problemas no homogéneos**, buscando también una serie solución, metimos en la ecuación una serie cuyos términos eran **productos de las autofunciones del problema homogéneo por funciones a determinar de la otra variable**. Resolviendo la familia resultante de EDOs lineales no homogéneas con las condiciones que se deducían de las condiciones iniciales, obtuvimos la solución.

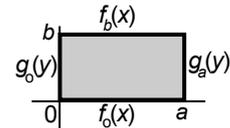
En los problemas resueltos hasta ahora necesariamente había **dos condiciones de contorno** y, además una o dos condiciones iniciales. Resolviendo Laplace en 4.5 veremos que a veces las condiciones de contorno no están a la vista (por ejemplo, en un círculo se exigirá periodicidad); y, en vez de condiciones iniciales, aparecerán otras dos de contorno (quizás alguna tampoco escrita, como la acotación).

4.5. Separación de variables para Laplace

En esta sección resolveremos por separación de variables problemas para la ecuación de **Laplace** (homogénea y no homogénea) tanto en coordenadas rectangulares como en polares y tanto para problemas de Dirichlet, como de Neumann, como mixtos. En cartesianas el problema de Sturm-Liouville a resolver será en x o en y según convenga (sus papeles son intercambiables), pero en polares será el de la θ (para la EDO de siempre, preferible al de la ecuación de Euler que aparece para la r).

Comenzamos por el **problema de Dirichlet en un rectángulo**, es decir:

$$[P_1] \begin{cases} \Delta u = F(x, y), \text{ en } (0, a) \times (0, b) \\ u(x, 0) = f_o(x), u(x, b) = f_b(x) \\ u(0, y) = g_o(y), u(a, y) = g_a(y) \end{cases}$$



Por ser lineales la ecuación y las condiciones, bastaría resolver los 5 subproblemas que se obtienen al hacer 4 de las 5 funciones que aparecen igual a 0 y sumar las 5 soluciones. Comencemos resolviendo, por ejemplo, uno de los 4 problemas para la **ecuación homogénea**:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \text{ en } (0, a) \times (0, b) \\ u(x, 0) = f_o(x) \\ u(x, b) = u(0, y) = u(a, y) = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} u(x, y) = X(x)Y(y) &\rightarrow X''Y + XY'' = 0 \rightarrow \\ -\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = \lambda &\rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ Y'' - \lambda Y = 0 \end{cases} \\ \text{[poniendo } -\lambda \text{ salen } X'' - \lambda X = 0, Y'' + \lambda Y = 0]. \end{aligned}$$

De $u(0, y) = u(a, y) = 0$ se deduce que $X(0) = X(a) = 0$, con lo que el problema de contorno para la X tiene solución no trivial si

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{a^2}, \quad X_n = \left\{ \sin \frac{n\pi x}{a} \right\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Para esos λ_n es $Y_n = c_1 e^{n\pi y/a} + c_2 e^{-n\pi y/a}$. La condición homogénea aún no aplicada $u(x, b) = 0$ impone $Y(b) = 0$. Nos interesan las Y_n que la cumplen:

$$c_2 = -c_1 e^{2n\pi b/a} \rightarrow Y_n = c_1 e^{n\pi b/a} (e^{n\pi[y-b]/a} - e^{n\pi[b-y]/a}) \rightarrow Y_n = \left\{ \text{sh} \frac{n\pi[b-y]}{a} \right\}$$

Probamos entonces:
$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sh} \frac{n\pi[b-y]}{a} \sin \frac{n\pi x}{a}.$$

Para satisfacer la condición de contorno no homogénea que falta (suponemos que f_o es C^1 a trozos):

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sh} \frac{n\pi b}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} = f_o(x) \rightarrow c_n \text{sh} \frac{n\pi b}{a} = \frac{2}{a} \int_0^a f_o(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx.$$

Análogamente se resuelven los otros 3 subproblemas con $F \equiv 0$. Uno vuelve a tener las X_n de antes, y en los otros dos es Y (con condiciones homogéneas) la que da las autofunciones $Y_n = \left\{ \sin \frac{n\pi y}{b} \right\}$.

Para resolver el último subproblema, el de la **ecuación no homogénea**:

$$\begin{cases} \Delta u = F(x, y), \text{ en } (0, a) \times (0, b) \\ u(x, 0) = u(x, b) = u(0, y) = u(a, y) = 0 \end{cases}$$

como siempre se prueba una serie de autofunciones. Aquí hay dos posibilidades [elegiremos la que proporcione un desarrollo más fácil para F]:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) \sin \frac{n\pi x}{a} \quad \text{ó} \quad u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \sin \frac{n\pi y}{b}$$

[En la práctica, anulando términos no homogéneos con cambios $w = u - v$, y con menos subproblemas se llega a la solución; lo único necesario para separar variables es que sea $u = 0$ en $x = 0, a$ ó en $y = 0, b$].

Se prueba que las u dadas por las series son realmente soluciones. Si los datos con C^1 a trozos (incluso si son discontinuos), la u tiene infinitas derivadas en el rectángulo abierto, es $\Delta u = 0$ ahí y se toma el valor de contorno con continuidad para los puntos del borde en que los datos son continuos. La situación será totalmente análoga en el círculo. La situación es parecida a lo que ocurriría con la ecuación del calor, pero no con la de ondas, en la que los picos iniciales se mantenían indefinidamente.

Resolvemos ahora un **problema de Neumann** en cartesianas. Suponemos la ecuación no homogénea, pero con condiciones de contorno homogéneas:

$$[P_2] \begin{cases} \Delta u = F(x, y), & \text{en } (0, \pi) \times (0, \pi) \\ u_y(x, 0) = u_y(x, \pi) = u_x(0, y) = u_x(\pi, y) = 0 \end{cases}$$

Separando variables en la ecuación homogénea llegamos, claro, a las mismas ecuaciones que en [P₁]: $X'' + \lambda X = 0$, $Y'' - \lambda Y = 0$. Las condiciones de contorno obligan a que $X'(0) = X'(\pi) = 0$, $Y'(0) = Y'(\pi) = 0$. Para este problema tenemos, pues, dos familias de autofunciones $\{\cos nx\}$ ó $\{\cos ny\}$, $n=0, 1, \dots$ y podemos elegir cualquiera de ella para nuestra serie. Por ejemplo:

$$u(x, y) = X_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \cos ny \rightarrow$$

$$X_0'' + \sum_{n=1}^{\infty} [X_n'' - n^2 X_n] \cos ny = \frac{B_0(x)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n(x) \cos ny, \quad B_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(x, y) \cos ny \, dy.$$

Debemos resolver los infinitos problemas de contorno para EDOs:

$$X_0'' = \frac{1}{2} B_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} F(x, y) \, dy; \quad X_n'' - n^2 X_n = B_n, \quad n \geq 1; \quad \text{con } X_n'(0) = X_n'(\pi) = 0.$$

Las X_n con $n \geq 1$ quedan determinadas de forma única (el problema homogéneo, como sabemos desde 3.3, tiene sólo la solución trivial).

Pero $X_0'' = 0$, $X_0'(0) = X_0'(\pi) = 0$ tiene soluciones no triviales ($\{1\}$), con lo que, según 3.3, para que haya solución para X_0 es necesario que sea $\int_0^{\pi} 1 \cdot B_0(x) \, dx = 0$. Es decir,

$$[P_2] \text{ tiene solución sólo si } \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} F(x, y) \, dx \, dy = 0 \text{ y entonces hay una constante arbitraria.}$$

Todo esto es coherente con lo dicho sobre Neumann en 4.2.

Ej 1. Calculemos la solución en el caso particular en que $F(x, y) = x - a$.

El problema sólo tiene solución si $\iint_{\square} F = 0$, es decir, si $a = \frac{\pi}{2}$.

Entonces nos queda $X_0'' = x - \frac{\pi}{2}$, pues, por suerte, la $F(x, y)$ ya está desarrollada en $\{\cos ny\}$.

Por esta misma razón los B_n , y por tanto los X_n , son nulos si $n \geq 1$.

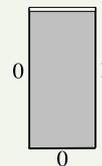
Integrando e imponiendo $X_0'(0) = X_0'(\pi) = 0$ obtenemos $u(x, y) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{\pi}{4}x^2 + C$.

[Si hubiéramos resuelto probando $u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(y) \cos nx$ sería necesario desarrollar en serie].

Un ejemplo más en cartesianas, para **Laplace con condiciones mixtas** (en parte Dirichlet, en parte Neumann). Es fácil ver con la fórmula de Green que todos ellos tienen solución única.

Ej 2. $u_{xx} + u_{yy} = 0, (x, y) \in (0, 1) \times (0, \pi)$
 $u(x, 0) = u_y(x, \pi) = u(0, y) = 0, u(1, y) = 1$ $u = X(x)Y(y) \rightarrow$

$$\begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0, & Y(0) = Y'(\pi) = 0 \\ X'' - \lambda X = 0, & X(0) = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = \left(\frac{2n-1}{2}\right)^2, \quad Y_n = \left\{ \text{sen} \frac{(2n-1)y}{2} \right\}.$$



Para esos λ es $X = c_1 e^{(2n-1)x/2} + c_2 e^{-(2n-1)x/2} \xrightarrow{X(0)=0} c_2 = -c_1, \quad X_n = \left\{ \text{sh} \frac{(2n-1)x}{2} \right\}$.

Probamos $u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n(x) Y_n(y)$. Para precisar las c_n imponemos el dato $u(1, y) = 1$ que falta:

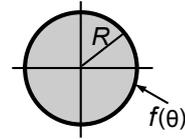
$$c_n \text{sh} \frac{2n-1}{2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \text{sen} \frac{(2n-1)y}{2} \, dy = \frac{4}{\pi(2n-1)} \left[1 - \cos \frac{(2n-1)\pi}{2} \right] \rightarrow$$

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1) \text{sh} \frac{2n-1}{2}} \text{sh} \frac{(2n-1)x}{2} \text{sen} \frac{(2n-1)y}{2}.$$

Recordemos que el **Laplaciano en coordenadas polares** $\begin{cases} x=r \cos \theta \\ y=r \sin \theta \end{cases}$ era $\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta}$.

Resolvamos **en un círculo** el **problema de Dirichlet homogéneo** (y abajo el de Neumann):

$$[P_D] \begin{cases} \Delta u = 0, \text{ en } r < R \\ u(R, \theta) = f(\theta), \theta \in [0, 2\pi) \end{cases}$$



$$u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta) \rightarrow \frac{r^2 R'' + rR'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda \rightarrow \begin{cases} \Theta'' + \lambda\Theta = 0 \\ r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0 \end{cases}$$

Parece no haber condiciones para Θ , pero está claro que la solución **debe ser 2π -periódica** en θ , es decir, debe ser $\Theta(0) = \Theta(2\pi)$, $\Theta'(0) = \Theta'(2\pi)$. Para este problema periódico sabemos que:

$$\lambda_n = n^2, n=0, 1, 2, \dots, \Theta_0(\theta) = \{1\}, \Theta_n(\theta) = \{\cos n\theta, \sin n\theta\}.$$

Y las soluciones correspondientes para R son (ecuaciones de Euler):

$$R_0(r) = c_1 + c_2 \ln r, R_n(r) = c_1 r^n + c_2 r^{-n} \text{ si } n \geq 1.$$

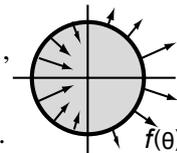
Parece lógico imponer por argumentos físicos que la solución **debe estar acotada cuando $r \rightarrow 0$** (matemáticamente también, si ha ser de C^2), así pues $c_2 = 0$ en ambos casos. Probamos, pues:

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n [a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta] \rightarrow u(R, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} R^n [a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta] = f(\theta)$$

$$\rightarrow a_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta, n=0, 1, \dots, b_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta, n=1, 2, \dots$$

El **problema de Neumann homogéneo** empieza como Dirichlet, hasta la $u(r, \theta)$ que se prueba:

$$[P_N] \begin{cases} \Delta u = 0, \text{ en } r < R \\ u_r(R, \theta) = f(\theta), \theta \in [0, 2\pi) \end{cases} \rightarrow u = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n [a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta]$$



pero cambia la condición final: $u_r(R, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n R^{n-1} [a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta] = f(\theta)$.

$$\rightarrow a_n = \frac{1}{n\pi R^{n-1}} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta, b_n = \frac{1}{n\pi R^{n-1}} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta, n=1, 2, \dots$$

siempre que no tenga término independiente el desarrollo en senos y cosenos de $f(\theta)$. Es decir

debe cumplirse $\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = 0$ [confirma lo que vimos en 4.2: debía ser $\oint_{\partial D} f ds = \iint_D F dx dy = 0$].

Además (desaparece al derivar) a_0 **queda indeterminado** [Neumann tiene unicidad salvo constante].

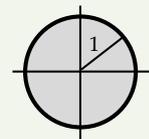
Resolvemos ahora un ejemplo de problema de **Dirichlet no homogéneo en el círculo**:

Ej 3. $\begin{cases} u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_{\theta\theta}}{r^2} = 4 \text{ en } r < 1 \\ u(1, \theta) = \sin 2\theta \end{cases}$ Probamos serie de autofunciones del homogéneo.

$$u(r, \theta) = a_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(r) \cos n\theta + b_n(r) \sin n\theta]$$

$$\rightarrow a_0'' + \frac{1}{r} a_0' + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left[a_n'' + \frac{1}{r} a_n' - \frac{n^2}{r^2} a_n \right] \cos n\theta + \left[b_n'' + \frac{1}{r} b_n' - \frac{n^2}{r^2} b_n \right] \sin n\theta \right) = 4,$$

constante ya desarrollada en esa familia de autofunciones.



Hay que resolver las ecuaciones: $r a_0'' + a_0' = 4r$, $r^2 a_n'' + r a_n' - n^2 a_n = 0$, $r^2 b_n'' + r b_n' - n^2 b_n = 0$.

La condición $u(1, \theta) = \sin 2\theta$ (desarrollada ya) impone: $a_n(1) = 0 \forall n$; $b_2(1) = 1$; $b_n(1) = 0, n \neq 2$.

La acotación cuando $r \rightarrow 0$ será la otra condición necesaria para determinar la solución de cada EDO de segundo orden. Para la de a_0 necesitamos una solución particular, que se puede hallar con la **fv**:

$$\begin{vmatrix} 1 & \ln r \\ 0 & 1/r \end{vmatrix} = \frac{1}{r}, a_{0p} = \ln r \int \frac{1 \cdot 4 dr}{1/r} - \int \frac{\ln r \cdot 4 dr}{1/r} = \dots = r^2.$$

o, mejor, tanteando una $a_{0p} = Ar^2$ ($a_{0p} = Ae^{2s}$ y no autovalor) $\rightarrow 2A + 2A = 4$, $A = 1$. Así pues:

$$a_0 = c_1 + c_2 \ln r + r^2 \xrightarrow{\text{acotada}} c_2 = 0 \xrightarrow{a_0(1)=0} c_1 = -1, b_2 = c_1 r^2 + c_2 r^{-2} \xrightarrow{\text{acotada}} c_2 = 0 \xrightarrow{b_2(1)=1} c_1 = 1.$$

Podemos asegurar además que el resto de a_n y b_n son cero (0 es claramente solución y no hay más por tener un problema de Dirichlet solución única). La solución del problema es:

$$u(r, \theta) = r^2 - 1 + r^2 \sin 2\theta \quad [\text{Se podría escribir en cartesianas: } u = (x+y)^2 - 1].$$

Los siguientes ejemplos ya no son círculos (ni coronas circulares) y el problema de contorno en θ no será el periódico sino el que indiquen las condiciones de contorno que deben figurar explícitamente. La acotación seguirá siendo necesaria cuando el origen pertenezca al borde del recinto.

Primero uno de **Neumann homogéneo** en el semicírculo (que no exige integrales y tendrá C arbitraria).

Ej 4. $\Delta u = 0$ en $r < 1$, $0 < \theta < \pi$
 $u_r(1, \theta) = \cos^3 \theta$, $u_\theta(r, 0) = u_\theta(r, \pi) = 0$

La ecuación para Θ que sale al separar variables es conocida (y también la de R). Junto a los datos en $\theta=0, \pi$ nos da las Θ_n : 

$$\begin{cases} \Theta'' + \lambda \Theta = 0 \\ \Theta'(0) = \Theta'(\pi) = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = n^2, \Theta_n(\theta) = \{\cos n\theta\}, n=0, 1, 2, \dots \rightarrow$$

$$r^2 R'' + rR - n^2 R = 0 \rightarrow \begin{cases} R_0 = c_1 + c_2 \ln r \xrightarrow{R \text{ acot.}} R_0 = \{1\} \\ R_n = c_1 r^n + c_2 r^{-n} \rightarrow R_n = \{r^n\} \end{cases} \rightarrow u(r, \theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n \cos n\theta.$$

$$u_r(1, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \cos n\theta = \cos^3 \theta = \frac{3}{4} \cos \theta + \frac{1}{4} \cos 3\theta. \text{ No hay que integrar:}$$

$$a_1 = \frac{3}{4}, a_3 = \frac{1}{12}, a_0 \text{ sin condición, el resto } 0 \rightarrow u(r, \theta) = C + \frac{3r}{4} \cos \theta + \frac{r^3}{12} \cos 3\theta, C \text{ cualquiera.}$$

Otro homogéneo con **condiciones mixtas** (y otras condiciones de contorno) que sí exige integrar.

Ej 5. $\Delta u = 0$, en $r < 1$, $0 < \theta < \pi$
 $u_r(1, \theta) = \theta$, $u(r, 0) = u_\theta(r, \pi) = 0$

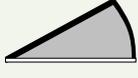
$\begin{cases} \Theta'' + \lambda \Theta = 0 \\ \Theta(0) = \Theta(\pi) = 0 \end{cases}, \lambda_n = \frac{(2n-1)^2}{4}, \Theta_n = \{\sin \frac{2n-1}{2} \theta\}_{n=1,2,\dots}$ 

Para esos λ_n : $r^2 R'' + rR - \lambda_n R = 0$, $R = c_1 r^{n-\frac{1}{2}} + c_2 r^{-n+\frac{1}{2}} \xrightarrow{R \text{ acot.}} R_n = \{r^{n-\frac{1}{2}}\}$, $u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^{n-\frac{1}{2}} \sin \frac{2n-1}{2} \theta$.

$$u_r(1, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{2n-1}{2} \sin \frac{2n-1}{2} \theta = \theta, c_n = \frac{2}{2n-1} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \theta \sin \frac{2n-1}{2} \theta d\theta \rightarrow u = \frac{16}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} r^{n-\frac{1}{2}} \sin \frac{2n-1}{2} \theta.$$

Un problema (mixto) no homogéneo y que no exige integrar.

Ej 6. $\Delta u = r^2 \cos 3\theta$, $r < 2$, $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$
 $u(2, \theta) = u_\theta(r, 0) = u(r, \frac{\pi}{6}) = 0$

$\begin{cases} \Theta'' + \lambda \Theta = 0 \\ \Theta'(0) = \Theta(\frac{\pi}{6}) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda_n = 9(2n-1)^2, n=1, 2, \dots \\ \Theta_n = \{\cos 3(2n-1)\theta\} \end{cases}$ 

Probamos: $u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r) \cos 3(2n-1)\theta \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left[R_n'' + \frac{1}{r} R_n' - \frac{9(2n-1)^2}{r^2} R_n \right] \cos 3(2n-1)\theta = r^2 \cos 3\theta$

$$\rightarrow \begin{cases} r^2 R_1'' + r R_1' - 9 R_1 = r^4 \\ R_1 \text{ acotada en } 0, R_1(2) = 0 \end{cases} \xrightarrow{R_p = Ar^4} R_1 = c_1 r^3 + c_2 r^{-3} + \frac{1}{7} r^4 \xrightarrow{\text{c.c.}} R_1 = \frac{1}{7} [r^4 - 2r^3].$$

Concluimos que la solución (única) es $u(r, \theta) = \frac{1}{7} [r^4 - 2r^3] \cos 3\theta$.

El recinto de este último problema de **Dirichlet no homogéneo** no toca el origen. La acotación se sustituye por un dato explícito sobre $r=1$ y todas las condiciones de contorno están a la vista:

Ej 7. $\Delta u = \sin \theta$, $1 < r < 2$, $0 < \theta < \pi$
 $u(1, \theta) = u(2, \theta) = u(r, 0) = u(r, \pi) = 0$

Las autofunciones del homogéneo las dará el problema de contorno: 

$$\begin{cases} \Theta'' + \lambda \Theta = 0 \\ \Theta(0) = \Theta(\pi) = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = n^2, \Theta_n(\theta) = \{\sin n\theta\}, n=1, 2, \dots \text{ Probamos } u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r) \sin n\theta.$$

[La serie de cosenos y senos del Ej 3. no cumple los datos de contorno (aquí no hay periodicidad).]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[R_n'' + \frac{1}{r} R_n' - \frac{n^2}{r^2} R_n \right] \sin n\theta = \sin \theta \text{ [ya desarrollada en senos].}$$

[Si fuese una $F(r, \theta)$ cualquiera, se desarrollaría en senos, viendo la r como constante].

Las dos condiciones para las R_n salen de las otras condiciones de contorno:

$$\sum_{n=0}^{\infty} R_n(1) \sin n\theta = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(2) \sin n\theta = 0 \Rightarrow R_n(1) = R_n(2) = 0 \quad \forall n.$$

Sólo tendrá solución no nula $r^2 R_1'' + r R_1' - R_1 = r^2$ con los datos de contorno nulos de arriba.

$$R_{1p} = Ar^2 \text{ [} \lambda=2 \text{ no autovalor]} \rightarrow A = \frac{1}{3} \rightarrow R_1 = c_1 r + c_2 r^{-1} + \frac{1}{3} r^2 \xrightarrow{\text{c.c.}} c_1 = -\frac{7}{9}, c_2 = \frac{4}{9}.$$

La solución es, por tanto: $u(r, \theta) = (\frac{1}{3} r^2 - \frac{7}{9} r + \frac{4}{9} r^{-1}) \sin \theta$.